Tóm tắt

Luận án này dành nghiên cứu một số bài toán cân bằng đơn điệu. Luận án gồm bốn chương chính.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản về giải tích lồi trong không gian Hilbert và một số kết quả bổ trợ để dùng chứng minh sự tồn tại nghiệm và sự hội tụ của các thuật toán trong những chương sau.

Chương 2 trình bày một kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh và ba thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh với đánh giá về tốc độ hội tụ của từng thuật toán qua những ví dụ cụ thể.

Chương 3 trình bày một thuật toán giải bài toán cân bằng mà ở đó song hàm cân bằng của bài toán được phân tích thành tổng của hai hàm khác. Phần này có trình bày một ví dụ chạy số tìm điểm cân bằng Nash trong mô hình độc quyền Cournot để minh họa cho thuật toán và một ví dụ so sánh hiệu năng của thuật toán đề xuất với thuật toán đã có trước đó.

Chương 4 trình bày một thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp với bài toán cấp dưới là tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn. Cùng với đó là ba trường hợp riêng được xét khi các bài toán cấp dưới là bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược, bài toán cân bằng đơn điệu và bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại. Phần cuối là một ví dụ số áp dụng giải bài toán Lasso.

Abstract

This thesis study the existence and algorithms for some classes of monotone equilibrium problems. The thesis consists of four chapters.

In Chapter 1, we recaal some basic concept of convex analysis in Hilbert space and some results that will be used to prove the solution-existence and the convergence of algorithms for equilibrium in next chapters.

In Chapter 2, we show a solution-existence result and three algorithms with their convergence rate for strongly pseudomonotone equilibrium problems.

In Chaoter 3, we propose a splitting algorithm for equilibrium problems where the bifunction is the sum of two ones. We then apply the proposed algorithm to solve a differentiated jointly constrained Cournot-Nash equilibrium model and premilinary computational result for comparison the proposed algorithm with the other ones.

In Chapter 4, we propose an algorithm for solving strongly monotone equilibrium problems over the common fixed point set of nonexpansive mappings. We apply the proposed algorithm to equilibrium problems with co-coercive variational inequalities and monotone equilibrium constraints as well as maximal monotone inclusions. Some preliminary computational results for Lasso problem are reported.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, các kết quả nghiên cứu viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nghiên cứu trình bày trong luận án là trung thực, khách quan và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Phùng Minh Đức

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đến GS.TSKH Lê Dũng Mưu và PGS.TS Nguyễn Văn Quý, những người thầy đã nghiêm túc, tận tình hướng dẫn, dạy bảo cho tác giả những kinh nghiệm trong học tập, nghiên cứu khoa học và sáng tạo, giúp tác giả hoàn thành tốt luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn TS Lê Xuân Thanh và TS Vũ Tiến Dũng đã giúp tác giả thực hiện các chương trình chạy ví dụ số minh họa trong luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau Đại học cùng toàn thể cán bộ, công nhân viên Viện Toán học tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh ở đây.

Tác giả xin chân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, các Phòng Ban, Đoàn thể cùng các thầy cô giáo của Trường Cao đẳng Kỹ thuật Trang thiết bị Y tế đã tạo điều kiện giúp đỡ, động viên tác giả trong quá trình làm nghiên cứu sinh và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn bạn bè và những người thân trong gia đình, đặc biệt là cha mẹ và vợ, đã động viên, giúp đỡ và đồng hành cùng tác giả trong suốt thời gian làm nghiên cứu sinh cũng như thực hiện luận án này.

Nghiên cứu sinh

Phùng Minh Đức

Mục lục

Danh mục các ký hiệu

$\mathcal{H}$	Không gian Hilbert.
$\mathbb{R}$	tập số thực.
$\mathbb{N}$	tập số tự nhiên.
$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng trong $\mathcal{H}$.
$\|.\|$	chuẩn trong $\mathcal{H}$.
$d(.,.)$	khoảng cách giữa hai phần tử trong $\mathcal{H}$.
2^C	họ tất cả các tập con của tập C.
$d_C(.)$	khoảng cách từ một điểm đến một tập C trong $\mathcal{H}$.
P_C	ánh xạ chiếu lên một tập hợp C.
$N_C(x)$	nón pháp tuyến của C tại x.
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x.
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x.
$\mathrm{dom} f$	miền hữu hiệu của hàm f.
$f(C)$	tập giá trị của hàm f trên tập C.
$\mathrm{gra} f$	đồ thị của hàm f.
$\mathrm{epi} f$	trên đồ thị của hàm f.
$\mathrm{lev}_{\leq \xi} f$	tập mức dưới của f tại ξ.

$\underline{\lim} a_k$	giới hạn dưới của dãy $\{a_k\}$.
$\overline{\lim} a_k$	giới hạn trên của dãy $\{a_k\}$.
$f'(x;y)$	đạo hàm của f tại x theo hướng y.
$\nabla f(x)$	đạo hàm Fréchet của f tại x.
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại x.
$\partial^\epsilon f(x)$	ϵ-dưới vi phân của f tại x.
$\partial_2 f(x,x)$	dưới vi phân đường chéo của f tại x.
$\partial_2^\epsilon f(x,x)$	ϵ-dưới vi phân đường chéo của f tại x.
ι_C	hàm chỉ của tập C.
$\mathrm{dom} F$	miền xác định của ánh xạ đa trị F.
$\mathrm{gra} F$	đồ thị của ánh xạ đa trị F.
$d_H(A,B)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A và B.
$\min_{\mathcal{H}} f$	giá trị cực tiểu của hàm f trên toàn không gian.
$\arg\min_{\mathcal{H}} f$	tập các điểm cực tiểu của hàm f trên toàn không gian.
$\min_C f$	giá trị cực tiểu của hàm f trên tập C
$\arg\min_C f$	tập các điểm cực tiểu của hàm f trên tập C.
$\mathrm{Fix} T$	tập điểm bất động của ánh xạ T.
$\square$	kết thúc chứng minh.

Mở đầu

I. Lý do chọn đề tài

Thuật ngữ "cân bằng" đã từ lâu được sử dụng rộng rãi trong các ngành khoa học như vật lý, hóa học, sinh học, kỹ thuật, kinh tế ..., dưới nhiều hình thức khác nhau, tùy thuộc vào các mô hình toán học khác nhau. Đó có thể là trong các cấu trúc vật lý hay cấu trúc cơ học [38], trong các quá trình phản ứng hóa học [14], trong sự điều tiết giao thông bởi hệ thông máy tính và mạng truyền thông [31], trong nhiều bài toán kinh tế như bài toán về sự canh tranh [30], mô hình kinh doanh bán độc quyền Nash-Cournot [50], bài toán cung cầu [10] hay mô hình trò chơi không hợp tác của Nash [72, 73].

