VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN LƯƠNG THÁI BÌNH

VỀ CÔNG THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA BIỂU DIỄN BẤT KHẢ QUY CỦA SIÊU ĐẠI SỐ LIE $\mathfrak{gl}(m|n)$

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2020

Luận án được hoàn thành tại: Viện Toán học-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Tập thể hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. PHÙNG HỒ HẢI
TS. NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Viện họp tại: Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
vào hồi... giờ ... ngày ... tháng ... năm ...

Có thể tìm hiểu về luận án tại:
- Thư viện Quốc gia
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Siêu đại số Lie còn gọi là đại số Lie $\mathbb{Z}_2$-phân bậc, một khái niệm ban đầu xuất hiện trong các nghiên cứu vật lý. Trong ngành vật lý lý thuyết, đây là một đối tượng quan trọng, nó mô tả toán học tính siêu đối xứng của các hạt. Trong đó các phần tử thuần nhất bậc $\bar{0}$, hay còn gọi là các phần tử chẵn đại diện cho các hạt boson, các phần tử thuần nhất bậc $\bar{1}$, hay còn gọi là các phần tử lẻ, đại diện cho các hạt fermion. Siêu đại số Lie nói chung không phải là đại số Lie, nhưng nó có thành phần thuần nhất bậc $\bar{0}$ là đại số Lie.

Siêu đại số Lie và lý thuyết biểu diễn của chúng tương đối phức tạp. Có nhiều tính chất quan trọng mà đối với đại số Lie thì thỏa mãn còn đối với siêu đại số Lie thì không. Ví dụ như, mỗi biểu diễn của đại số Lie đơn hữu hạn chiều thì hoàn toàn khả quy, nhưng đối với siêu đại số Lie thì tính chất này không còn đúng nữa.

V. Kac đã phân loại tất cả các siêu đại số Lie đơn hữu hạn chiều thành 3 kiểu: siêu đại Lie kiểu cổ điển cơ bản (basic classical), siêu đại số Lie kiểu cổ điển lạ (strange classical) và siêu đại số Lie kiểu Cartan. Sau đó, Kac tiến hành phân loại các biểu diễn bất khả quy hữu hạn chiều của siêu đại số Lie kiểu cổ điển cơ bản. Khi xem xét các biểu diễn bất khả quy hữu hạn chiều của các siêu đại số Lie đơn này, Kac chia chúng ra làm 2 loại: biểu diễn bất khả quy điển hình và biểu diễn bất khả quy không điển hình. Đối với lớp các biểu diễn bất khả quy điển hình, Kac đã thiết lập được công thức tính đặc trưng của chúng. Đây là công thức tương tự như công thức đặc trưng Weyl của biểu diễn bất khả quy của đại số Lie đơn. Kac vẫn còn để ngỏ công thức đặc trưng ứng với lớp các biểu diễn bất khả quy không điển hình. Bài toán tìm công thức đặc trưng cho biểu diễn bất khả quy không điển hình là bài toán phức tạp, thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học và vật lý. Có thể kể đến như: I.N. Bernstein và D.A. Leites (1980); A.B. Balantekin và I. Bars (1981); P.H. Dondi và P.D. Jarvis (1981); J. van der Jeugt, J.W.B Hughes, R.C. King và J. Thierry-Mieg (1990); I. Penkov và V. Serganova (1994).... Trong đó, đặc biệt phải kể đến công trình của Van der Jeugt cùng các cộng sự. Ở đấy, ông và các cộng sự đã đưa ra giả thuyết về công thức đặc trưng của các biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$. Vấn đề tìm công thức đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$ vẫn còn để mở cho đến năm 1995, khi Serganova kết hợp kỹ thuật của đại số và hình học đã đưa ra được công thức đặc trưng tổng quát. Tuy nhiên, công thức của Serganova là khá phức tạp, không tiện cho việc tính toán cụ thể. Sau đó, vào năm 2007, Su và Zhang dựa trên kỹ thuật của Brundan đã đưa ra một công thức đặc trưng khác, đơn giản và dễ sử dụng hơn công thức của Serganova.

