Mở đầu

Thuật ngữ "cân bằng" đã từ lâu được sử dụng rộng rãi trong các ngành khoa học như vật lý, hóa học, sinh học, kỹ thuật, kinh tế ..., dưới nhiều hình thức khác nhau, tùy thuộc vào các mô hình toán học khác nhau. Đó có thể là trong các cấu trúc vật lý hay cấu trúc cơ học [38], trong các quá trình phản ứng hóa học [14], trong sự điều tiết giao thông bởi hệ thông máy tính và mạng truyền thông [31], trong nhiều bài toán kinh tế như bài toán về sự canh tranh [30], mô hình kinh doanh bán độc quyền Nash-Cournot [50], bài toán cung cầu [10] hay mô hình trò chơi không hợp tác của Nash [72, 73].

Trong khuôn khổ luận án này, bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C, \qquad (EP)$$

trong đó C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0,\ \forall x \in C$, được gọi là song hàm cân bằng. Tập nghiệm của bài toán (EP) được ký hiệu là (SEP).

Bất đẳng thức trên lần đầu được dùng bởi Nikaido và Isoda cho bài toán trò chơi bất hợp tác năm 1955 [74]. Năm 1972, Ky Fan [55] gọi bài toán (EP) là bất đẳng thức minimax và thiết lập một kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán này cho trường hợp tập ràng buộc C là lồi com-pắc. Ngay trong năm đó, H. Brézis, L. Nirenberg và G. Stampacchia [21] đã mở rộng kết quả của Ky Fan cho trường hợp tập ràng buộc C chỉ là lồi đóng. Thuật ngữ "Bài toán cân bằng" được sử dụng lần đầu tiên trong bài báo của Muu và Oettli năm 1992 [64]. Trong bài này và bài của Blum và Oettli năm 1994 [20], các tác giả đã trình bày những kết quả về mối liên quan giữa bài toán cân bằng với một số bài toán khác như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm yên ngựa, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash ... Bài toán cân bằng (EP) trong khoảng hai thập kỉ gần đây đã thu hút được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học, cả về phương diện lý thuyết lẫn thuật toán.

Về phương diện lý thuyết, đã có khá nhiều bài viết của các tác giả nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, tính ổn định, sự mở rộng ... của bài toán cân bằng (EP). Một kết quả thường được nhắc đến và sử dụng là của Ky Fan [55]. Trong kết quả về sự tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng của Ky Fan, còn gọi là bất đẳng thức minimax, thì C là một tập lồi, compắc trong không gian hữu hạn chiều X và song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(., y)$ là nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in C$, $f(x, .)$ là tựa lồi trên C với mỗi $x \in C$.

Trường hợp C chỉ là tập lồi đóng, kết quả của các tác giả H. Brézis, L. Nirenberg và G. Stampacchia trong [21] chỉ ra rằng nếu f thỏa mãn thêm điều kiện bức: tồn tại tập compắc B và $y_0 \in C \cap B$ sao cho

$$f(x, y_0) < 0 \text{ với } x \in C \setminus B,$$

thì bài toán (EP) có nghiệm.

Có thể thấy nếu song hàm f là đơn điệu mạnh thì điều kiện bức trên sẽ luôn được thỏa mãn [33]. Trường hợp song hàm f có tính đơn điệu và giả đơn điệu, với một số điều kiện bức nhẹ hơn thì bài toán có nghiệm [19].

Cùng với những nghiên cứu về mặt định tính, các nhà toán học cũng dành sự quan tâm rất nhiều cho việc tìm các thuật toán giải nghiệm của bài toán cân bằng (EP). Các thuật toán được biết hiện nay cơ bản dựa trên các kỹ thuật tìm nghiệm của bài toán tối ưu như thuật toán chiếu, thuật toán chiếu tăng cường, phương pháp hàm gap, phương pháp hướng giảm; hoặc các kỹ thuật hiệu chỉnh cho bài toán giải phương trình hay bài toán tối ưu như phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, phương pháp điểm gần kề.

Tuy nhiên, các thuật toán trên rất khó để áp dụng cho bài toán cân bằng hai cấp vì tập ràng buộc lúc này là một tập ẩn, ở đó nó có thể là tập nghiệm của một bài toán điểm bất động, tập nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân hay một bài toán cân bằng.

Ngoài ra, việc áp dụng các thuật toán chiếu, chiếu tăng cường để giải một bài toán cân bằng hiệu chỉnh có thể gặp khó khăn trong tính toán khi song hàm hiệu chỉnh có cấu trúc phức tạp hơn so với từng song hàm thành phần. Việc này dẫn đến nhu cầu giải bài toán cân bằng (EP) khi song hàm cân bằng có thể tách thành tổng của hai hay nhiều hàm khác mà mỗi hàm có những tính chất tốt hơn hoặc dễ tính toán hơn. Một số các tác giả trong và ngoài nước cũng đã có những nghiên cứu về vấn đề này như trong [7, 39, 62]. Tuy nhiên, thuật toán đề xuất trong các công trình đó có những hạn chế như việc phải giải những bài toán phụ là bài toán cân bằng ẩn, hay song hàm cân bằng phải thỏa mãn điều kiện liên tục Hölder khiến lớp bài toán bị thu hẹp.

Qua đánh giá tóm tắt ở trên về bài toán cân bằng, chúng tôi nhận thấy còn một số vấn đề sau:

- thứ nhất, cả về vấn đề tồn tại nghiệm lẫn thuật toán cho lớp bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, hầu như chưa có mấy kết quả;
- thứ hai là đối với bài toán cân bằng hai cấp, việc giải bằng các phương pháp thông thường là khó áp dụng;
- thứ ba là các thuật toán tách còn có những hạn chế trong tính toán hay trong lớp hàm có thể áp dụng.

Vì những nguyên nhân đó, tập thể hướng dẫn đã gợi ý cho tôi nghiên cứu đề tài "Phương pháp giải một số bài toán cân bằng đơn điệu".

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Các khái niệm cơ bản

Mục này trình bày một số khái niệm cơ bản quen thuộc như khái niệm tập lồi, hàm lồi, sự hội tụ mạnh, yếu của dãy số, tính liên tục của hàm số, tính khả vi và khả dưới vi phân của hàm số ... được trích dẫn trong các tài liệu [3, 4, 80, 90] và các tài liệu được trích dẫn trong đó. Ngoài ra là một số khái niệm về tính đơn điệu của toán tử cũng như của song hàm thường được sử dụng khi nghiên cứu bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng được trích dẫn trong các tài liệu [12, 18, 36, 46, 47, 51, 83].

1.2. Một số kết quả bổ trợ

Các kết quả sau được sử dụng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng đơn điệu mạnh cũng như trong chứng minh sự hội tụ của các thuật toán ở các chương sau.

Xét bài toán cân bằng

$$\text{Find } x^* \in C: \ f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in C. \tag{EP}$$

Bài toán đối ngẫu của (EP), hay còn gọi là bài toán cân bằng Minty, là bài toán

$$\text{Find } x^* \in C: \ f(y, x^*) \leq 0 \ \forall y \in C. \tag{DEP}$$

Tập nghiệm của bài toán cân bằng (EP) và bài toán đối ngẫu của nó (DEP) được ký hiệu lần lượt là (SEP) và $(SDEP)$. Ta có mối liên hệ giữa hai tập nghiệm (SEP) và $(SDEP)$ như sau.

Bổ đề 1.2.1. *[50]*

(a) Nếu f giả đơn điệu thì $(SEP) \subseteq (SDEP)$;

(b) Nếu $f(.,y)$ bán liên tục trên và $f(x,.)$ là tựa lồi chặt với mọi $x, y \in C$ thì $(SDEP) \subseteq (SEP)$.

Do đó, nếu song hàm f là giả đơn điệu trên C và $f(.,y)$ nửa liên tục trên ở trên C thì ta có $(SEP) = (SDEP)$.