Trong khuôn khổ của luận án này, bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C, \qquad (EP)$$

trong đó C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$, được gọi là song hàm cân bằng. Tập nghiệm của bài toán (EP) được ký hiệu là (SEP).

Bất đẳng thức trên lần đầu được dùng bởi Nikaido và Isoda cho bài toán trò chơi bất hợp tác năm 1955 [74]. Năm 1972, Ky Fan [55] gọi bài toán (EP) là bất đẳng thức minimax và thiết lập một kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán này cho trường hợp tập ràng buộc C là lồi com-pắc. Ngay trong năm đó, Brézis H., Nirenberg L. và Stampacchia G. [21] đã mở rộng kết quả của Ky Fan cho trường hợp tập ràng buộc C chỉ là lồi đóng. Thuật ngữ "Bài toán cân bằng" được sử dụng lần đầu tiên trong bài báo của Le D. Muu và Oettli W. năm 1992 [64]. Trong bài báo này cùng với bài sau đó của Blum E. và Oettli W. năm 1994 [20], các tác giả đã trình bày những kết quả về mối liên quan giữa bài toán cân bằng với một số bài toán khác như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm yên ngựa, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash ... Dưới đây là một số trường hợp riêng quan trọng của bài toán cân bằng (EP).

Bài toán tối ưu: (OP) Tìm $x^* \in C$ làm cực tiểu hàm $\phi : C \to \mathbb{R}$. Bằng cách đặt

$$f(x, y) = \phi(y) - \phi(x),$$

khi đó x^* là nghiệm của (OP) khi và chỉ khi nó là nghiệm của (EP).

Bài toán bất đẳng thức biến phân: Cho ánh xạ $F : C \to \mathcal{H}$. Bài toán bất đẳng thức biến phân được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \qquad (VIP)$$

Bằng cách đặt

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle,$$

thì (VIP) tương đương với (EP) theo nghĩa tập nghiệm của hai bài toán này là trùng nhau.

Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị: Cho $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$ là một ánh xạ đa trị, với $F(x)$ com-pắc, lồi và khác rỗng với mọi $x \in C$. Khi đó bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C, u^* \in F(x^*) \text{ sao cho } \langle u^*, y - x^* \rangle \geq 0,\ \forall y \in C, \quad (MVIP)$$

tương đương với bài toán (EP) mà ở đó

$$f(x, y) = \max\{\langle u, y - x\rangle | u \in F(x)\}.$$

Chú ý rằng bài toán cân bằng, với điều kiện là $f(x, .)$ lồi, khả dưới vi phân trên C với mỗi $x \in C$, thì có thể chuyển bài toán cân bằng về bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị của ánh xạ cho bởi $F(x) = \partial_2 f(x, x)$. Tuy nhiên một hàm lồi có thể không khả dưới vi phân ngay tại những điểm thuộc miền hữu hiệu của nó, và khi đó việc đưa bài toán cân bằng về bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị có tương đương nữa hay không vẫn còn là câu hỏi mở.

Bài toán điểm yên ngựa: Cho $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ là hai không gian Hilbert, $C_1 \subset \mathcal{H}_1, C_2 \subset \mathcal{H}_2$ là các tập đóng. Một điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in C_1 \times C_2$ được gọi là điểm yên ngựa của hàm $L : C_1 \times C_2 \to \mathbb{R}$ nếu nó thỏa mãn

$$L(x_1^*, y_2) \leq L(x_1^*, x_2^*) \leq L(y_1, x_2^*),\ \forall y = (y_1, y_2) \in C_1 \times C_2.$$

Bài toán điểm yên ngựa tương đương với bài toán (EP) trên tập $C = C_1 \times C_2$ và song hàm

$$f(x, y) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = L(y_1, x_2) - L(x_1, y_2).$$

Bài toán điểm bất động: Cho $F : C \to 2^C$ là một ánh xạ đa trị. Một điểm $x^* \in C$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ F nếu $x^* \in F(x^*)$.

Việc tìm điểm bất động của ánh xạ F tương đương với giải bài toán (EP) với song hàm f cho bởi

$$f(x,y) = \max\{\langle x-u, y-x\rangle | u \in F(x)\}.$$

Khi F là ánh xạ đơn trị thì điểm $x^* \in C$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ F, nếu $x^* = F(x^*)$. Trong trường hợp này, việc tìm điểm bất động của F tương đương với giải bài toán cân bằng (EP) với song hàm

$$f(x,y) = \langle x - F(x), y - x\rangle.$$

Bài toán cân bằng Nash: Có N người chơi một trò chơi. Giả sử người chơi thứ i có tập chiến lược $C_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, ở đó $n_i \in \mathbb{N}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$. Với mỗi chiến lược cho trước của những người chơi khác, mục tiêu của người chơi thứ i là tìm một chiến lược $x_i \in C_i$ làm cực tiểu hàm thua thiệt $f_i : C \to \mathbb{R}$ của mình. Với $x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in C = C_1 \times \ldots \times C_N$, ký hiệu $y[x_i] = (y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_N)$. Một điểm cân bằng Nash $x^* \in C$ là điểm sao cho

$$f_i(x^*) \leq f_i(x^*[x_i])$$

đúng với mọi $x_i \in C_i$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$.

Việc tìm điểm cân bằng Nash có thể đưa về tìm nghiệm của bài toán (EP) với song hàm Nikaido-Isoda [74]

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} [f_i(x[y_i]) - f_i(x)].$$

Ngoài ra, một số bài toán thực tế có thể đưa về mô hình bài toán cân bằng có thể xem trong tài liệu [17].

Trong khoảng hai thập kỉ gần đây, bài toán cân bằng (EP) đã thu hút được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học, cả về phương diện lý thuyết lẫn thuật toán. Về phương diện lý thuyết, đã có khá nhiều bài viết của các tác giả nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, tính ổn định, sự mở rộng ... của bài toán cân bằng (EP). Một kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán (EP) thường được nhắc đến và sử dụng xuất phát từ bài toán bất đẳng thức minimax của Ky Fan [55], ở đó bài toán cân bằng (EP) có nghiệm nếu C là một tập lồi, com-pắc trong không gian véc-tơ tô-pô Hausdorff X, song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(., y)$ là nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in C$ và $f(x, .)$ là tựa lồi trên C với mỗi $x \in C$.

Trường hợp C chỉ là tập lồi đóng, kết quả của các tác giả Brézis H., Nirenberg L. và Stampacchia G. trong [21] chỉ ra rằng nếu f thỏa mãn thêm điều kiện bức: tồn tại tập com-pắc B và $y_0 \in C \cap B$ sao cho

$$f(x, y_0) < 0 \text{ với } x \in C \setminus B,$$

thì bài toán (EP) có nghiệm.