Có một cách tiếp cận tự nhiên để tìm công thức đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của siêu đại số Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$ là người ta tìm cách làm tương tự như đại số Lie. Đó là mô tả các đặc trưng của các biểu diễn bất khả quy thông qua các S-hàm siêu đối xứng (một mở rộng của hàm đối xứng Schur). Việc này thực hiện được đối với lớp các biểu diễn bất khả quy hiệp biến (đó là các thành phần bất khả quy trong phân tích lũy thừa của biểu diễn tự nhiên thành tổng của các thành phần bất khả quy) và biểu diễn bất khả quy phản biến (đó là các thành phần bất khả quy trong phân tích của lũy thừa của biểu diễn đối ngẫu của biểu diễn tự nhiên). Đối với lớp các biểu diễn bất khả quy này, đặc trưng của chúng bằng S-hàm siêu đối xứng liên kết với các phân hoạch (giống như với đại số Lie). Bây giờ ta xét tích hỗn hợp gồm lũy thừa của biểu diễn tự nhiên và lũy thừa của biểu diễn đối ngẫu của biểu diễn tự nhiên. Các thành phần bất khả quy trong tích này được gọi là biểu diễn ten xơ trộn bất khả quy. Đặc trưng của biểu diễn ten xơ trộn bất khả quy nói chung không phải lúc nào cũng là S-hàm siêu đối xứng liên kết với phân hoạch hỗn hợp, trong đó phân hoạch hỗn hợp là sự kết hợp của 2 phân hoạch.

Vào năm 2006, Moens và Van der Jeugt đã đưa ra một giả thuyết cho một lớp các biểu diễn bất khả quy, được gọi là tới hạn, có đặc trưng là S-hàm siêu đối xứng liên kết với phân hoạch hỗn hợp.

Mục tiêu của luận án là chỉ ra một số lớp các biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$ mà đặc trưng là S-hàm siêu đối xứng liên kết với phân hoạch hỗn hợp. Kết quả chính được trình bày trong các chương 3, 4, và 5.

Luận án được chia thành 5 chương. Chương 1 giới thiệu một số ký hiệu và khái niệm cơ bản, đặc biệt là các hàm siêu đối xứng Schur. Đây là đối tượng mà chúng tôi muốn kết nối với đặc trưng của biểu diễn bất khả quy hữu hạn chiều của $\mathfrak{gl}(m|n)$.

Chương 2 trình bày ngắn gọn về lý thuyết biểu diễn của siêu đại số Lie, chủ yếu là siêu đại số Lie tuyến tính tổng quát $\mathfrak{gl}(m|n)$. Trong chương này, chúng tôi đưa ra một lớp trọng của $\mathfrak{gl}(m|n)$ mà chúng tôi gọi là lớp trọng đặc biệt. Đây là một lớp trọng đóng vai trò quan trọng trong luận án của chúng tôi.

Chương 3 trình bày một trong những kết quả chính của luận án. Trong chương này, chúng tôi khảo sát đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|1)$. Kết quả chính là Định lý 3.3.1, ở đó, chúng tôi chỉ ra đặc trưng bất khả quy tương ứng với trọng đặc biệt bằng với

S-hàm siêu đối xứng liên kết với phân hoạch hỗn hợp m-chuẩn.

Chương 4 trình bày một số kết quả mở rộng của Chương 3. Trong chương này, chúng tôi khảo sát lớp các biểu biễn bất khả quy tương ứng với trọng đặc biệt có dạng:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; -k, -k, \ldots, -k),$$

với $0 \leq k \leq m$ và $\alpha_{m-k} \geq 0 \geq \alpha_{m-k+1}$. Kết quả chính là Định lý 4.2.1.

Trong Chương 5, chúng tôi sử dụng một số ý tưởng và kỹ thuật của các chương trước để áp dụng cho trường hợp của đại số Lie cổ điển. Cụ thể, dựa trên các kết quả cho siêu đại số Lie, chúng tôi thu được một công thức quy nạp để tính đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của đại số Lie tuyến tính tổng quát. Công thức quy nạp này được phát biểu trong Định lý 5.3.1. Như là một hệ quả, chúng tôi đưa ra một công thức kiểu Jacobi-Trudi cho đặc trưng của một biểu diễn bất khả quy bất kỳ. Kết quả này được phát biểu trong Định lý 5.3.2.

Chương 1

Các hàm đối xứng và các hàm siêu đối xứng Schur

Mục đích của chương này là nhằm giới thiệu một số ký hiệu và khái niệm cơ bản mà chúng tôi sử dụng trong luận án, đặc biệt là các hàm đối xứng Schur và hàm siêu đối xứng Schur.

1.1 Phân hoạch và các phân hoạch hỗn hợp

Mục này giới thiệu các khái niệm cơ bản về phân hoạch, phân hoạch hỗn hợp....Chẳng hạn như, ta gọi một phân hoạch là một dãy các số nguyên không âm

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots),$$

thỏa mãn

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots .$$

Các số hạn của dãy này được gọi là các thành phần của λ. Số các thành phần khác 0 của λ được gọi là độ dài của λ, ký hiệu là $l(\lambda)$. Tổng của các thành phần khác 0 được gọi là trọng của λ, ký hiệu là $|\lambda|$,

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$$

Một phân hoạch của một số nguyên không âm N là một phân hoạch có trọng bằng N.

Phân hoạch hỗn hợp là một cặp có thứ tự các phân hoạch ν, μ, ký hiệu là $\bar{\nu};\mu$.