Cho ánh xạ $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, tập các điểm bất động của T, ký hiệu là $\mathrm{Fix}T$, là tập:

$$\mathrm{Fix}T = \{x \in \mathcal{H} : Tx = x\}.$$

Bổ đề 1.2.2. *[12] Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$, $T : C \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ không giãn, $\{x^k\}_{k\geq 0} \subset C$ và x một phần tử trong $\mathcal{H}$. Giả sử rằng $x^k \rightharpoonup x$ và $x^k - T(x^k) \to 0$. Khi đó $x \in FixT$.*

Bổ đề 1.2.3. *[12] Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và $T : C \to \mathcal{H}$ là ánh xạ không giãn. Khi đó $FixT$ là tập lồi đóng.*

Bổ đề 1.2.4. *Giả sử tập điểm bất động chung S của các ánh xạ không giãn $T_j,\ j = 1, \ldots, N$ không rỗng. Đặt $T(x) := \sum_{j=1}^{N} \mu_j T_j(x)$ với $0 < \mu_j < 1,\ j = 1, \ldots, N$ và $\sum_{j=1}^{N} \mu_j = 1$. Khi đó T là ánh xạ không giãn và S trùng với tập điểm bất động của T.*

Bổ đề 1.2.5. *[86] Giả sử $\{\alpha_k\}$ là dãy số không âm thỏa mãn*

$$\alpha_{k+1} \leq \alpha_k + \sigma_k \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

ở đó dãy $\{\sigma_k\}$ thỏa mãn $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k| < \infty$. Khi đó dãy $\{\alpha_k\}$ có giới hạn.

Bổ đề 1.2.6. *[93] Giả sử $\{\alpha_k\}$ là dãy số không âm thỏa mãn*

$$\alpha_{k+1} \leq (1 - \lambda_k)\alpha_k + \lambda_k \delta_k + \sigma_k \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

ở đó $\{\lambda_k\} \subset (0, 1), \{\delta_k\}$ and $\{\sigma_k\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$*;*

(ii) $\limsup_{k\to\infty} \delta_k \leq 0$*;*

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k| < \infty$*.*

Khi đó $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$*.*

Bổ đề 1.2.7. *[75] Cho* $\mathcal{H}$ *là một không gian Hilbert,* $\{x^n\}$ *là một dãy phần tử trong* $\mathcal{H}$*. Cho* $\{r_n\}$ *là một dãy số thực không âm sao cho* $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = +\infty$ *và đặt* $\bar{x}^n := \dfrac{\sum_{i=1}^{n} r_i x^i}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$*. Giả sử tồn tại một tập lồi đóng khác rỗng* $S \subset \mathcal{H}$ *thỏa mãn:*

(i) Với mọi $u \in S$*,* $\lim_{n\to\infty} \|x^n - u\|$ *tồn tại;*

(ii) Mọi điểm tụ yếu của dãy $\{\bar{x}^n\}$ *đều thuộc vào* S*.*

Khi đó $\{\bar{x}^n\}$ *hội tụ yếu đến một phần tử* $\bar{x} \in S$*.*

Chương 2

Bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh

2.1. Sự tồn tại nghiệm

Mục này chỉ ra rằng bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, dưới một số giả thiết cơ bản sẽ luôn có duy nhất nghiệm.

Giả sử C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và song hàm cân bằng $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

(A1) $f(., y)$ là hàm nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in C$;

(A2) $f(x, .)$ là hàm lồi và khả dưới vi phân với mỗi $x \in C$;

(A2a) $f(x, .)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới ở trên C với mỗi $x \in C$.

Bổ đề sau là một hệ quả trực tiếp của Định lý 3.1 trong [19].

Bổ đề 2.1.1. *Cho $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng giả đơn điệu sao cho $f(., y)$ là bán liên tục ở trên C với mỗi $y \in C$ và $f(x, .)$ lồi, nửa liên tục dưới ở trên C với mỗi $x \in C$. Giả sử điều kiện bức sau thỏa mãn: tồn tại hình cầu đóng B sao cho*

$$\forall x \in C \setminus B, \ \exists y \in C \cap B : f(x, y) < 0.$$

Khi đó bài toán cân bằng (EP) có nghiệm.

Dựa vào Bổ đề 2.1.1, ta có kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh được phát biểu như sau:

Mệnh đề 2.1.1. *Giả sử f là song hàm giả đơn điệu mạnh với hệ số β trên C, khi đó với các giả thiết (A1), (A2a), bài toán (EP) có duy nhất nghiệm.*

Chứng minh. Tóm tắt chứng minh: ta sẽ chứng minh điều kiện bức trong Bổ đề 2.1.1 được thỏa mãn cho trường hợp tập C không bị chặn:

1. Trước hết, từ điều kiện (A2a), ta được:

$$f(y^0, x^r) + \beta\|x^r - y^0\|^2 \to \infty \text{ khi } r \to \infty. \tag{2.1}$$

2. Giả sử phản chứng, điều kiện bức trong Bổ đề 2.1.1 không thỏa mãn. Khi đó, do tính giả đơn điệu mạnh của f, ta xây dựng được dãy $x^r \in C \setminus B_r$ sao cho:

$$f(y^0, x^r) + \beta\|x^r - y^0\|^2 \leq 0 \ \forall r > 0, \tag{2.2}$$

điều này trái với (2.1).

□

Kết quả về sự tồn tại nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 2.1.1.

Hệ quả 2.1.1. *Giả sử $F : C \to \mathcal{H}$ bán liên tục và giả đơn điệu mạnh trên C. Khi đó bài toán bất đẳng thức biến phân (VI) có nghiệm duy nhất.*

Trong [37] và [48], các tác giả khi nghiên cứu các kết quả cho bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu mạnh đều phải giả thiết bài toán có nghiệm. Hệ quả 2.1.1 đã giúp cho giả thiết đó luôn được thỏa mãn.

2.2. Thuật toán và tốc độ hội tụ

Các thuật toán đưa ra trong mục này dựa trên thuật toán tìm điểm bất động của ánh xạ $s : C \to C$ được xác định bởi

$$s(x) := \underset{y \in C}{\operatorname{argmin}}\{\rho f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\}, \tag{2.3}$$

ở đó $\rho > 0$. Với giả thiết $f(x,.)$ lồi, đóng trên tập lồi đóng C, ánh xạ s luôn xác định vì hàm mục tiêu lồi mạnh.

Mối liên hệ giữa nghiệm của bài toán cân bằng và điểm bất động của ánh xạ s được phát biểu như sau:

Bổ đề 2.2.1. *[58] Cho s được xác định bởi công thức (2.3). Khi đó, dưới các giả thiết (A1), (A2), x^* là một nghiệm của (EP) nếu và chỉ nếu $x^* = s(x^*)$.*

Điều kiện liên tục kiểu Lipschitz sau được giới thiệu trong [58] sẽ được sử dụng trong chứng minh sự hội tụ của một số thuật toán trong mục này: ta nói f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C, nếu tồn tại $L_1, L_2 > 0$ sao cho:

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - L_1\|x-y\|^2 - L_2\|y-z\|^2, \ \forall x,y,z \in C. \tag{2.4}$$

2.2.1. Thuật toán với tốc độ hội tụ tuyến tính

Giả thiết song hàm f là giả đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (2.4). Khi đó ta có một thuật toán hội tụ tuyến tính cho bài toán cân bằng (EP) như sau.

Thuật toán 2.2.1. *Cho trước sai số $\varepsilon \geq 0$ và tham số $0 < \rho < \dfrac{1}{2L_1}$.*

Lấy tùy ý $x^0 \in C$, đặt $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$, giải bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\min\{\rho f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}$$

thu được nghiệm duy nhất x^{k+1}.

Nếu $x^{k+1} = x^k$ thì dừng, x^k là nghiệm của bài toán (EP). Trái lại, tăng $k \to k+1$.