Rõ ràng nếu có $y \in C$ sao cho $f(x, y) \to -\infty$ khi $\|x\| \to \infty$ với $x \in C$ thì điều kiện bức trên được đảm bảo. Một trường hợp riêng khi f đơn điệu mạnh trên C thì điều kiện bức thỏa mãn, do đó trường hợp này bài toán (EP) luôn có nghiệm, hơn nữa nghiệm đó là duy nhất [33].

Với song hàm cân bằng f là đơn điệu hay nhẹ hơn nữa là giả đơn điệu, nếu thêm điều kiện $f(x, .)$ là nửa liên tục dưới trên C với mỗi $x \in C$ và song hàm f thỏa mãn điều kiện bức sau:

$$\exists r > 0 \text{ sao cho } \forall x \in C \text{ mà } \|x\| \geq r, \exists y \in C, \|y\| \leq r : \; f(x, y) < 0,$$

thì bài toán (EP) có nghiệm, hơn nữa tập nghiệm (SEP) bị chặn [19].

Cũng trong [19], các tác giả còn đưa ra một điều kiện bức nhẹ hơn nữa mà vẫn đảm bảo cho bài toán (EP) có nghiệm như sau:

$$\exists r > 0 \text{ sao cho } \forall x \in C \text{ mà } \|x\| \geq r, \exists y \in C, \|y\| \leq \|x\| : f(x, y) < 0.$$

Tuy nhiên, trong trường hợp này ta không có khẳng định gì về tính bị chặn của tập nghiệm (SEP).

Như vậy, có thể thấy, về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng khi song hàm có các tính chất đơn điệu, như trường hợp song hàm là đơn điệu mạnh, với một số giả thiết cơ bản, thì tính bức luôn được thỏa mãn, do đó bài toán có nghiệm và nghiệm là duy nhất. Còn với song hàm đơn điệu hay giả đơn điệu, nếu các điều kiện bức được thỏa mãn thì bài toán cân bằng có nghiệm. Chú ý rằng song hàm giả đơn điệu mạnh cũng là giả đơn điệu, nên nếu nó thỏa mãn điều kiện bức thì bài toán có nghiệm. Câu hỏi đặt ra là liệu rằng song hàm giả đơn điệu mạnh có luôn thỏa mãn tính bức hay không? Đây là một vấn đề được nghiên cứu trong luận án.

Cùng với những nghiên cứu về mặt định tính, các nhà toán học cũng dành sự quan tâm rất nhiều cho việc tìm các thuật toán giải bài toán cân bằng (EP). Các thuật toán được biết hiện nay cơ bản dựa trên các kỹ thuật tìm nghiệm của bài toán tối ưu như thuật toán chiếu, thuật toán chiếu tăng cường, phương pháp hàm đánh giá (hàm gap), hàm phạt, phương pháp hướng giảm, hoặc các kỹ thuật hiệu chỉnh như phương pháp điểm gần kề hay hiệu chỉnh Tikhonov.

Một hướng tiếp cận cơ bản để giải bài toán cân bằng được dựa trên kết quả: x^* là một nghiệm của bài toán cân bằng (EP) khi và chỉ khi nó là một nghiệm của bài toán tối ưu

$$\min\{f(x^*, y) : y \in C\},$$

hay chính là một điểm bất động của ánh xạ đa trị

$$\phi(x) = \arg\min\{f(x, y) : y \in C\}.$$

Kết quả này gợi ý một phương pháp giải bằng cách, từ một điểm xuất phát $x^0 \in C$ bất kỳ, ta xây dựng dãy lặp mà ở bước thứ k, x^{k+1} là nghiệm của bài toán tối ưu

$$\min\{f(x^k, y) : y \in C\}.$$

Tuy nhiên, bài toán trên, trừ trường hợp C bị chặn, nói chung chưa chắc ánh xạ ϕ đã được xác định, và trong trường hợp nó được xác định thì chưa chắc là duy nhất.

Để khắc phục điều này, người ta đã sử dụng một hàm hiệu chỉnh $H : C \times C \to \mathbb{R}$ không âm, khả vi và lồi mạnh với hệ số $\mu > 0$ theo biến thứ hai trên C (ví dụ $H(x, y) = \dfrac{1}{2}\|y - x\|^2$ lồi mạnh với hệ số $\mu = 1$), có thể chứng minh rằng x^* là nghiệm của bài toán (EP) khi và chỉ khi nó là nghiệm của bài toán

$$\min\{\rho f(x^*, y) + H(x^*, y) : y \in C\}$$

với $\rho > 0$ [58]. Phương pháp này chính là nguyên lý bài toán phụ được Cohen G. đề xuất cho bài toán tối ưu năm 1980 [28] và sau đó mở rộng cho bài toán bất đẳng thức biến phân năm 1988 [29].

Với $f(x, .)$ là hàm lồi trên C, ta có $f_\rho(x, .) = \rho f(x, .) + H(x, .)$ là hàm lồi mạnh, nên bài toán trên luôn có điểm cực tiểu duy nhất trên C. Khi đó tại bước thứ k, điểm lặp

$$x^{k+1} = \arg\min\{\rho f(x^k, y) + H(x^k, y) : y \in C\}$$

luôn được xác định và là duy nhất. Dãy $\{x^k\}$ sẽ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bài toán khi f là song hàm đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz sau: tồn tại $L_1, L_2 > 0$ sao cho

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - L_1\|x - y\|^2 - L_2\|y - z\|^2, \quad \forall x, y, z \in C,$$

với $L_1 < \beta$ và $\rho < \dfrac{\mu}{2L_2}$ [58]. Hơn nữa, thuật toán có tốc độ hội tụ tuyến tính với đánh giá

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \sqrt{K}\|x^k - x^*\|,$$

ở đó $K = 1 - 2\rho(\beta - L_1)$, và x^* là nghiệm duy nhất của (EP) [71]. Thuật toán này dựa trên kỹ thuật chiếu cho bài toán tối ưu và sau đó mở rộng cho bài toán bất đẳng thức biến phân, do đó cũng được gọi là thuật toán chiếu.

Điều kiện đơn điệu mạnh nói chung là khá chặt, tuy nhiên khi giảm nhẹ xuống cho song hàm đơn điệu hay giả đơn điệu thì sự hội tụ của thuật toán chiếu không còn được đảm bảo. Lúc này, bằng cách chiếu hai lần, hay còn gọi là thuật toán chiếu tầng cường dựa trên nguyên lý bài toán phụ:

$$\begin{cases} y^k = \arg\min\{\rho f(x^k, y) + H(x^k, y) : y \in C\} \\ x^{k+1} = \arg\min\{\rho f(y^k, y) + H(x^k, y) : y \in C\}, \end{cases}$$

dưới các điều kiện như trong thuật toán chiếu, ta cũng được dãy $\{x^k\}$ hội tụ về một nghiệm của bài toán cân bằng [76]. Thuật toán này xuất phát từ phương pháp chiếu tăng cường được đề xuất bởi Korpelevich cho bài toán điểm yên ngựa [54], sau đó được sử dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân, ở đó các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ được xác định bởi các phép chiếu hình học

$$\begin{cases} y^k = P_C(x^k - \rho F(x^k)) \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \rho F(y^k)), \end{cases}$$

với ánh xạ $F : C \to \mathcal{H}$ là đơn điệu hoặc giả đơn điệu [36, 41].