1.2 Vành các đa thức đối xứng

Trong mục này, chúng tôi trình bày về các đa thức đối xứng và giới thiệu một số cơ sở của vành này. Chẳng hạn như, các hàm đối xứng cơ bản $e_r(x)$, r là một số nguyên dương, là tổng của các tích của r biến phân biệt x_i, nghĩa là $e_r(x) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_r\leq m} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}$, trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ là tập các biến; các hàm đối xứng đầy đủ h_r, r là một số nguyên dương, là tổng của tất cả các đơn thức bậc r theo m biến $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

1.3 Hàm đối xứng Schur

Mục này giới thiệu các đa thức Schur liên kết với phân hoạch hoặc phân hoạch hỗn hợp cùng với các tính chất cơ bản của chúng. Chẳng hạn như, cho phân hoạch $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ có độ dài $l(\lambda) \leq m$, λ' là phân hoạch liên hợp của λ và S_m là nhóm đối xứng. Hàm đối xứng Schur, theo các biến $x_1, \ldots, x_m$ liên kết với phân hoạch λ, được định nghĩa như sau:

$$s_\lambda(x) = \frac{\sum_{w\in S_m} \epsilon(w)w(x_1^{\lambda_1+m-1}x_2^{\lambda_2+m-2}\ldots x_m^{\lambda_m})}{\prod_{1\leq i<j\leq m}(x_i - x_j)}.$$

Công thức Jacobi-Trudi cổ điển là công thức diễn đạt $s_\lambda(x)$ theo các hàm đối xứng cơ bản hoặc hàm đối xứng đầy đủ,

$$s_\lambda(x) = \det(h_{\lambda_i-i+j}(x))_{1\leq i,j\leq l(\lambda)},$$

hoặc

$$s_\lambda(x) = \det(e_{\lambda'_i-i+j}(x))_{1\le i,j\le l(\lambda')}.$$

1.4 Hàm siêu đối xứng

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu các hàm siêu đối xứng cơ bản và hàm siêu đối xứng đầy đủ. Đặc biệt là hàm siêu đối xứng Schur, còn gọi là S-hàm siêu đối xứng. Chẳng hạn như, các hàm được nêu dưới đây.

Cho $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là 2 tập biến độc lập. Hàm siêu đối xứng cơ bản được định nghĩa theo các hàm đối xứng cơ bản và đối xứng đầy đủ,

$$e_r(x/y) = \sum_{k=0}^{r} e_k(x)h_{r-k}(y),$$

với r là số nguyên dương. Tương tự, hàm siêu đối xứng đầy đủ được định nghĩa như sau:

$$h_r(x/y) = \sum_{k=0}^{r} h_k(x)e_{r-k}(y),$$

với r là số nguyên dương.

Hàm siêu đối xứng Schur liên kết với phân hoạch hỗn hợp $\bar{\nu};\mu$, còn gọi là S-hàm siêu đối xứng, được định nghĩa như sau:

$$s_{\bar{\nu};\mu}(x/y) = \det\left(\begin{array}{c|c} \dot{h}_{\nu_l+k-l}(x/y) & h_{\mu_j-k-j+1}(x/y) \\ \hline \dot{h}_{\nu_l-i-l+1}(x/y) & h_{\mu_j+i-j}(x/y) \end{array}\right),$$

trong đó các chỉ số i, tương ứng, j, k, l chạy từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, từ dưới lên trên, từ phải qua trái và $\dot{h}_r(x/y) = h_r(\bar{x}/\bar{y})$, với $\bar{x} = (x_1^{-1}, \ldots, x_m^{-1}), \bar{y} = (y_1^{-1}, \ldots, y_n^{-1})$.

Chương 2

Siêu đại số Lie và biểu diễn của chúng

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu tóm tắt về siêu đại số Lie và biểu diễn của siêu đại số Lie, với trọng tâm là siêu đại số Lie tuyến tính tổng quát. Chương này gồm có 5 mục.

2.1 Siêu đại số Lie

Mục này giới thiệu khái quát về siêu đại số Lie.

2.2 Đại số bao phổ dụng của siêu đại số Lie

Mục này trình bày về đại số bao phổ dụng của siêu đại số Lie cho trước.

2.3 Siêu đại số Lie tuyến tính tổng quát $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m|n)$

Mục này mô tả chi tiết về siêu đại số Lie tuyến tính tổng quát $\mathfrak{gl}(m|n)$. Một số khái niệm quan trọng khác cũng được mô tả tường minh như đại số con Cartan, hệ nghiệm, hệ nghiệm đơn, tập nghiệm âm, tập nghiệm dương, nhóm Weyl.