Chú ý rằng, với bài toán bất đẳng thức biến phân (VI), khi $f(x,y) := \langle F(x), y - x\rangle$, việc giải bài toán tối ưu lồi mạnh trong Bước 1 chính là việc tính hình chiếu của vec-tơ $x^k - \rho F(x^k)$ lên C, tức là $x^{k+1} = P_C(x^k - \rho F(x^k))$.

Sự hội tụ của Thuật toán 2.2.1 được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.1. *Giả sử f là song hàm giả đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\beta > 0$, các điều kiện (A1), (A2), điều kiện kiểu Lipschitz (2.4) được thỏa mãn và với mỗi $x \in C$, hàm $f(x,.)$*

liên tục tại một điểm thuộc C hoặc int$C \neq \emptyset$. Giả sử $L_2 < \beta$ và $0 < \rho \leq \dfrac{1}{2L_1}$. Khi đó, nếu Thuật toán 2.2.1 không dừng sau hữu hạn bước thì dãy lặp $\{x^k\}$ hội tụ với tốc độ tuyến tính đến nghiệm duy nhất x^* của (EP) và ta có đánh giá:

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{1-\alpha}\|x^k - x^{k+1}\|, \quad \forall k \geq 0, \tag{2.5}$$

ở đó $\alpha := \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2\rho(\beta - L_2)}} \in (0, 1)$.

Chú ý 2.2.1. *Ta gọi một điểm $x^k \in C$ là ε-nghiệm của (EP) nếu $\|x^k - x^*\| \leq \varepsilon$, ở đó x^* là nghiệm chính xác của (EP). Trong Thuật toán 2.2.1, nếu thuật toán dừng tại bước k, tức là $x^{k+1} = x^k$ thì x^k là nghiệm. Trường hợp thuật toán không dừng thì dãy lặp $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.2.1 hội tụ với tốc độ tuyến tính đến nghiệm duy nhất x^* của (EP) với đánh giá (**??**). Do đó trong thực tế tính toán, ta có thể dừng thuật toán khi khoảng cách giữa hai điểm lặp này nhỏ thua một sai số $\epsilon > 0$ cho trước.*

2.2.2. Thuật toán với hệ số hiệu chỉnh không phụ thuộc hệ số điều kiện kiểu Lipschitz

Thuật toán 2.2.2. *Cho trước một dãy số thực dương $\{\rho_k\}_{k\geq 0}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \rho_k = 0.$$

Lấy $x^0 \in C$ và đặt $k = 0$.

Tại mỗi bước $k = 0, 1, \ldots$, x^{k+1} là nghiệm duy nhất của bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\min_{y\in C}\{\rho_k f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2\}.$$

Nếu $x^{k+1} = x^k$ thì dừng: x^k là nghiệm của bài toán. Trái lại, tăng $k \to k + 1$.

Sự hội tụ của dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.2.2 được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.2. *Giả sử f là song hàm giả đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C và thỏa mãn các giả thiết (A1), (A2) và điều kiện kiểu Lipschitz (2.4) với $L_2 < \beta$. Cho $\{x^k\}_{k\geq 0}$ là dãy sinh* *bởi Thuật toán 2.2.2 và x^* là nghiệm duy nhất của (EP). Khi đó tồn tại một chỉ số $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k > k_0$, ta có*

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^{k}[1 + 2\rho_k(\beta - L_2)]}}\|x^{k_0} - x^*\|. \tag{2.6}$$

Hơn nữa,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^{k}[1 + 2\rho_k(\beta - L_2)]}} = 0, \tag{2.7}$$

và do đó $\{x^k\}$ hội tụ đến x^*.

Chú ý 2.2.2. *Trong trường hợp bài toán bất đẳng thức biến phân*

$$\textit{Tìm } x^* \in C \textit{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^*\rangle \geq 0 \ \forall y \in C,$$

ở đó $F : C \to \mathcal{H}$ là toán tử giả đơn điệu mạnh hệ số $\mu > 0$ và liên tục L-Lipschitz trên C, với song hàm f xác định bởi

$$f(x, y) := \langle F(x), y - x\rangle,$$

ta luôn có thể chọn được tham số $m > 0$ sao cho $L_2 = \dfrac{L}{2m} < \mu$.

Khi đó, phép lặp trong Thuật toán 2.2.2 trở thành phép chiếu xác định bởi

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \rho_k F(x^k)).$$

Sự hội tụ của thuật toán chiếu cải biên cho bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu mạnh đã được các tác giả trong [48] nghiên cứu. Các Thuật toán 2.2.1 và 2.2.2 có thể coi như là sự mở rộng của các kết quả ở [48].

2.2.3. Một thuật toán dưới vi phân xấp xỉ

Thuật toán tiếp theo đây áp dụng cho lớp bài toán mà ở đó song hàm f không cần thiết phải khả dưới vi phân mà chỉ cần khả dưới vi phân xấp xỉ. Hơn nữa, giả thiết điều kiện kiểu Lipschitz cho song hàm f cũng không cần.

Thuật toán 2.2.3. *Chọn sai số $\epsilon \geq 0$ và các dãy số $\{\rho_k\}_{k\geq 0} \subset (0, \infty)$ và $\{\epsilon_k\}_{k\geq 0} \subset [0, \infty)$ thỏa mãn*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {\rho_k}^2 < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k\epsilon_k < +\infty.$$

Lấy $x^0 \in C$ và đặt $k = 0$.

Bước 1: *Lấy $g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x^k, x^k)$, tức là*

$$f(x^k, y) + \langle g^k, x^k - y\rangle \geq -\epsilon_k \ \forall y \in C \tag{2.8}$$

a) Nếu $g^k = 0$ và $\epsilon_k \leq \epsilon$ thì dừng: x^k là một ϵ-nghiệm.

b) Nếu $g^k = 0$ và $\epsilon_k > \epsilon$, quay trở lại Bước 1 và tăng $k \to k + 1$.

Bước 2: *Giải bài toán tối ưu lồi mạnh*

$$\min_{y \in C}\{\rho_k f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2\}$$

được nghiệm duy nhất x^{k+1}.

Nếu $x^{k+1} = x^k$ thì dừng: x^k là một nghiệm, trái lại thì trở lại Bước 1 và tăng $k \to k + 1$.

Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.3. *Giả sử f giả đơn điệu mạnh trên C với hệ số β, thỏa mãn các giả thiết (A1), (A2a). Xét dãy $\{x^k\}_{k\geq 0}$ sinh bởi Thuật toán 2.2.3. Khi đó*

(i) Nếu thuật toán dừng tại bước lặp k trong Bước 1 thì x^k là một ϵ-nghiệm.

(ii) Ta có đánh giá sau

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - 2\beta\rho_k)\|x^k - x^*\|^2 + \rho_k^2\|g^k\|^2 + 2\rho_k\epsilon_k \ \forall k, \tag{2.9}$$

ở đó x^* là nghiệm duy nhất của (EP). Hơn nữa, nếu $\{g^k\}$ bị chặn thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh đến x^*.

Chương 3

Thuật toán tách cho bài toán cân bằng

Trong chương này, chúng tôi trình bày một thuật toán mà ở đó song hàm cân bằng được tách thành tổng của hai hay nhiều song hàm khác, mỗi song hàm đó có thể có những tính chất riêng giúp cho việc tính toán tốt hơn hoặc có những tính chất không quá chặt như hàm ban đầu. Cụ thể, xét song hàm f có dạng

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

Bài toán này xuất hiện trong một số trường hợp quan trọng, ví dụ như trong phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, hiệu chỉnh điểm gần kề, hay trong bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp.

Các kết quả trong chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M. Duc, Le D. Muu, Le X. Thanh: Splitting subgradient algorithms for solving monotone equilibrium problems (đã gửi đăng)".