Một hướng khác tìm nghiệm của bài toán cân bằng là các phương pháp hiệu chỉnh, mà tại mỗi bước lặp k, người ta giải một bài toán phụ (EP_k) sau

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) + \alpha_k \langle x^* - u^k, y - x^* \rangle \geq 0 \ \forall y \in C,$$

ở đó $\alpha_k > 0$ là tham số hiệu chỉnh và $u^k \in \mathcal{H}$ được chọn thích hợp tùy theo từng phương pháp. Chú ý rằng, với phần hiệu chỉnh được thêm vào, song hàm

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \alpha_k \langle x - u^k, y - x \rangle$$

sẽ đơn điệu mạnh nếu f đơn điệu, và do đó việc giải bài toán (EP_k) là giải một bài toán cân bằng đơn điệu mạnh. Dãy nghiệm của bài toán hiệu chỉnh sẽ hội tụ đến nghiệm của bài toán (EP) dưới những điều kiện thích hợp cho song hàm f. Hai phương pháp thường dùng trong hướng này là phương pháp điểm gần kề và phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov.

Trong phương pháp điểm gần kề, ở phần thêm vào của bài toán phụ (EP_k), ta xét $u^k = x^k$. Với giả thiết bài toán (EP) có nghiệm và f đơn điệu, ta có f_k đơn điệu mạnh, và do đó bài toán (EP_k) có nghiệm duy nhất x^{k+1}, khi đó dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến một nghiệm của (EP) [45, 60].

Trong phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, bài toán phụ (EP_k) được xét với $u^k = u \in \mathcal{H}$ cố định và dãy $\{\alpha_k\}$ hội tụ về 0. Nếu f đơn điệu thì mỗi bài toán (EP_k) có duy nhất nghiệm và dãy $\{x^k\}$ hội tụ về một nghiệm của (EP), đó là hình chiếu của u trên tập nghiệm của (EP) [61]. Tổng quát hơn, các tác giả trong [42] đã xét bài toán phụ (EP_α) với

$$f_\alpha(x, y) = f(x, y) + \alpha g(x, y),$$

trong đó song hàm $g : C \times C \to \mathbb{R}$ đơn điệu mạnh trên C và thỏa mãn điều kiện

$$\exists \delta > 0 : |g(x, y)| \leq \delta \|x - u\| \|y - x\| \ \forall x, y \in C.$$

Nếu f đơn điệu thì bài toán hiệu chỉnh (EP_α) có nghiệm duy nhất $x(\alpha)$. Trong trường hợp f giả đơn điệu, bài toán hiệu chỉnh có thể có nhiều nghiệm, thậm chí tập nghiệm có thể không lồi, tuy nhiên mọi quỹ đạo nghiệm $x(\alpha)$ cũng vẫn hội tụ về một nghiệm $\bar{x}$ của (EP) khi $\alpha \to 0$, hơn nữa $\bar{x}$ lại là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng

$$\text{Tìm } x \in S \text{ sao cho } g(x, y) \geq 0 \ \forall y \in S,$$

với S là tập nghiệm của bài toán cân bằng (EP) ban đầu.

Bài toán trên là một trường hợp riêng của bài toán cân bằng hai cấp, mà hiện nay cũng được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Việc giải một bài toán cân bằng hai cấp rõ ràng là khó áp dụng được các thuật toán nêu ở trên vì tập ràng buộc lúc này là một tập ẩn, ở đó nó có thể là tập điểm bất động của một ánh xạ, tập nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân hay một bài toán cân bằng.

Ngoài ra, việc áp dụng các thuật toán chiếu, chiếu tăng cường để giải một bài toán cân bằng hiệu chỉnh có thể gặp khó khăn trong tính toán khi song hàm hiệu chỉnh f_α có cấu trúc phức tạp hơn so với từng song hàm f

và g riêng lẻ. Việc này dẫn đến nhu cầu giải bài toán cân bằng (EP) khi song hàm cân bằng có thể tách thành tổng của hai hay nhiều hàm khác mà mỗi hàm có những tính chất tốt hơn hoặc dễ tính toán hơn. Một số các tác giả trong và ngoài nước cũng đã có những nghiên cứu về vấn đề này như trong [7, 39, 62]. Tuy nhiên, thuật toán đề xuất trong các tài liệu đó có những hạn chế như việc phải giải những bài toán cân bằng ẩn, hay song hàm cân bằng phải thỏa mãn điều kiện liên tục Hölder khiến lớp bài toán bị thu hẹp lại.

Qua đánh giá tóm tắt ở trên về bài toán cân bằng, chúng tôi nhận thấy còn một số vấn đề sau:

- thứ nhất, cả về vấn đề tồn tại nghiệm lẫn thuật toán cho lớp bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, hầu như chưa có mấy kết quả;
- thứ hai là đối với bài toán cân bằng hai cấp, việc giải bằng các phương pháp thông thường là khó áp dụng;
- thứ ba là các thuật toán tách (phân rã) còn có những hạn chế trong tính toán hay trong lớp hàm có thể áp dụng.

Vì những nguyên nhân đó, tập thể hướng dẫn đã gợi ý cho tôi nghiên cứu đề tài "Phương pháp giải một số bài toán cân bằng đơn điệu".

II. Đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu

Như đã trình bày ở phần lý do chọn đề tài, đối tượng nghiên cứu của luận án là lớp các bài toán cân bằng đơn điệu, giả đơn điệu, giả đơn điệu mạnh và lớp bài toán cân bằng hai cấp. Các kết quả về sự tồn tại nghiệm cũng như các thuật toán cho bài toán cân bằng được xét trong không gian Hilbert thực.

Để giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kỹ thuật của Giải tích lồi và Bài toán tối ưu lồi, các phương pháp điểm bất động như phép lặp Banach, phép lặp Mann-Krasnosel'skii. Ngoài ra là kỹ thuật tách nhằm nâng cao hiệu quả tính toán cũng được nghiên cứu trong luận án.

III. Các kết quả đạt được và ý nghĩa khoa học của đề tài

Luận án gồm bốn chương.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản về giải tích lồi trong không gian Hilbert như tập lồi, hàm lồi, giới hạn, tính liên tục của hàm số, tính khả vi, khả dưới vi phân, các tính chất đơn điệu của một toán tử hay của một song hàm. Cùng với đó là một số kết quả bổ trợ để dùng chứng minh sự hội tụ của các thuật toán trong các chương sau.