Siêu đại số Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$ có các phần tử là các ma trận vuông cấp $m+n$. Không gian véctơ $\mathfrak{h}$ bao gồm tất cả các ma trận đường chéo là một đại số con Cartan. Không gian này có chiều là $m+n$.

Tập hợp $\{E_{i,i}|i = 1, 2, \ldots, m+n\}$, $E_{i,i}$ là ma trận cỡ $(m+n)\times(m+n)$ mà hệ số thứ i trên đường chéo bằng 1, các vị trí khác bằng 0, là một cơ sở của $\mathfrak{h}$.

Không gian đối ngẫu $\mathfrak{h}^*$ của $\mathfrak{h}$ được gọi là không gian trọng. Không gian $\mathfrak{h}^*$ có một cơ sở là $\{\epsilon_i, \delta_j|i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n\}$, trong đó $\epsilon_i(E_{k,k}) = \delta_{ik}$, $\delta_j(E_{k,k}) = -\delta_{(m+j)k}$ với mọi i, j, và δ là ký hiệu Kronecker. Ta gọi cơ sở này là cơ sở $\epsilon\delta$.

Một trọng Λ được ký hiệu như sau

$$\Lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_m; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$

nếu phần tử $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ có dạng

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\epsilon_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_i\delta_i.$$

Một trọng Λ được gọi là trọng nguyên (integral) nếu các thành phần của nó λ_i, μ_j, là các số nguyên. Λ được gọi là trọng trội nếu $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$ và $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$.

Tập các nghiệm dương chẵn Δ_0^+

$$\Delta_0^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j|1 \leq i < j \leq m\} \cup \{\delta_i - \delta_j|1 \leq i < j \leq n\}.$$

Tập các nghiệm dương lẻ Δ_1^+

$$\Delta_1^+ = \{\epsilon_i - \delta_j|1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Cho trọng trội nguyên $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Một nghiệm dương lẻ $\epsilon_i - \delta_j$, với $i = 1, 2, \ldots, m$ và $j = 1, 2, \ldots, n$, được gọi là một nghiệm không điển hình của Λ nếu $\lambda_i + m + 1 - i = -\mu_j + j$.

Ký hiệu Γ_Λ là tập các nghiệm không điển hình của Λ,

$$\Gamma_\Lambda = \{\epsilon_i - \delta_j | \lambda_i + m + 1 - i = -\mu_j + j\}.$$

Một trọng Λ được gọi là điển hình nếu $\#\Gamma_\Lambda = 0$ và được gọi là không điển hình nếu $\#\Gamma_\Lambda = r \geq 1$ (trong trường hợp này Λ cũng được gọi là trọng r-không điển hình).

2.4 Biểu diễn

Mục này giới thiệu các biểu diễn của siêu đại số Lie, phân loại chúng dựa vào các biểu diễn có trọng cao nhất. Ngoài ra, chúng tôi cũng giới thiệu các biểu diễn điển hình, biểu diễn không điển hình, biểu diễn hiệp biến, biểu diễn phản biến.

2.5 Trọng đặc biệt, phân hoạch hỗn hợp chuẩn và mối quan hệ giữa chúng

Mục này giới thiệu một lớp các trọng mà chúng tôi gọi là trọng đặc biệt. Một số tính chất của lớp này cũng được thảo luận. Để kết nối giữa đặc trưng bất khả quy của siêu đại số Lie tuyến tính tổng quát và S-hàm siêu đối xứng, chúng tôi nêu một tương ứng giữa trọng đặc biệt với phân hoạch hỗn hợp $(m|n)$-chuẩn. Cụ thể, một trọng trội nguyên

$$\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \beta_1 := -k, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

với số nguyên $0 \leq k \leq m$ và $\alpha_{m-k} \geq 0 \geq \alpha_{m-k+1}$, được gọi là trọng đặc biệt. Đặt P_k là tập hợp các trọng đặc biệt có dạng trên và đặt P là hợp của tất cả các $P_k, k = 1, 2, \ldots, m$. Mệnh đề dưới đây cho thấy một trọng trội nguyên bất kỳ của $\mathfrak{gl}(m|n)$ sai khác với một trọng đặc biệt trong P bởi một bội duy nhất của trọng $\sigma = (1, \ldots, 1; -1, \ldots, -1)$.

Mệnh đề 2.5.1 *Giả sử* λ *là một trọng trội nguyên bất kỳ. Khi đó, tồn tại duy nhất một số nguyên* j *sao cho* $\Lambda := \lambda + j\sigma$ *có dạng:* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; -k, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, *trong đó* k *là số nguyên,* $0 \leq k \leq m$ *và thỏa mãn* $\alpha_{m-k} \geq 0 \geq \alpha_{m-k+1}$.