3.1. Thuật toán và sự hội tụ

Cho C là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Trong mục này ta xét song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ được phân tích thành tổng của hai song hàm $f_1, f_2 : C \times C \to \mathbb{R}$ như sau:

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) \ \forall x, y \in C.$$

Các giả thiết áp dụng cho song hàm f và $f_i, \ i = 1, 2$ như sau:

(B1) $f(.,y)$ là nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in C$; $f(x,.)$ là nửa liên tục dưới ở trên C với mỗi $x \in C$;

(B2) $f_i(x,x) = 0 \ \forall x \in C$;

(B3) $f_i(x,.)$ là các hàm lồi và khả dưới vi phân trên C với mỗi $x \in C$.

Với các giả thiết (B1)-(B3), tập nghiệm (SEP) của (EP) là một tập lồi đóng. Trong mục này ta giả thiết rằng (SEP) không rỗng.

Một thuật toán ergodic giải bài toán (EP) như sau:

Thuật toán 3.1.1. *Chọn dãy $\{\beta_k\}_{k\geq 0} \subset (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = +\infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty. \tag{3.1}$$

Lấy $x^0 \in C$ and $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$, lấy $g_1^k \in \partial_2 f_1(x^k, x^k), g_2^k \in \partial_2 f_2(x^k, x^k)$ rồi xác định

$$\begin{cases} \eta_k := \max\{\beta_k, \|g_1^k\|, \|g_2^k\|\}, \ \lambda_k = \dfrac{\beta_k}{\eta_k} \\ y^k = \arg\min\{\lambda_k f_1(x^k, y) + \dfrac{1}{2}\|y - x^k\|^2 | y \in C\} \\ x^{k+1} = \arg\min\{\lambda_k f_2(x^k, y) + \dfrac{1}{2}\|y - y^k\|^2 | y \in C\} \end{cases}$$

và đặt

$$z^k = \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i x^i}{\sum_{i=0}^k \lambda_i}, k = 0, 1, \ldots$$

Để chứng minh sự hội tụ của Thuật toán 3.1.1, chúng tôi cần thêm giả thiết sau:

(B4) Dãy $\{g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)\}$ bị chặn nếu dãy $\{x^k\}$ bị chặn.

Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu như sau.

Định lý 3.1.1. *Giả sử các điều kiện (B1)-(B4) được thỏa mãn, f là song hàm giả đơn điệu trên C và $f(.,y)$ lõm với mỗi $y \in C$. Ngoài ra, với mỗi $x \in C, f_i(x,.)$ $(i = 1,2)$ liên tục tại một điểm nào đó thuộc C hoặc $intC \neq \emptyset$. Khi đó dãy $\{z^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu về một nghiệm của (EP).*

Chứng minh. Tóm tắt chứng minh: ta sẽ chỉ ra rằng các điều kiện của Bổ đề 1.2.7 được thỏa mãn.

i. Với mỗi $x^* \in (SEP)$*, dãy* $\{\|x^k - x^*\|\}$ *hội tụ.*

ii. Mọi điểm tụ yếu của $\{z^k\}$ *đều thuộc vào* (SEP)*.* □

Trong Định lý 3.1.1, với song hàm f là giả đơn điệu, để đảm bảo cho sự hội tụ của dãy lặp $\{z^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1.1 thì cần hàm $f(.,y)$ là lõm trên C với mỗi $y \in C$. Các kết quả sau chỉ ra rằng tính lõm có thể bỏ nếu song hàm f là đơn điệu trên C. Hơn nữa, nếu song hàm f là giả đơn điệu mạnh thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán.

Định lý 3.1.2. *Với các giả thiết (B1)-(B4), song hàm* f *đơn điệu trên* C*, thì dãy* $\{z^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu đến một điểm* $x^* \in (SEP)$*.*

Định lý 3.1.3. *Với các giả thiết (B1)-(B4), song hàm* f *là giả đơn điệu mạnh với hệ số* $\beta > 0$ *trên* C *thì dãy* $\{x^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất* x^* *của* (EP)*.*

So sánh với Thuật toán 2.2.2 trong Chương 2, ta có thể thấy trong Thuật toán 3.1.1 cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, song hàm cân bằng không đòi hỏi phải thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (2.4), điều này giúp cho lớp bài toán có thể áp dụng Thuật toán 3.1.1 được mở rộng hơn nhiều so với Thuật toán 2.2.2.

Chú ý 3.1.1. *Trong [7] và [39], các tác giả cũng sử dụng thuật toán tách để giải bài toán cân bằng, tuy nhiên để đảm bảo sự hội tụ của thuật toán đó thì các song hàm* f_1, f_2 *phải có tính chất liên tục Hölder theo một trong hai biến, được phát biểu như sau:*

Một hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *được gọi là liên tục* τ*-Hölder theo biến thứ nhất (tương ứng, theo biến thứ hai) nếu tồn tại hằng số* $L > 0$ *và* $\tau \in (0, 1]$ *sao cho*

$$|f(x, y) - f(z, y)| \le L\|x - z\|^\tau \ \forall x, y, z \in C$$

$$(\textit{tương ứng, } |f(x, y) - f(x, z)| \le L\|y - z\|^\tau \ \forall x, y, z \in C).$$

Tính liên tục Hölder khiến lớp hàm có thể áp dụng cho bài toán bị thu hẹp. Một ví dụ về song hàm không liên tục Hölder như sau:

$$h(x, y) = e^y - e^x, \ \textit{với } x, y \in [0, +\infty).$$

Hàm h *không liên tục Hölder trên* $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ *vì với* $z = 0$ *thì không tồn tại các hằng số* $L > 0$ *và* $\tau \in (0, 1]$ *thỏa mãn các bất đẳng thức trong định nghĩa về tính liên tục*

Hölder trên. Khi đó, bài toán cân bằng hỗn hợp dạng

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle + h(x, y),$$

với $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *là ánh xạ đơn điệu và liên tục Lipschitz, sẽ không thỏa mãn điều kiện hội tụ của các thuật toán trong [7] và [39] khi áp dụng cho các song hàm* $f_1(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle, f_2(x, y) = h(x, y)$.

Tuy nhiên, chú ý rằng với mỗi $x \in [0, +\infty)$ *thì* $h(x, .)$ *là hàm lồi và đơn điệu trên* $[0, +\infty)$ *nên các song hàm đó đều thỏa mãn điều kiện của Định lý 3.1.2, đảm bảo sự hội tụ của dãy* $\{z^k\}$ *trong Thuật toán 3.1.1, và do đó có thể áp dụng thuật toán này để tính toán.*

3.2. Tính toán thử nghiệm

Ví dụ 1: Trong ví dụ này, chúng tôi áp dụng Thuật toán 3.1.1 tìm điểm cân bằng Nash trong mô hình độc quyền Cournot.

Ví dụ 2: Trong ví dụ này, chúng tôi so sánh hiệu năng của Thuật toán 3.1.1 với thuật toán đề xuất trong [9].

Chương 4

Thuật toán song song cho bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn

Như đã trình bày trong mục trước, một phương pháp để tìm nghiệm của bài toán cân bằng là thuật toán chiếu mà tại mỗi bước lặp ta giải bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\min\{\epsilon f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}.$$

Việc tìm nghiệm của bài toán trên sẽ dễ thực hiện khi tập ràng buộc C là một tập dạng hiển hoặc có cấu trúc đơn giản. Tuy nhiên, khi C là một tập dạng ẩn như tập nghiệm của một bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân hay bài toán cân bằng, tức là bài toán cân bằng hai cấp, thì việc tính toán trên sẽ không dễ, thậm chí là không tính được.

Trong chương này chúng tôi trình bày thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp mà ở đó bài toán cấp hai, tức tập ràng buộc của bài toán, là tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn. Một số trường hợp riêng được xét đến khi bài toán cấp hai là các bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng hay bài toán bao hàm thức. Ở đây, thay vì tính toán trên giao của các tập nghiệm đó, nói chung là khó tính, thì chúng tôi tách ra tính trên từng miền riêng rồi tổ hợp lại, giúp cho việc tính toán đơn giản hơn rất nhiều.