Chương 2 dành cho việc nghiên cứu bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh. Đầu tiên là một kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh. Mệnh đề 2.1.1 khẳng định bài toán cân bằng (EP) trên tập lồi đóng C trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ luôn có nghiệm duy nhất nếu song hàm cân bằng $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là giả đơn điệu mạnh, $f(., y)$ là hàm nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in C$ và $f(x, .)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới ở trên C với mỗi $x \in C$.

Cùng với kết quả về sự tồn tại nghiệm, chúng tôi cũng đưa ra 3 thuật toán để tìm nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh. Ngoài việc chứng minh sự hội tụ của các thuật toán, chúng tôi cũng có những đánh giá về tốc độ hội tụ của từng thuật toán với những ví dụ cụ thể. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M.

Duc, Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Solution-existence and algorithms with their convergence rate for strongly pseudomonotone equilibrium problems, *Pacific Journal of Optimization*, Vol 12 No.4, pages 833-845, 2016".

Chương 3 trình bày một thuật toán giải bài toán cân bằng mà ở đó song hàm cân bằng của bài toán được phân tích thành tổng của hai hàm khác, mỗi hàm có thể có những tính chất giảm nhẹ hơn hoặc dễ tính toán hơn bài toán gốc, tùy theo mục đích khi áp dụng. Kết quả hội tụ của thuật toán được chứng minh cho song hàm đơn điệu và giả đơn điệu không cần điều kiện liên tục Hölder. Phần này có trình bày một ví dụ chạy số tìm điểm cân bằng Nash trong mô hình độc quyền Cournot và một ví dụ so sánh hiệu năng của thuật toán với một thuật toán đã có trước đó. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M. Duc, Le X. Thanh: Subgradient algorithms for solving equilibrium problems invoving the sum of two monotone bifunctions: Application to the Nash-Cournot Model (đã gửi đăng)".

Chương 4 trình bày một thuật toán giải bài toán cân bằng với tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn. Thuật toán đề xuất giúp việc tính toán trên giao của nhiều tập có thể thực hiện riêng rẽ trên từng tập. Cùng với đó là ba trường hợp riêng được xét khi các bài toán cấp dưới là bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược, bài toán cân bằng đơn điệu và bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại. Cuối cùng là một áp dụng của thuật toán đã xây dựng để giải bài toán tối ưu trên giao của các tập lồi đóng khác rỗng với một thử nghiệm số giải bài toán Lasso cho các trường hợp số chiều khác nhau. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M. Duc, Le D. Muu:

A splitting algorithm for a class of bilevel equilibrium problems involving nonexpansive mappings, *Optimization*, Vol 65, pages 1855-1866, 2016".

IV. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu, luận án gồm bốn chương. Các kết quả của luận án dựa trên ba công trình trong đó hai công trình đã được đăng.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Các thuật toán chiếu cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh.

Chương 3: Thuật toán tách cho bài toán cân bằng.

Chương 4: Thuật toán song song cho bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ bản và một số bổ đề cần thiết sẽ được sử dụng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm cũng như sự hội tụ của những thuật toán giải bài toán cân bằng trong các chương sau. Các khái niệm cơ bản và kết quả này được trích dẫn trong các tài liệu [3, 4, 12, 18, 36, 47, 51, 80, 83, 90] và các tài liệu được trích dẫn trong đó.

1.1. Các khái niệm cơ bản

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$. Chuẩn và khoảng cách liên kết với tích vô hướng đó ký hiệu là $\|.\|$ và $d(.,.)$, được xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ và } d(x, y) = \|x - y\|.$$

Cho $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ và $\eta \in \mathbb{R}$. Một siêu phẳng với véc-tơ pháp tuyến u trong $\mathcal{H}$ là một tập có dạng

$$\{x \in \mathcal{H} : \langle x, u \rangle = \eta\}.$$

Mỗi siêu phẳng chia không gian thành hai nửa, các tập

$$\{x \in \mathcal{H} : \langle x, u\rangle \leq \eta\}$$

và

$$\{x \in \mathcal{H} : \langle x, u\rangle < \eta\}$$

lần lượt được gọi là nửa không gian đóng và nửa không gian mở với véc-tơ pháp tuyến ngoài u.

Định nghĩa 1.1.1. *Một tập con C của $\mathcal{H}$ được gọi là lồi nếu với mọi $x, y \in C$ thì $[x, y] \subset C$, tức là*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C,\ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Định nghĩa 1.1.2. *Cho C là một tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$, $u \in \mathcal{H}$. Khoảng cách từ u đến C, ký hiệu là $d_C(u)$, được xác định bởi*

$$d_C(u) = \inf\{d(u, y) : y \in C\} = \inf\{\|u - y\| : y \in C\}.$$

Nếu có điểm $p \in C$ sao cho $\|u - p\| = d_C(u)$ thì p được gọi là một hình chiếu của u trên C. Nếu mọi điểm trong $\mathcal{H}$ đều có duy nhất một hình chiếu trên C thì C được gọi là tập Chebyshev. Trong trường hợp này, quy tắc ứng với mỗi điểm trong $\mathcal{H}$ một hình chiếu duy nhất của nó trên C cho ta một toán tử gọi là toán tử chiếu trên C, được ký hiệu là P_C.

Ta có một kết quả cơ bản quen thuộc cho hình chiếu của một điểm trên một tập lồi đóng khác rỗng sau.

Định lý 1.1.1. *Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$. Khi đó C là một tập Chebyshev và, với mọi u và p trong $\mathcal{H}$,*

$$p = P_C(u) \Longleftrightarrow [p \in C \ \text{ và } \langle u - p, y - p\rangle \leq 0,\ \forall y \in C].$$

Định nghĩa 1.1.3. *Cho C là một tập con lồi khác rỗng của $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Nón pháp tuyến ngoài của C tại x, ký hiệu là $N_C x$, được xác định bởi*

$$N_C x = \begin{cases} \{u \in \mathcal{H} | \langle u, y - x \rangle \leq 0, \ \forall y \in C\} & \text{nếu } x \in C, \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Tiếp theo đây là các khái niệm hội tụ mạnh và hội tụ yếu trong không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.1.4. *Một dãy $\{x_n\}$ trong $\mathcal{H}$ được gọi là*

(i) hội tụ mạnh đến điểm x, ký hiệu là $x_n \to x$, nếu

$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ khi } n \to \infty;$$

(ii) hội tụ yếu đến điểm x, ký hiệu là $x_n \rightharpoonup x$, nếu với mọi $u \in \mathcal{H}$,

$$\langle x_n - x, u \rangle \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Bổ đề 1.1.1. *[12] Cho $\{x_n\}_{n \geq 0}$ và $\{u_n\}_{n \geq 0}$ là các dãy trong $\mathcal{H}$, x và u là các điểm trong $\mathcal{H}$. Giả sử $x_n \rightharpoonup x, u_n \to u$ khi $n \to \infty$. Khi đó $\langle x_n, u_n \rangle \to \langle x, u \rangle$ khi $n \to \infty$.*