Một phân hoạch hỗn hợp $\bar{\nu}; \mu$ được gọi là $(m|n)$- chuẩn nếu tồn tại $0 \leq j \leq n$ và $0 \leq l \leq m$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \mu'_{j+1} + \nu'_{n-j+1} \leq m \\ \mu_{m-l+1} + \nu_{l+1} \leq n, \end{cases}$$

với μ' (tương ứng ν') là phân hoạch liên hợp của μ (tương ứng ν). Với mỗi $0 \leq k \leq m$, đặt Q_k là tập hợp gồm các phân hoạch hỗn hợp $(m|n)$-chuẩn $\bar{\nu}; \mu$ sao cho $\mu'_1 \leq m - k$ và $\nu'_n = k$. Các Q_k là rời nhau. Đặt Q là hợp của các $Q_k, k = 1, 2, \ldots, m$.

Mệnh đề 2.5.2 *Có một song ánh đi từ* P *vào* Q.

Chương 3

Công thức kiểu Jacobi-Trudi cho đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|1)$

Trong chương này, chúng tôi thu được các đặc trưng bất khả quy của siêu đại số Lie tuyến tính $\mathfrak{gl}(m|1)$ là S-hàm siêu đối xứng. Hàm siêu đối xứng này là định thức có các hệ số là các đặc trưng của các lũy thừa đối xứng của biểu diễn tự nhiên và đối ngẫu của nó. Công thức này được giả thuyết bởi J. van der Jeugt và E. Moens cho siêu đại số Lie tuyến tính tổng quát $\mathfrak{gl}(m|n)$ và nó được nhìn như là tổng quát hóa của công thức Jacobi-Trudi.

3.1 Giới thiệu

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu lại kĩ hơn bài toán.

3.2 Một số khái niệm cơ bản

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số kết quả cho trường hợp đặc biệt $\mathfrak{gl}(m|1)$. Cụ thể như cách biểu diễn đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|1)$ theo hàm một biến y.

Bổ đề 3.2.1 *Giả sử* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \mu)$ *là một trọng trội nguyên.*

a) Nếu Λ *là trọng điển hình thì*

$$\text{ch } V(\Lambda) = \frac{y^\mu}{e_m(x)} s_\lambda(x) \sum_{i=0}^{m} e_i(x) y^{m-i},$$

với $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *và* $e_0(x), e_1(x), e_2(x), \ldots, e_m(x)$ *là các hàm đối xứng cơ bản theo các biến* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

b) Nếu Λ *là trọng không điển hình và* $\Gamma_\Lambda = \{\epsilon_k - \delta_1\}$, *với* $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *thì*

$$\text{ch } V(\Lambda) = \frac{y^\mu}{e_m(x)} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha \in A_{k,i}} s_\alpha(x) \right) y^{m-(i+1)},$$

trong đó $A_{k,i}$ *là tập của các trọng trội nguyên* α *thỏa mãn* $\alpha_j - \lambda_j \in \{0, 1\}$ *với mọi* j *và* $|\alpha| - |\lambda| = i + 1$, *hơn nữa* $\alpha_k - \lambda_k = 1$.

3.3 Liên hệ giữa đặc trưng bất khả quy và S-hàm siêu đối xứng liên kết với phân hoạch hỗn hợp

Trong mục này, chúng tôi chứng minh đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{g}$ với trọng cao nhất là trọng đặc biệt bằng hàm siêu đối xứng Schur.

Định lý 3.3.1 *Giả sử* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; -k)$ *là trọng đặc biệt và* $\bar{\nu}; \mu$ *là phân hoạch hỗn hợp tương ứng với nó. Khi đó,*

$$\text{ch} V(\Lambda) = s_{\bar{\nu};\mu}(x/y).$$

Hệ quả dưới đây cho phép ta tính tất cả các đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|1)$.

Hệ quả 3.3.2 *Giả sử $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \beta)$ là một trọng trội nguyên bất kỳ của $\mathfrak{gl}(m|1)$. Khi đó, tồn tại duy nhất một số nguyên j sao cho $\Lambda + j\sigma$ là một trọng đặc biệt có dạng*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; -k),$$

và

$$\mathrm{ch}V(\Lambda) = \left(\frac{\prod_{i=1}^m x_i}{\prod_{j=1}^n y_j}\right)^{-j} s_{\bar{\nu};\mu}(x/y), \qquad (3.3.1)$$

trong đó $\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-k})$ và $\nu = (1-\alpha_m, 1-\alpha_{m-k-2}, \ldots, 1-\alpha_{m-k+1})$.

Chương 4

Công thức kiểu Jacobi-Trudi cho một lớp các đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$

Trong chương này, chúng tôi thiết lập công thức kiểu Jacobi-Trudi cho một lớp các biểu diễn bất khả quy của siêu đại số Lie tuyến tính tổng quát $\mathfrak{gl}(m|n)$. Kết quả này giải quyết được một phần giả thuyết được nêu bởi J. van der Jeugt và E. Moens. Các kết quả trong chương này là mở rộng các kết quả trong Chương 3, nhưng với cách chứng minh hoàn toàn khác.