Bài toán chúng tôi xét trong chương này có dạng như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in S : f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in S, \qquad (BEF)$$

ở đó S là giao của các tập điểm bất động của các ánh xạ không giãn $T_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, (j = 1, ..., N)$ trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$, tức là,

$$S = \cap_{j=1}^{N} Fix(T_j),$$

và $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là một song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{H}$.

Trong chương này chúng tôi luôn giả thiết rằng tập S khác rỗng. Khi đó theo Bổ đề 1.2.4 ta có S là tập lồi, đóng.

Các kết quả cho bài toán trong chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M. Duc, Le D. Muu: A splitting algorithm for a class of bilevel equilibrium problems involving nonexpansive mappings, *Optimization*, Vol 65, pages 1855-1866, 2016".

4.1. Thuật toán và sự hội tụ

Trước hết ta cần một số giả thiết cho song hàm f để đảm bảo cho sự hội tụ của thuật toán giải (BEF) sau.

Giả thiết

(C1) $f(., y)$ nửa liên tục trên với mỗi $y \in \mathcal{H}$;

(C2) $f(x, .)$ lồi và khả dưới vi phân với mỗi $x \in \mathcal{H}$, $f(x^*, .)$ khả vi tại nghiệm x^* của bài toán;

(C3) f là song hàm đơn điệu mạnh với hệ số β trên $\mathcal{H}$;

(C4) Toán tử $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ xác định bởi $F(x) := \partial_2 f(x, x)$ liên tục Lipschitz với hệ số $L > 0$ trên $\mathcal{H}$.

Với các giả thiết (C1)-(C3), theo kết quả ở Chương 2, bài toán (BEF) luôn tồn tại duy nhất nghiệm.

Để đảm bảo cho các thuật toán trong chương này là xác định, trước hết ta cần kết quả bổ trợ sau. Cho $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là một ánh xạ đa trị và $C \subseteq \text{dom}F$. Với mỗi $x \in C$ và $g \in F(x)$, tính

$$y_g(x) := \arg\min\{\langle g, u - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|u - x\|^2 | u \in C\},$$

ở đó $\alpha > 0$. Ta có kết quả sau.

Bổ đề 4.1.1. *[8] Nếu F là toán tử đơn điệu mạnh với hệ số β và liên tục Lipschitz với hệ số L trên C, thì*

$$\|y_g(x) - y_{g'}(x')\|^2 \le (1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2})\|x - x'\|^2,$$

$\forall x, x' \in C,\ \forall g \in F(x),\ g' = P_{F(x')}g.$

Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết (C1)-(C4). Ta có một thuật toán giải bài toán cân bằng (BEF) như sau.

Thuật toán 4.1.1. *Chọn $\alpha > \dfrac{L^2}{2\beta}$, các trọng số $\mu_j > 0$ $(j = 1, ..., N)$ sao cho $\sum_{j=1}^N \mu_j = 1$, và một dãy $\{\lambda_k\}_{k\ge 0} \subset (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| < +\infty. \tag{4.1}$$

Lấy $x^0 \in \mathcal{H}, g^0 \in \partial_2 f(x^0, x^0)$ và đặt $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots,$ lấy $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ sao cho

$$\|g^k - g^{k-1}\| \le L\|x^k - x^{k-1}\|$$

và tính

$$\begin{cases} y^k := \arg\min\{\langle g^k, y - x^k\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x^k\|^2 | y \in \mathcal{H}\} = x^k - \frac{1}{\alpha} g^k \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)\sum_{j=1}^N \mu_j T_j(x^k). \end{cases}$$

Nhắc lại một giả thiết đã trình bày trong Chương 3, Mục 3.1:

(B4) Dãy $\{g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)\}$ bị chặn nếu dãy $\{x^k\}$ bị chặn.

Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu như sau.

Định lý 4.1.1. *Giả sử f là song hàm thỏa mãn các giả thiết (C1)-(C4) và (B4). Khi đó dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 4.1.1 hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của (BEF).*

Chứng minh. Tóm tắt chứng minh: đặt $T = \sum_{j=1}^N \mu_j T_j$. Theo Bổ đề 1.2.4, ta có $S = \text{Fix}T$. Chứng minh được chia thành ba bước.

Bước 1: Ta chứng minh rằng các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}, \{T(x^k)\}$ bị chặn.

Bước 2: Ta chứng minh mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x^k\}$ đều là một điểm bất động của T.

Bước 3: Ta chứng minh rằng $\|x^k - x^*\| \to 0$ khi $k \to \infty$. □

Chú ý 4.1.1. *Nếu T_j chỉ xác định trên các tập con $C_j, j = 1, \ldots, N$, ta có thể mở rộng ra toàn không gian bằng cách đặt $T_j(x) = T_j(P_{C_j}(x))$ nếu $x \neq C_j$, mà tập điểm bất động của nó không thay đổi.*

Chú ý 4.1.2. *Ví dụ sau cho thấy thuật toán trên hội tụ không tuyến tính.*

Xét với $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ và $f(x,y) = x(y-x), T(x) = x$. Ta có $f(x,y)$ là song hàm đơn điệu mạnh với hệ số $\beta = 1$ trên $\mathbb{R}$ và $\partial_2 f(x,x) = \{x\}$ thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với $L = 1$. Bài toán (BEF) có một nghiệm duy nhất $x^* = 0$.

Lấy dãy $\{\lambda_k\}_{k\geq 0} \subset (0,1)$ sao cho $\lambda_k \to 0$ khi $k \to \infty$ và $\alpha > 1$. Xuất phát từ một điểm tùy ý $x^0 \neq 0$. Theo thuật toán, ta có

$$y^k = x^k - \frac{1}{\alpha}x^k = (1 - \frac{1}{\alpha})x^k$$

$$x^{k+1} = \lambda_k y^k + (1-\lambda_k)Tx^k = (1 - \frac{1}{\alpha}\lambda_k)x^k,$$

kết hợp với giả thiết $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ và $x^k \neq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, suy ra $\{x^k\}$ hội tụ nhưng không tuyến tính đến nghiệm $x^* = 0$.

4.2. Một số trường hợp riêng

Trong mục này, ta xét một số trường hợp riêng của bài toán (BEF) mà ở đó tập ràng buộc là tập nghiệm chung của các bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược, tập nghiệm chung của các bài toán cân bằng đơn điệu hay tập không điểm của các ánh xạ đơn điệu cực đại và một áp dụng giải bài toán cực tiểu lồi mạnh.

1. Bài toán cân bằng với tập ràng buộc là tập nghiệm của các bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược.

Bài toán phát biểu như sau

$$\text{Tìm } x^* \in S \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in S, \qquad (BEVI)$$

ở đó S là tập nghiệm chung của các bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\text{Tìm } \bar{x} \in C_j \text{ sao cho } \langle F_j(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0 \ \forall y \in C_j,$$

với $C_j \subseteq \mathcal{H}$ là các tập lồi đóng và $F_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, j = 1, 2, \ldots, m$.

Bổ đề sau cho phép biểu diễn bài toán $(BEVI)$ dưới dạng của (BEF).