Bổ đề 1.1.2. *[12] Cho $\{x_n\}_{n \geq 0}$ là một dãy bị chặn trong $\mathcal{H}$. Khi đó có một dãy con của $\{x_n\}_{n \geq 0}$ hội tụ yếu.*

Tiếp theo sau đây là một số khái niệm quen thuộc về hàm số. Cho C là một tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$ và hàm $f : C \to [-\infty, +\infty]$. *Miền hữu hiệu* của f là tập:

$$\text{dom} f = \{x \in C | f(x) < +\infty\},$$

tập giá trị của f là tập:

$$f(C) = \{f(x) | \ x \in C\},$$

đồ thị của f là tập:

$$\text{gra}f = \{(x, \xi) \in C \times \mathbb{R} | f(x) = \xi\},$$

trên đồ thị của f là tập:

$$\text{epi}f = \{(x, \xi) \in C \times \mathbb{R} | f(x) \leq \xi\},$$

tập mức dưới của f tại $\xi \in \mathbb{R}$ là tập:

$$\text{lev}_{\leq \xi} f = \{x \in C | f(x) \leq \xi\}.$$

Hàm f được gọi là *chính thường* nếu $-\infty \notin f(C)$ và $domf \neq \emptyset$.

Định nghĩa 1.1.5. *Một hàm $f : C \to [-\infty, +\infty]$ được gọi là lồi trên C nếu trên đồ thị của nó là một tập lồi. Hàm f gọi là lõm nếu $-f$ là hàm lồi.*

Trong trường hợp hàm f chính thường thì f lồi trên C nếu và chỉ nếu với mọi $x, y \in C$, với mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Dễ thấy trằng, hàm f lồi trên C nếu và chỉ nếu với mọi họ hữu hạn $x^1, x^2, \ldots, x^n \in C$ và các số thực không âm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mà $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, ta có

$$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^k) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x^k)$$

(Bất đẳng thức Jensen).

Hàm chính thường f được gọi là *lồi mạnh* với hệ số $\tau > 0$ trên tập lồi C nếu với mọi $x, y \in C$ và với mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) - \frac{\tau(1 - \tau)}{2} \|x - y\|^2.$$

Hàm f được gọi là *tựa lồi* nếu với mỗi cặp $x, y \in C$ và với mọi $\alpha \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

và được gọi là *tựa lồi chặt* nếu nó là tựa lồi và, với mỗi cặp $x, y \in C$ sao cho $f(x) \neq f(y)$ và với mọi $\alpha \in (0,1)$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}.$$

Giới hạn dưới của dãy $\{a_k\}_{k\geq 0}$ trong $[-\infty, +\infty]$ là

$$\underline{\lim} a_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n,$$

và giới hạn trên của dãy $\{a_k\}_{k\geq 0}$ trong $[-\infty, +\infty]$ là

$$\overline{\lim} a_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Định nghĩa 1.1.6. *Cho C là một tập con của $\mathcal{H}$. Một hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là nửa liên tục dưới (nửa liên tục dưới yếu) tại điểm $\bar{x} \in C$ nếu với mọi dãy $\{x^n\} \subset C$,*

$$x^n \to \bar{x} \Longrightarrow f(\bar{x}) \leq \underline{\lim} f(x^n)$$

$$(x^n \rightharpoonup \bar{x} \Longrightarrow f(\bar{x}) \leq \underline{\lim} f(x^n)).$$

Hàm f gọi là nửa liên tục dưới (nửa liên tục dưới yếu) ở trên C nếu nó nửa liên tục dưới (nửa liên tục dưới yếu) tại mọi điểm trong C.

Hàm f được gọi là nửa liên tục trên (nửa liên tục trên yếu) tại điểm $\bar{x} \in C$ nếu với mọi dãy $\{x^n\} \subset C$,

$$x^n \to \bar{x} \Longrightarrow f(\bar{x}) \geq \overline{\lim} f(x^n)$$

$$(x^n \rightharpoonup \bar{x} \Longrightarrow f(\bar{x}) \geq \overline{\lim} f(x^n)).$$

Hàm f gọi là nửa liên tục trên (nửa liên tục trên yếu) ở trên C nếu nó nửa liên tục trên (nửa liên tục trên yếu) tại mọi điểm trong C.

Hàm f là liên tục (liên tục yếu) tại điểm $\bar{x}$ nếu nó đồng thời nửa lên tục trên (nửa liên tục trên yếu) và nửa liên tục dưới (nửa liên tục dưới yếu) tại đó. Hàm f được gọi là liên tục (liên tục yếu) ở trên C nếu nó liên tục (liên tục yếu) tại mọi điểm trong C.

Hàm f được gọi là bán liên tục trên ở trên C nếu với mọi $x, y \in C$ và $\alpha \in [0, 1]$, hàm số $\tau(\alpha) = f[\alpha x + (1 - \alpha)y]$ là nửa liên tục trên tại 0^+.

Nếu hàm f xác định trên C thì ta có thể thác triển lên toàn không gian bằng cách đặt

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } x \in C \\ +\infty \text{ nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Do đó dưới đây ta có thể xét với hàm xác định trên toàn không gian.

Định nghĩa 1.1.7. *Cho $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường, $x \in domf$ và $y \in \mathcal{H}$. Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha}$$

thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của f tại x theo hướng y, ký hiệu là $f'(x; y)$.

Nếu hàm f có đạo hàm tại x theo mọi hướng và $f'(x; .)$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục trên $\mathcal{H}$ thì f được gọi là khả vi Gâteaux tại x, và theo biểu diễn Riesz-Fréchet, tồn tại duy nhất một véc-tơ $\nabla f(x) \in \mathcal{H}$ sao cho

$$(\forall y \in \mathcal{H})\ f'(x; y) = \langle y, \nabla f(x) \rangle.$$

Nếu có

$$\lim_{0 \neq y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - \langle y, \nabla f(x) \rangle}{\|y\|} = 0$$

thì ta nói f là khả vi Fréchet tại x, và $\nabla f(x)$ được gọi là đạo hàm Fréchet của f tại x.

Một hàm có thể không khả vi tại một điểm, khi đó trong nhiều bài toán ta có thể sử dụng khái niệm dưới vi phân của hàm tại một điểm để nghiên cứu, đánh giá.