4.1 Giới thiệu

Mục này giới thiệu vấn đề chính của luận án.

4.2 Định lý chính

Trong mục này, chúng tôi phát biểu kết quả quan trọng nhất của luận án. Cụ thể hơn, chúng tôi chỉ ra một lớp các biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$ mà công thức kiểu Jacobi-Trudi đúng. Lớp này bao gồm các biểu diễn bất khả quy với trọng cao nhất là trọng đặc biệt có dạng:

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; -k, -k, \ldots, -k),$$

với $0 \leq k \leq m$ và $\lambda_{m-k} \geq 0 \geq \lambda_{m-k+1}$.

Định lý 4.2.1 *Giả sử* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; -k, -k, \ldots, -k)$ *là một trọng đặc biệt của siêu đại số Lie* $\mathfrak{gl}(m|n)$ *và* $\bar{\nu}; \mu$ *là phân hoạch hỗn hợp tương ứng với nó. Khi đó,*

$$\mathrm{ch}V(\Lambda) = s_{\bar{\nu};\mu}(x/y).$$

Hệ quả dưới đây như là mở rộng của Định lý 4.2.1 cho lớp các trọng trội nguyên có dạng $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \beta, \beta, \ldots, \beta)$.

Hệ quả 4.2.2 *Giả sử* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \beta, \beta, \ldots, \beta)$ *là một trọng trội nguyên của* $\mathfrak{gl}(m|n)$. *Khi đó, tồn tại duy nhất một số nguyên* j *sao cho* $\Lambda + j\sigma$ *là một trọng đặc biệt có dạng*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; -k, -k, \ldots, -k),$$

và

$$\mathrm{ch}V(\Lambda) = \left(\frac{\prod_{i=1}^m x_i}{\prod_{j=1}^n y_j}\right)^{-j} s_{\bar{\nu};\mu}(x/y), \tag{4.2.1}$$

trong đó $\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-k})$ *và* $\nu = (n-\alpha_m, n-\alpha_{m-k-2}, \ldots, n-\alpha_{m-k+1})$.

Bằng cách áp dụng định lý trên cho $\mathfrak{gl}(m|1)$, chúng tôi thu lại được các kết quả của Chương 3, và do đó cung cấp một chứng minh khác các kết quả đó. Cụ thể, trong trường hợp $\mathfrak{gl}(m|1)$, bằng cách áp dụng Định lý 4.2.1 cho các trọng đặc biệt chúng tôi thu được Định lý 3.3.1. Tương tự, bằng cách áp dụng Hệ quả 4.2.2 cho các trọng bất kỳ chúng tôi nhận được Hệ quả 3.3.2.

4.3 Công thức thu gọn cho đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$

Trong mục này, chúng tôi thiết lập một công thức thu gọn cho các đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$. Cụ thể, công thức này cho phép tính các đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m|n)$ thông qua các đặc trưng của các siêu đại số Lie con của nó. Để làm điều này, chúng tôi dựa vào công thức đặc trưng tổng quát của Su-Zhang mà chúng tôi sẽ giới thiệu dưới đây

4.3.1. Công thức đặc trưng của Su-Zhang

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu công thức đặc trưng được xây dựng bởi Su-Zhang. Công thức được phát biểu như sau:

Định lý 4.3.1 *Đặc trưng hình thức* ch $V(\Lambda)$ *của* $\mathfrak{g}$*-module bất khả quy hữu hạn chiều* $V(\Lambda)$ *được cho bởi*

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\ V(\Lambda) = \sum_{\sigma\in S^{\Lambda},\pi\in C_r} \frac{1}{r!}\binom{r}{\pi}(-1)^{|\Lambda-(\pi\cdot(\sigma\cdot\Lambda)_{\uparrow})_{\uparrow}|+l(\pi)}\frac{1}{L_0} \\ \times \sum_{w\in W}\epsilon(w)w(e^{(\pi\cdot(\sigma\cdot\Lambda)_{\uparrow})_{\uparrow}+\rho_0}\prod_{\beta\in\Delta_1^+\setminus\Gamma_\Lambda}(1+e^{-\beta})).\end{aligned}$$

4.3.2. Công thức thu gọn cho đặc trưng bất khả quy hữu hạn chiều của $\mathfrak{gl}(m|n)$

Trước khi phát biểu kết quả chính của mục này, chúng tôi sẽ đưa ra một quy tắc thế trên các hàm phân thức. Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là 2 tập biến độc lập. Với một trọng $\lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ bất kỳ, đặt $(x; y)^\lambda = x_1^{\alpha_1} \dots x_2^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}$.