Bổ đề 4.2.1. *Giả sử các ánh xạ F_j là đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$ với hệ số $\eta_j > 0, j = 1, 2, \ldots, m$. Khi đó các ánh xạ $T_j, j = 1, 2, \ldots, m$, xác định bởi*

$$T_j(x) = P_{C_j}(x - \xi F_j(x)) \ \ \forall x \in \mathcal{H},$$

là ánh xạ không giãn trên $\mathcal{H}$ với mọi $0 < \xi \leq 2\eta_j$. Hơn nữa, tập điểm bất động của T_j trùng với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\textit{Tìm } x^* \in C_j : \langle F_j(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \ \forall y \in C_j. \qquad VI(C_j, F_j)$$

Đặt S là giao của các tập nghiệm của các bài toán $VI(C_j, F_j)$ $(j = 1, ..., m)$, bài toán $(BEVI)$ được đưa về dạng của (BEF). Khi đó, một thuật toán giải bài toán $(BEVI)$ suy ra từ Thuật toán 4.1.1 như sau:

Thuật toán 4.2.1. *Chọn $\mu_j > 0, \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, $\eta := \min\{\eta_j : j = 1, ..., m\}$, $\alpha > \dfrac{L^2}{2\beta}$, $0 < \xi \leq 2\eta$ và chọn dãy $\{\lambda_k\}_{k\geq 0} \subset (0, 1)$ sao cho*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| < +\infty.$$

Lấy $x^0 \in \mathcal{H}, g^0 \in \partial_2 f(x^0, x^0)$ và đặt $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$, lấy $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ sao cho

$$\|g^k - g^{k-1}\| \leq L\|x^k - x^{k-1}\|$$

và tính

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha} g^k \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)\Big[\sum_{j=1}^m \mu_j P_{C_j}(x^k - \xi F_j(x^k))\Big]. \end{cases}$$

2. Bài toán cân bằng với các ràng buộc cân bằng đơn điệu.

Trong trường hợp này ta xét bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in S : f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in S \tag{BEE}$$

với

$$S = \{x \in C_j : f_j(x, y) \geq 0 \ \forall y \in C_j (j = 1, ..., m)\},$$

ở đây f_j là các song hàm đơn điệu trên C_j với mọi $j = 1, .., m$.

Giả thiết cho song hàm $f_j, j = 1, 2, \ldots, m$, trong bài toán (BEE):

(D1) $f_j(x, x) = 0$ với mọi $x \in C_j$;

(D2) f_j đơn điệu trên C_j, tức là $f_j(x, y) + f_j(y, x) \leq 0$ với mọi $x, y \in C_j$;

(D3) $f_j(., y)$ nửa liên tục trên theo tia, tức là với mỗi $x, y, z \in C_j$

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} f_j(\lambda z + (1 - \lambda)x, y) \leq f_j(x, y);$$

(D4) Với mỗi $x \in C_j$, $f_j(x, .)$ là hàm lồi và nửa lên tục dưới trên C_j.

Bổ đề sau cho phép biểu diễn bài toán (BEE) dưới dạng của (BEF).

Bổ đề 4.2.2. *([27]) Cho $f_j : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các giả thiết (D1) - (D4). Với $r > 0$ và $x \in \mathcal{H}$, ta xác định ánh xạ $T^{f_j} : \mathcal{H} \longrightarrow C_j$ như sau:*

$$T^{f_j}(x) = \left\{ z \in C_j : f_j(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0 \ \ \forall y \in C_j \right\}$$

với mọi $x \in \mathcal{H}$. Khi đó:

(i) T^{f_j} xác định và đơn trị trên $\mathcal{H}$;

(ii) T^{f_j} là ánh xạ đơn điệu mạnh ngược với hệ số là 1, tức là, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\|T^{f_j}(x) - T^{f_j}(y)\|^2 \leq \langle T^{f_j}(x) - T^{f_j}(y), x - y\rangle;$$

(iii) Tập điểm bất động của T^{f_j} trùng với tập nghiệm của bài toán cân bằng

$$\textit{Tìm } x^* \in C_j \textit{ sao cho } f_j(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in C_j.$$

Áp dụng bổ đề trên, ta đưa bài toán (BEE) về dạng (BEF) và Thuật toán 4.1.1 cho trường hợp này có dạng như sau:

Thuật toán 4.2.2. *Chọn* $\mu_j > 0, \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, *lấy* $\alpha > \dfrac{L^2}{2\beta}$ *và dãy* $\{\lambda_k\}_{k\geq 0} \subset (0,1)$ *sao cho*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty\ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| < +\infty.$$

Lấy $x^0 \in \mathcal{H}, g^0 \in \partial_2 f(x^0, x^0)$ *và đặt* $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots,$ *lấy* $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ *sao cho*

$$\|g^k - g^{k-1}\| \leq L\|x^k - x^{k-1}\|$$

và tính

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha} g^k \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1-\lambda_k)\Big[\sum_{j=1}^m \mu_j T^{f_j}(x^k)\Big]. \end{cases}$$

Sự hội tụ mạnh của các dãy $\{x^k\}$ trong các Thuật toán 4.2.1 và Thuật toán 4.2.2 được suy ra từ Định lý 4.1.1. Điều đáng nói đến ở đây là trong Thuật toán 4.2.1 chỉ cần tính hình chiếu của một điểm trên từng C_j thay vì tính trên tập giao của chúng. Tương tự trong Thuật toán 4.2.2 ta chỉ tính giá trị của các ánh xạ gần kề T^{f_j}.

3. Bài toán cân bằng với ràng buộc bao hàm thức đơn điệu cực đại.

Cho $F_j : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}, j = 1, ..., m$ là các toán tử đơn điệu cực đại. Giả sử dom$F_j = C_j \neq \emptyset$. Do F_j đơn điệu cực đại, nên C_j là lồi đóng. Xét bài toán cân bằng với ràng buộc hệ bao hàm thức đơn điệu cực đại sau:

$$\text{Tìm } x^* \in S : f(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in S, \tag{BEI}$$

ở đó S là tập nghiệm của hệ $0 \in F_j(x), j = 1, ...m$. Giả thiết rằng S không rỗng. Ta xác định toán tử giải

$$T_j(x) := (I + F_j)^{-1}(x),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Một kết quả quen thuộc trong [79] cho ta T_j là các toán tử đơn trị, không giãn trên toàn không gian và tập nghiệm của bao hàm thức $0 \in F_j(x)$ trùng với tập điểm bất động của T_j. Do đó bài toán (BEI) có thể đưa về dạng của bài toán (BEF). Áp dụng Thuật toán 4.1.1 cho bài toán (BEI), ta được dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm của bài toán (BEI), mà ở đó, trong mỗi bước lặp, ta chỉ tính giá trị của từng toán tử giải T_j rồi tổ hợp lại.

Chú ý rằng, trong thuật toán điểm gần kề của Rockafellar giải bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại trên không gian Hilbert [79], dãy lặp chỉ hội tụ yếu. Ở đây, nhờ cách tiếp cận hai cấp, ta thu được một dãy lặp hội tụ mạnh đến nghiệm chung của bài toán nói trên.

4. Áp dụng giải bài toán cực tiểu của một hàm lồi mạnh.

Xét bài toán:

$$\min\{\varphi(x) : x \in C := \cap_{j=1}^m C_j\}, \tag{MP}$$

ở đó $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi mạnh khả vi với $\nabla\varphi$ liên tục Lipschitz hệ số $L > 0$ trên $\mathcal{H}$, các tập C_j $(j = 1, ..., m)$ lồi đóng. Có thể thấy bài toán (MP) đưa được về bài toán (BEF) bằng cách đặt

$$f(x, y) := \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle, \; T_j(x) := P_{C_j}(x), \; j = 1, ..., m.$$

Do φ là hàm lồi mạnh nên f là song hàm đơn điệu mạnh. Vì vậy Thuật toán 4.1.1 có thể áp dụng để giải bài toán quy hoạch (MP), mà ở đó mỗi phép chiếu trên mỗi tập lồi đóng C_j được tính song song riêng biệt. Tức là, xuất phát từ một phần tử $x^0 \in \mathcal{H}$, Thuật toán 4.1.1 trở thành

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha}\nabla\varphi(x^k) \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)\sum_{j=1}^m \mu_j P_{C_j}(x^k), \end{cases}$$

ở đó μ_j, λ_k và α được chọn như trong Thuật toán 4.1.1.

Áp dụng thuật toán trên để giải bài toán LASSO [88] sau:

$$\min \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 \quad \text{với } \|x\|_1 \le t,$$

ở đó $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}_+$ cho trước. Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle \\ &= \langle A^T(Ax - b), y - x\rangle. \end{aligned}$$

và $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \le t\}, T(x) = P_C(x)$.