Định nghĩa 1.1.8. *Cho $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường.*

(i) Một véc-tơ $p \in \mathcal{H}$ được gọi là dưới đạo hàm của f tại $x \in \mathcal{H}$ nếu

$$f(x) + \langle p, y - x \rangle \leq f(y) \ \forall y \in \mathcal{H}.$$

Tập tất cả các dưới đạo hàm của f tại x được gọi là dưới vi phân của f tại x, ký hiệu là $\partial f(x)$. Hàm f được gọi là khả dưới vi phân tại x nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$.

(ii) Cho số thực dương ϵ, một véc-tơ $p \in \mathcal{H}$ được gọi là một ϵ-dưới đạo hàm của f tại điểm $x \in \mathcal{H}$ nếu

$$f(x) + \langle p, y - x \rangle - \epsilon \leq f(y) \ \forall y \in \mathcal{H}.$$

Tập tất cả các ϵ-dưới đạo hàm của f tại x được gọi là ϵ-dưới vi phân của f tại x, ký hiệu là $\partial^{\epsilon} f(x)$.

Hàm chỉ của tập C, ký hiệu là ι_C, được xác định bởi

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Nếu C là một tập con lồi khác rỗng của $\mathcal{H}$, thì ta có $\partial\iota_C(x) = N_C(x)$.

Tiếp theo đây là một số khái niệm về ánh xạ trong không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.1.9. *Cho C là một tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$ và ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$.*

(i) T được gọi là liên tục Lipschitz trên C với hệ số $L > 0$ nếu

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in C.$$

Nếu $L = 1$ thì T được gọi là ánh xạ không giãn, và nếu $0 < L < 1$ thì T được gọi là ánh xạ co.

(ii) T được gọi là bán liên tục trên C nếu với $x \in C, y \in \mathcal{H}$ và $x + t_n y \in C, \forall n = 1, 2, \ldots,$ ở đó $\{t_n\}$ là một dãy số dương có $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, kéo theo $T(x + t_n y) \rightharpoonup T(x)$.

Định nghĩa 1.1.10. *Cho C là một tập lồi khác rỗng trong $\mathcal{H}$. Ánh xạ $T : C \to \mathcal{H}$ được gọi là*

(i) đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C nếu

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq \beta\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C;$$

(ii) đơn điệu trên C nếu

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C;$$

(iii) giả đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C nếu với mọi $x, y \in C$,

$$\langle Ty, x - y\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle Tx, x - y\rangle \geq \beta\|x - y\|^2;$$

(iv) giả đơn điệu trên C nếu với mọi $x, y \in C$,

$$\langle Ty, x - y\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle Tx, x - y\rangle \geq 0;$$

(v) đơn điệu mạnh ngược (đồng bức, không giãn vững) với hệ số $\beta > 0$ trên C nếu

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq \beta\|Tx - Ty\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

Tương tự ta có một số khái niệm về ánh xạ đa trị.

Cho $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là một ánh xạ đa trị. *Tập xác định* của F, ký hiệu là $\mathrm{dom}F$, được xác định bởi

$$\mathrm{dom}F = \{x \in \mathcal{H} : F(x) \neq \emptyset\},$$

đồ thị của F là tập

$$\mathrm{gra}F = \{(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : y \in F(x)\}.$$

Cho A và B là các tập con của $\mathcal{H}$. *Khoảng cách Hausdorff* giữa A và B được xác định bởi

$$d_H(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\},$$

ở đó

$$d(A, B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|,\ d(B, A) = \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \|a - b\|.$$

Ánh xạ F được gọi là liên tục *Lipschitz* trên C với hệ số $L > 0$ nếu

$$d_H(F(x), F(y)) \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in C.$$

Định nghĩa 1.1.11. *Cho F là một ánh xạ đa trị, $C \subseteq domF$. Ánh xạ F được gọi là*

(i) đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\beta > 0$ nếu

$$\langle y - y', x - x'\rangle \geq \beta\|y - x\|^2,\ \forall x, x' \in C,\ \forall y \in F(x),\ \forall y' \in F(x');$$

(ii) đơn điệu trên C nếu

$$\langle y - y', x - x' \rangle \geq 0,\ \forall x, x' \in C,\ \forall y \in F(x),\ \forall y' \in F(x');$$

(iii) đơn điệu cực đại nếu F đơn điệu và với mọi $(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$(x, u) \in graF \Leftrightarrow \forall (y, v) \in graF : \langle x - y, u - v \rangle \geq 0.$$

Phần cuối trong mục này là một số khái niệm cho song hàm.

Định nghĩa 1.1.12. *Cho song hàm $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Dưới vi phân đường chéo của f tại $x \in \mathcal{H}$, ký hiệu là $\partial_2 f(x, x)$, là tập:*

$$\partial_2 f(x, x) = \{g \in \mathcal{H} : f(x, x) + \langle g, y - x \rangle \leq f(x, y)\ \forall y \in \mathcal{H}\}.$$

Cho $\epsilon > 0$, ϵ-dưới vi phân đường chéo của f tại $x \in \mathcal{H}$, ký hiệu là $\partial_2^{\epsilon} f(x, x)$, là tập:

$$\partial_2^{\epsilon} f(x, x) = \{g \in \mathcal{H} : f(x, x) + \langle g, y - x \rangle - \epsilon \leq f(x, y)\ \forall y \in \mathcal{H}\}.$$

Định nghĩa 1.1.13. *Cho $C \subset \mathcal{H}$ là một tập khác rỗng, song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ được gọi là*

(i) đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\beta > 0$ nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\beta \|y - x\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

(ii) đơn điệu trên C nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in C;$$

(iii) giả đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\beta > 0$ nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Longrightarrow f(y, x) \leq -\beta \|y - x\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

(iv) giả đơn điệu trên C nếu

$$f(x,y) \geq 0 \Longrightarrow f(y,x) \leq 0, \quad \forall x,y \in C.$$

Chú ý rằng, với $f(x,y) = \langle F(x), y-x \rangle$ thì f có các tính chất đơn điệu trên C khi và chỉ khi F có các tính chất tương ứng. Ngoài ra, các khái niệm đơn điệu của toán tử trong Định nghĩa 1.1.10 và của song hàm trong Định nghĩa 1.1.13 có các mối quan hệ như sau:

- tính đơn điệu mạnh kéo theo tính đơn điệu và tính đơn điệu kéo theo tính giả đơn điệu;
- tính đơn điệu mạnh kéo theo tính giả đơn điệu mạnh và tính giả đơn điệu mạnh kéo theo tính giả đơn điệu.

Tuy nhiên, tính giả đơn điệu không suy ngược ra được tính đơn điệu hay giả đơn điệu mạnh, đồng thời ta cũng không có kết luận nào về mối quan hệ giữa tính đơn điệu và tính giả đơn điệu mạnh. Các ví dụ sau chỉ ra điều này.