Xét tập hợp $\underline{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_{m-k}\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ và $\underline{s} = \{r_{m-k+1}, r_{m-k+2}, \dots, r_m\} = \{1, 2, \dots, m\}\setminus\underline{r}$, với k là số nguyên không âm nhỏ hơn hoặc bằng m. Cho f là một hàm hữu tỉ theo các biến $x_1, x_2, \ldots, x_{m-k}, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ký hiệu $\chi_{\underline{r}}(f)$ là hàm hữu tỉ thu được từ f bằng cách thay x_i bởi x_{r_i}. Nghĩa là, nếu

$$f = \frac{P(x_1, x_2, \ldots, x_{m-k}, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{Q(x_1, x_2, \ldots, x_{m-k}, y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

thì

$$\chi_{\underline{r}}(f) = \frac{P(x_{r_1}, \ldots, x_{r_{m-k}}, y_1, \ldots, y_n)}{Q(x_{r_1}, \ldots, x_{r_{m-k}}, y_1, \ldots, y_n)}. \tag{4.3.1}$$

4.4 Công thức thu gọn cho S-hàm siêu đối xứng

Kết quả sau đây cho mối liên hệ giữa các hàm siêu đối xứng theo các biến $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Định lý 4.4.1 *Giả sử $\bar{\nu}; \mu$ là phân hoạch hỗn hợp. Giả sử q là số nguyên thỏa mãn $0 < q < m + 1 - l(\mu)$ và $p = m - q$. Khi đó,*

$$\sum_{x', x''} \frac{(\prod x')^q s_{\overline{\eta};\mu}(x'/y) s_{\overline{\kappa}}(x''/y)}{E(x', x'')} = s_{\bar{\nu};\mu}(x/y),$$

trong đó $\kappa = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q)$, $\eta = (\nu_{q+1}, \nu_{q+2}, \ldots)$ và tổng ở vế trái chạy trên các bộ x, x' mà $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = x' \cup x''$ và $\#x' = p$, $\#x'' = q$.

4.5 Chứng minh định lý chính

Trong mục này, chúng tôi chứng minh chi tiết định lý chính.

Định lý 4.2.1 *Giả sử $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; -k, -k, \ldots, -k)$ là một trọng đặc biệt của siêu đại số Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$ và $\bar{\nu}; \mu$ là phân hoạch hỗn hợp tương ứng với nó. Khi đó,*

$$\mathrm{ch}V(\Lambda) = s_{\bar{\nu};\mu}(x/y).$$

Chương 5

Công thức kiểu Jacobi-Trudi cho đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m)$

Trong Chương 5, chúng tôi sử dụng một số ý tưởng và kỹ thuật của các chương trước để áp dụng cho các trường hợp của đại số Lie cổ điển. Cụ thể, lấy cảm hứng từ các kết quả cho siêu đại số Lie, chúng tôi thu được một công thức quy nạp để tính đặc trưng của biểu diễn bất khả quy của đại số Lie tuyến tính tổng quát. Công thức này được trình bày trong Định lý 5.3.1. Như là một hệ quả, chúng tôi đưa ra công thức kiểu Jacobi-Trudi cho đặc trưng của một biểu diễn bất khả quy bất kỳ, Định lý 5.3.2.

5.1 Giới thiệu

Mục này giới thiệu giới thiệu về công thức đặc trưng Weyl cho các đại số Lie.

5.2 Một số ký hiệu và khái niệm của đại số Lie $\mathfrak{gl}(m)$

Mục này nhắc lại một số ký hiệu và khái niệm của đại số Lie.

5.3 Một công thức dạng quy nạp của công thức đặc trưng

Trong mục này, chúng tôi thiết lập một công thức quy nạp để tính các đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m)$. Cụ thể, công thức này cho phép tính các đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m)$ thông qua các đặc trưng của các siêu đại số Lie con của nó.

Trước hết, chúng tôi sẽ giới thiệu một quy tắc thế. Giả sử $\underline{r} := \{r_1, r_2, \ldots, r_{m-k}\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ và $\underline{s} := \{r_{m-k+1}, r_{m-k+2}, \ldots, r_m\} = \{1, 2, \ldots, m\} \backslash \underline{r}$, với k là số nguyên không âm nhỏ hơn hay bằng m. Cho f là một hàm đa thức theo các biến $x_1, x_2, \ldots, x_{m-k}$. Ký hiệu $\chi_{\underline{r}}(f)$ là hàm đa thức thu được từ f bằng cách thay x_i bởi x_{r_i}. Nghĩa là, nếu