Khi đó, tại mỗi bước lặp của Thuật toán 4.1.1 cho bài toán LASSO, ta tính:

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha}A^T(Ax^k - b) \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)P_C(x^k). \end{cases}$$

Công trình liên quan đến luận án

[1.] Phung M. Duc, Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Solution-existence and algorithms with their convergence rate for strongly pseudomonotone equilibrium problems, *Pacific Journal of Optimization*, **Vol 12, No. 4** 833-845 (2016).

[2.] Phung M. Duc, Le D. Muu: A splitting algorithm for a class of bilevel equilibrium problems involving nonexpansive mappings, *Optimization*, **Vol 65** 1855-1866 (2016).

[3.] Phung M. Duc, Le D. Muu, Le X. Thanh: Splitting subgradient algorithms for solving monotone equilibrium problems (đã gửi đăng).

Các kết quả liên quan đến luận án đã được tác giả báo cáo tại:

1. Seminar của Phòng Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học;
2. Hội nghị nghiên cứu sinh hằng năm của Viện Toán học (10/2014, 10/2015, 10/2016);
3. Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì (4/2015, 4/2016, 4/2017);
4. Hội nghị Việt Nam-Hàn Quốc về một số chủ đề trong Toán học, Đà Nẵng (2/2017);
5. Hội nghị Quốc tế "Optimization Algorithms and some related problems", Viện Toán học (12/2017);
6. Hội thảo Quốc tế về Tính toán khoa học hiệu năng cao lần thứ 7, Hà Nội (3/2018);
7. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 9, Nha Trang (8/2018).

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Văn Hiền, Lê Dũng Mưu, Nguyễn Hữu Điển: Giáo trình Giải tích lồi ứng dụng, *Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội* (2015).

[2] Lê Dũng Mưu: Giáo trình các phương pháp tối ưu, *Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật* (1998).

[3] Hoàng Tụy: Hàm thực và Giải tích hàm, *Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ* (2003).

[4] Nguyễn Đông Yên: Giáo trình giải tích đa trị, *Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ* (2007).

Tiếng Anh

[5] Lam Q. Anh, Phan Q. Khanh: Uniqueness and Hölder continuity of the solution to multivalued equilibrium problems in metric spaces, *J. Glob. Optim.* **37(3)**, 449-465 (2007).

[6] Lam Q. Anh, Pan Q. Khanh, Dang T. M. Van: Well-posedness under relaxed semicontinuity for Bilevel Equilibrium and Optimization Problems with Equilibrium constraints, *J. Optim. Theory Appl.* **158(2)**, 42-59 (2012).

[7] Pham K. Anh and Trinh N. Hai: Splitting extragradient-like algorithms for strongly pseudomonotone equilibrium problems, *Numerical Algorithms* **76(1)**, 67-91 (2017).

[8] Pham N. Anh, Le D. Muu, Nguyen V. Hien, Strodiot J. J.: Using the Banach Contraction Principle to Implement the Proximal Point Method fo Multivalued Monotone Variational Inequalities, *J. Optim. Theory Appl.* **124**, 285-306 (2005).

[9] Pham N. Anh, Trinh N. Hai, Pham M. Tuan.: On ergodic algorithms for equilibrium problems, *J. Glob. Optim.* **64(1)** 179–195 (2016).

[10] Arrow K. J., Debreu G.: Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica* **22**, 265–290 (1954).

[11] Aubin J. P., Frankowska H.: Set-valued analysis, *Birkhauser, Boston* (1990).

[12] Bauschke H.H., Combettes P.H.: Convex Analysis and Monotone Operator in Hilbert Spaces, *Springer* (2010).

[13] Bello Cruz J.Y., Millán R.D.: A direct splitting method for nonsmooth variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl* **161**, 729-737 (2014).

[14] Biegler L. T.: Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes, *MOS-SIAM Series on Optimization*, Philadelphia (2010).

[15] Bigi G., Castellani M., Pappalardo M.: A new solution method for equilibrium problems, *Optimization Methods and Software* **24**, 895–911 (2009).

[16] Bigi G., Castellani M., Pappalardo M., Panssacantando M.: Existence and solution methods for equilibria, *European J. Oper. Res.* **227**, 1-11 (2013).

[17] Bigi G., Castellani M., Pappalardo M., Passacantando M.: Nonlinear Programming Techniques for Equilibria, Spinger (2018).

[18] Bianchi M., Schaible S.: Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.* **90**, 31-43 (1996).

[19] Bianchi M., Pini R.: Coercivity conditions for equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.* **124**, 79-92 (2005).

[20] Blum E., Oettli W.: From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student* **62**, 127-169 (1994).

[21] Brézis H., Nirenberg L., Stampacchia G.: A remark on Ky Fan's minimax principle, *Bollettino della Unione Matematica Italiana* **6**, 293-300 (1972).

[22] Nguyen Buong, Lam T. Duong: An Explicit Iterative Algorithm for a class of Variational Inequalities in Hilbert Spaces, *J. Optim. Theory Appl.* **151**, 513-524 (2011).

[23] Nguyen Buong, Nguyen T. Q. Anh: An Implicit Iteration Method for Variational Inequalities over the Set of Common Fixed Points for a Finite Family of Nonexpansive Mappings in Hilbet Spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, DOI:10.1155/2011/276859 (2011).

[24] Cencor Y., Elfving T.: A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space, *Numer. Algorithms* **8**, 221-239 (1994).

[25] Cencor Y., Segal A.: The split common fixed point problem for directed operators, *J. Convex Anal.* **16**, 587-600 (2009).

[26] Cencor Y., Gibali A., Reich S.: Algorithm for split variational inequality problems, *Numerical Algorithms* bf 59, 301-323 (2012).

[27] Combettes P. L., Hirstoaga S. A.: Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* **6**, 117-136 (2005).

[28] Cohen G.: Auxiliary Problem Principle and Decomposition of Optimization Problems, *J. Optim. Theory Appl.* **32**, 277-305 (1980).

[29] Cohen G.: Auxiliary Problem Principle extended to Variationnal Inequalities, *J. Optim. Theory Appl.* **59**, 325-333 (1988)

[30] Cournot A. A.: Recherche sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses, *Hachette, Paris* (1838).

[31] Dafermos S.: Traffic equilibrium and variational inequalities, *Transportation Science* **14**, 42–54 (1980).

[32] Dempe S., Kalashnikov V., Perez-Valdes G. A., Kalashnykova V.: Bilevel Programming Problem, Theory, Algoritms and Applications to Energy Networks, *Springer* (2015).

[33] Bui V. Dinh, Le D. Muu: On penalty and gap function methods for e quilibrium problems, *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2011, Article ID 646452, 14 pages, 2011. https://doi.org/10.1155/2011/646452.

[34] Bui V. Dinh, Le D. Muu: A projection algorithm for solving pseudomonotone equilibrium problems and it's application to a class of bilevel equilibria, *Optimization* **64**, 559-575 (2015).

[35] Bui V. Dinh: An algorithm for variational inequalities with equilibrium and fixed point constraints, *Cogent Mathematics* **2**, 2015.

[36] Facchinei F., Pang J.S.: Finite - Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, *Springer, New York* (2003).

[37] Farouq N. E.: Pseudomonotone variational inequalities: convergence of proximal methods, *J. Optim. Theory Appl.* **109**, 311-326 (2001).

[38] Ferris M. C., Pang J. S.: Engineering and economic applications of complementarity problems, *SIAM Review* **39**, 669–713 (1997).

[39] Trinh N. Hai, Nguyen T. Vinh: Two new splitting algorithms for equilibrium problems, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **111(4)**, 1051-1069 (2017).

[40] He Z.: The split equilibrium problems and its convergence algorithms. *J. Inequal. Appl.* **162**, (2012).

[41] Nguyen V. Hien: Lecture Notes on Equilibrium Problems, Nha Trang: CIUF-CUD Summer School on Optimization and Applied Mathematics (2002).

[42] Pham G. Hung, Le D. Muu: The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions. *Nonlinear Anal. TMA.* **74**, 6121-6129 (2011).