$$f = P(x_1, x_2, \ldots, x_{m-k}),$$

thì

$$\chi_{\underline{r}}(f) = P(x_{r_1}, \ldots, x_{r_{m-k}}).$$

Định lý 5.3.1 *Giả sử $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ là một trọng trội nguyên của đại số Lie $gl(m)$ và giả sử k là một số nguyên , $0 \leq k \leq m$. Khi đó, $\alpha = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-k})$, $\beta = (\lambda_{m-k+1}, \ldots, \lambda_m)$ lần lượt là trọng của $\mathfrak{gl}(m-k)$, $\mathfrak{gl}(k)$, và*

$$\text{ch } L(\lambda) = \sum_{\underline{r},\underline{s}} \frac{(\prod x_{\underline{r}})^k \chi_{\underline{r}}(ch\ L(\alpha))\ \chi_{\underline{s}}(ch\ L(\beta))}{E(x_{\underline{r}}, x_{\underline{s}})},$$

tổng chạy trên các bộ $\underline{r}, \underline{s}$ mà $\{1, 2, \ldots, m\} = \underline{r} \cup \underline{s}$ và $\#\underline{r} = m-k$, $\#\underline{s} = k$.

Như là một hệ quả của Định lý 5.3.1, chúng tôi đưa ra công thức kiểu Jacobi-Trudi cho đặc trưng của một biểu diễn bất khả quy bất kỳ sau đây:

Định lý 5.3.2 *Giả sử* λ *là một trọng trội nguyên của* $\mathfrak{gl}(m)$ *và gọi* $\overline{\nu};\mu$ *là phân hoạch hỗn hợp tương ứng. Khi đó*

$$\mathrm{ch}L(\lambda) = s_{\overline{\nu};\mu}(x).$$

KẾT LUẬN

Trong luận án này, chúng tôi thu được một số kết quả sau.

(i) Xây dựng một lớp các trọng đặc biệt của $\mathfrak{gl}(m|n)$. Một trọng bất kỳ sai khác với trọng đặc biệt một bội nguyên của $(1, ..., 1; -1, ..., -1)$.

(ii) Chỉ ra rằng, với Λ là trọng đặc biệt của $\mathfrak{gl}(m|1)$. Khi đó, biểu diễn bất khả quy với trọng cao nhất Λ có đặc trưng là S-hàm siêu đối xứng (đẳng thức đó được gọi là công thức kiểu Jacobi-Trudi). Đồng thời, chúng tôi thu được đặc trưng của biểu diễn bất khả quy bất kỳ của $\mathfrak{gl}(m|1)$ là tích của một lũy thừa của $\frac{x_1x_2...x_m}{y}$ và S-hàm siêu đối xứng.

(iii) Đưa ra công thức thu gọn tính đặc trưng của biểu diễn bất khả quy hữu hạn chiều với trọng cao nhất là trọng đặc biệt.

(iv) Đưa ra một công thức thu gọn cho S-hàm siêu đối xứng liên kết với phân hoạch hỗn hợp.

(v) Chỉ ra rằng, với các trọng Λ có dạng:

$$\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \beta_1 := -k, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

với số nguyên $0 \leq k \leq m$, và $\alpha_{m-k} \geq 0 \geq \alpha_{m-k+1}$, thì đặc trưng bất khả quy tương ứng với chúng là S-hàm siêu đối xứng.

(vi) Đưa ra một công thức quy nạp tính đặc trưng bất khả quy của $\mathfrak{gl}(m)$. Từ đó, chúng tôi đưa ra một công thức Jacobi-Trudi mở rộng cho trường hợp đại số Lie $\mathfrak{gl}(m)$.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. N.L.T. Binh, N.T.P. Dung and P.H. Hai, Jacobi-Trudi type formula for character of irreducible representations of $\mathfrak{gl}(m|1)$, *Acta Math. Vietnam.* **44** (2019), no. 3, 603–615.

2. N.L.T. Binh, Jacobi-Trudi type formula for a class of irreducible representations of $\mathfrak{gl}(m|n)$, *Journal of Algebra and its Applications.* **DOI** 10.1142/S0219498822500153.

3. N.L.T. Binh, Reduction formula for the Weyl character formula of finite-dimensional irreducible representations of $\mathfrak{gl}(m)$,*Đang gửi đăng.*

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO VÀ THẢO LUẬN TẠI:

- Seminar Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học.

- Hội nghị Nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2014, 10/2015, 10/2016, 10/2017, 10/2018, 10/2019.

- Hội nghị ĐAHITÔ, tháng 10/2016, tại Buôn Ma Thuột.

- Xêmina tại Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, tháng 6/2017.

- Đại hôi toán học Việt nam lần thứ IX, tháng 8/2018, tại Nha Trang.

- Hội nghị Đại số Lý thuyết số Hình học và Tôpô, tháng 12/2019, tại Bà Rịa - Vũng Tàu.