[43] Ioffe A. D., Tihomirov V. M.: Theory of Extremal Problems, *North-Holland, Amsterdam* (1979).

[44] Iusem A. N., Sosa W.: Iterative algorithms for equilibrium problems, *Optimization* **52**, 301-316 (2003).

[45] Iusem A.N., Sosa W.: On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces, *Optimization* **8**, 1259-1274 (2010).

[46] Karamardian, S., Schaible, S.: Seven kinds of monotone maps, *J. Optim. Theory Appl.* **66**, 37–46 (1990).

[47] Kato T.: Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**, 548–550 (1964).

[48] Pham D. Khanh, Phan T. Vuong: Modified projection method for strongly pseudomonotone variational inequalities, *J Glob Optim* **58**, 341-350 (2014).

[49] Knaster B., Kuratowski C., Mazurkiewicz S.: Ein Beweies des Fixpunktsatzes für N Dimensionale Simplexe, *Fundamenta Mathematicae* **14**, 132-137 (1929).

[50] Konnov I. V., Schaible S.: Duality for Equilibrium Problems under Generalized Monotonicity, *J. Opti. Theory and Appl.* **104**, 395-408 (2000).

[51] Konnov I.V.: Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **495**, *Springer, Verlag* (2001).

[52] Konnov I. V.: Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.* **119**, 317–333 (2003).

[53] Konnov I. V.: Regularization methods for nonmonotone equilibrium problems, *J. Nonlinear Convex Anal.* **10**, 93–101 (2009).

[54] Korpelevich G.M.: Extragradient method for finding saddle points and other problems, *Matecon* **12**, 747–756 (1976).

[55] Ky Fan: A minimax inequality and applications. In: Shisha O. (Ed.): Inequalities, *Academic Press, New York*, 103-113 (1972).

[56] Iiduka H., Yamada I.: A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its application, *Optimization* **58**, 251-261 (2009).

[57] Lorenzo D., Passacantando M., Sciandrone M.: A convergent inexact solution method for equilibrium problems, *Optim. Meth. Software*, DOI: 10. 1080/10556788.2013.796376 (2013).

[58] Mastroeni G.: On auxiliary principle for equilibrium problems, *Technical Report of the Department of Mathematics of Pisa Univercity, Italy* **3**, 1244-1258 (2000).

[59] Mastroeni G.: Gap function for Equilibrium Problems, *J. Glob. Optim.* **27**, 411-426 (2003).

[60] Moudafi A.: Proximal point methods extend to equilibrium problems, *Journal of Natural Geometry* **15**, 91-100 (1999).

[61] Moudafi A., Théra M.: Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems, in M. Thera, R. Tichatschke: Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques, *Spinger, Berlin* (1999).

[62] Moudafi M.: On the convergence of splitting proximal methods for equilibrium problems in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **359**, 508-513 (2009).

[63] Moudafi M.: Proximal methods for a class of bilevel monotone equilibrium problems, *J. Glob. Optim.* **47**, 287–292 (2010).

[64] Le D. Muu, Oettli W.: Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria, *Nonlinear Anal.: TMA* **18**, 1159-1166 (1992).

[65] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Methods for finding global optimal solutions to linear programs with equilibrium constraints, Dedicated to Pham Huu Sach on the occasion of his sixtieth birthday, *Acta Math. Vietnam.* **26**, 333 - 347 (2001).

[66] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: On penalty function method for a class of nonconvex constrained optimization problems. *Vietnam J. Math.* **29**, 235 - 256 (2001).

[67] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Methods for finding global optimal solutions to linear programs with equilibrium constraints, *Vietnam J. Math.* **30**, 189 - 194 (2002).

[68] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: A global optimiztion method for solving convex quadratic bilevel programming problems, *J. Glob. Optim.* **26**, 199-219 (2003).

[69] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: On branch-and-bound algorithms for global optimal solutions to mathematical program with afine equilibrium constraints, *Vietnam J. Math.* **35**, 523-539 (2007).

[70] Le D. Muu, Nguyen V. Hien., Nguyen V. Quy: On Nash-Counort oligopolistic market equilibrium models with concave cost functions, *J. Glob. Optim.* **41**, 351-364 (2008).

[71] Le D. Muu, Tran D. Quoc: Regularization algorithms for solving monotone Ky Fan inequalities with application to a Nash-Cournot equilibrium model, *J. Optim. Theory Appl.* **142**, 185-204 (2009).

[72] Nash J. F.: Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* **36**, 48–49 (1950).

[73] Nash J. F.: Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* **54**, 286–295 (1951).

[74] Nikaido H., Isoda K.: Note on noncooperative convex games, *Pacific J. of Mathematics* **5**, 807-815(1955).

[75] Passty G. B.: Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.* **72**, 383-390 (1979).

[76] Tran D. Quoc, Le D. Muu, Nguyen V. Hien: Extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *Optimization* **57**, 749-776 (2008).

[77] Tran D. Quoc, Pham N. Anh, Le D. Muu: Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *J. Glob. Optim.* **52**, 139-159 (2012).

[78] Nguyen. V. Quy: An algorithm for a bilivel problem with equilibrium and fixxed point constraints, *Optimization* **64**, 2359-2376 (2015).

[79] Rockafellar R. T.: Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAMJ. Control Optim.* **5**, 877-898 (1976).

[80] Rockafellar R. T.: Convex Analysis, *Princeton University Press, Princeton,. N.J.* (1970).

[81] Rockafellar R. T., Wets R.: Variational Analysis, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschafte, Springer* **317** (1998) (3rd printing 2009).

[82] Santos P., Scheimberg S.: An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems, *Comput. Appl. Math.* **30**, 91-107 (2011).

[83] Stampacchia G.: Variational Inequatlities, Congrès international des mathématiciens, Sep 1970, Nice, France. 2, pp.877-883, Actes du Congrès international des mathematiciens.

[84] Eckstein J., Svaiter A. F.: General projective splitting methods for sums of maximal monotone operators, *SIAM Control Optim* **48**, 787–811 (2009).

[85] Nguyen N. Tam, Yao J. C., Nguyen D. Yen: Solution methods for pseudomonotone Variational Inequalities, *J. Opti. Theory and Appl.* **138**, 253-273 (2008).

[86] Tan K. K., Xu H. K.: Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, *J. Math. Anal. Appl.* **178**, 301-308 (1993).

[87] Nguyen X. Tan, Phan N. Tinh: On the existence of equilibrium points of vector functions, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **19**, 141-156 (1998).

[88] Tibshirani, R.: Regression Shrinkage and Selection via the Lasso, *J. R. Statist. Soc. B* **58**, 267-288 (1996).

[89] Tseng P.: A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings, *SIAM Control Optim.* **38**, 431-446 (2000).

[90] Hoang Tuy: Convex Analysis and Global Optimization, *Kluwer, Dordrecht* (1998).

[91] Phan T. Vuong, Strodiot J.-J., Nguyen V. Hien: Extragradient methods and linesearch algorithms for solving Ky Fan inequalites and fixed point problems, *J. Optim. Theory Appl.* **155**, 605-627 (2012).

[92] Phan T. Vuong, Strodiot J.-J., Nguyen V.Hien: On Extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space, *Optimization*, DOI:10.1080/02331934.2012.759327 (2013).

[93] Xu H. K.: Iterative algorithms for nonlinear operators, *J. London Math. Soc.* **66**, 240-256 (2002).

[94] Yamada, I.: The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings. In: Butnariu, D., Censor, Y., Reich, S., (eds.) *Inherently Parallel Algorithm for Feasibility and Optimization and Their Applications*, Elsevier, pp. 473–504 (2001).

[95] Le H. Yen, Le D. Muu, Nguyen T. T. Huyen: An Algorithm for a class of split feasibility problems: application to a model in electricity production, *Math. Meth. Oper. Res.* **84**, 549-565 (2016).

[96] Zhang H., Cheng L.: Projective splitting methods for sums of maximal monotone operators with applications. *J. Math. Anal. Appl.* **406**, 321-334 (2013).