Ví dụ 1: Xét trong $\mathbb{R}^2$, $C := \mathbb{R}^2$, cho

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Xét song hàm

$$f(x,y) := \langle Ax, y-x \rangle.$$

Dễ thấy, $f(x,y) + f(y,x) = 0$ với mọi $x,y \in C$ nên f đơn điệu trên C. Tuy nhiên nó không giả đơn điệu mạnh trên C. Thật vậy, lấy $x = (1,0)$, $y = (-1,0)$, ta có:

$$f(x,y) = f(y,x) = 0, \|y-x\| = 2,$$

nên không tồn tại $\beta > 0$ thỏa mãn điều kiện giả đơn điệu mạnh trong Định nghĩa 1.1.13.

Xét song hàm

$$g(x,y) := \|x\|^2\langle A^T x, y - x\rangle.$$

Song hàm g là giả đơn điệu trên C, tuy nhiên nó không giả đơn điệu mạnh (xem [85], Ví dụ 2.1) và cũng không đơn điệu. Thật vậy, lấy $x = (1,1), y = (0,1)$, ta có:

$$f(x,y) + f(y,x) = 1 > 0.$$

Ví dụ 2: Cho $0 < r < R$, đặt $C = B(r) := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \le r\}$ và song hàm f được xác định bởi

$$f(x,y) := h(x,y) + (R - \|x\|)g(x,y),$$

ở đó h và g thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $h(x,y) \le 0 \ \forall x, y \in C$ và g là đơn điệu mạnh hệ số β trên C;

(ii) $\exists\ y^0 \in C$ sao cho

$$\begin{cases} h(0,y^0) + h(y^0,0) = 0, \\ Rg(0,y^0) + (R - \|y^0\|)g(y^0,0) > 0. \end{cases}$$

Để chỉ ra f là giả đơn điệu mạnh trên C, ta giả thiết rằng $f(x,y) \ge 0$. Khi đó, do $h(x,y) \le 0$, ta suy ra $g(x,y) \ge 0$. Do tính đơn điệu mạnh của g, kéo theo $g(y,x) \le -\beta\|x - y\|^2$. Từ đó, theo định nghĩa của f, ta có

$$f(y,x) = h(y,x) + (R - \|y\|)g(y,x) \le -(R - r)\beta\|y - x\|^2 \ \forall x, y \in C.$$

Do đó f là giả đơn điệu mạnh hệ số $(R - r)\beta$ trên C.

Song hàm f không đơn điệu trên C vì từ giả thiết (ii) ta được

$$f(0,y^0) + f(y^0,0) = h(0,y^0) + Rg(0,y^0) + h(y^0,0) + (R - \|y^0\|)g(y^0,0) > 0.$$

Một ví dụ cụ thể về các hàm g và h thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) là

$$g(x,y) := \langle x, y-x\rangle + m(\|y\|^2 - \|x\|^2) \text{ với } m > 0$$

và

$$h(x,y) := (x-y)^T A(y-x)$$

với $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một toán tử tuyến tính thỏa mãn $h(x,y) \le 0$ với mọi $x, y \in C$.

Dễ thấy g là song hàm đơn điệu mạnh với mọi $m > 0$. Hơn nữa ta có

$$\begin{aligned} Rg(0,y) + (R - \|y\|)g(y,0) &= \Big(mR - (m+1)R + (m+1)\|y\|\Big)\|y\|^2 \\ &= \Big((m+1)\|y\| - R\Big)\|y\|^2. \end{aligned}$$

Do đó, nếu $m > \frac{R-r}{r}$, thì điều kiện (ii) được thỏa mãn với mọi $y^0 \in C = B(r)$ với $\|y^0\| > \dfrac{R}{m+1}$, và $(y^0)^T A y^0 = 0$.

1.2. Một số kết quả bổ trợ

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số kết quả sẽ được dùng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm cũng như sự hội tụ của các thuật toán giải bài toán cân bằng ở những chương sau.

Cho $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường, $\bar{x} \in \mathcal{H}$. Khi đó $\bar{x}$ được gọi là một điểm cực tiểu của f nếu $f(\bar{x}) \le f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{H}$ và $f(\bar{x})$ được gọi là giá trị cực tiểu của f, ta viết $f(\bar{x}) = \min_{\mathcal{H}} f$. Tập các điểm cực tiểu của f được ký hiệu là $\arg\min_{\mathcal{H}} f$.

Cho C là một tập con của $\mathcal{H}$ sao cho $C \cap \mathrm{dom} f \ne \emptyset$. Điểm $\bar{x} \in C$ được gọi là một điểm cực tiểu của f trên C nếu $f(\bar{x}) \le f(x)$ với mọi $x \in C$, và

$f(\bar{x})$ được gọi là giá trị cực tiểu của f trên C, ta viết $f(\bar{x}) = \min_C f$. Tập các điểm cực tiểu của f trên C được ký hiệu là $\arg\min_C f$.

Chú ý rằng $\min_C f = \min_{\mathcal{H}}(f + \iota_C)$, ở đó ι_C là hàm chỉ của tập C.

Xét bài toán cân bằng

$$\text{Tìm } x^* \in C: \ f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in C. \qquad (EP)$$

Bài toán đối ngẫu của (EP), hay còn gọi là bài toán cân bằng Minty, là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C: \ f(y, x^*) \leq 0 \ \forall y \in C. \qquad (DEP)$$

Tập nghiệm của bài toán cân bằng (EP) và bài toán đối ngẫu của nó (DEP) được ký hiệu lần lượt là (SEP) và $(SDEP)$. Ta có mối liên hệ giữa hai tập nghiệm (SEP) và $(SDEP)$ như sau.

Bổ đề 1.2.1. *[50]*

(a) Nếu f giả đơn điệu thì $(SEP) \subseteq (SDEP)$;

(b) Nếu $f(., y)$ bán liên tục trên và $f(x, .)$ là tựa lồi chặt với mọi $x, y \in C$ thì $(SDEP) \subseteq (SEP)$.

Do đó, nếu song hàm f là giả đơn điệu trên C, $f(., y)$ nửa liên tục trên ở trên C và $f(x, .)$ lồi trên C thì ta có $(SEP) = (SDEP)$.

Cho ánh xạ $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, tập các điểm bất động của T, ký hiệu là Fix$T$, là tập:

$$\text{Fix}T = \{x \in \mathcal{H} : Tx = x\}.$$

Bổ đề 1.2.2. *[12] Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$, $T : C \to \mathcal{H}$ là một ánh xạ không giãn, $\{x^k\}_{k \geq 0} \subset C$ và x một phần tử trong $\mathcal{H}$. Giả sử rằng $x^k \rightharpoonup x$ và $x^k - T(x^k) \to 0$. Khi đó $x \in FixT$.*

Bổ đề 1.2.3. *[12] Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và $T : C \to \mathcal{H}$ là ánh xạ không giãn. Khi đó $FixT$ là tập lồi đóng.*

Bổ đề 1.2.4. *Giả sử tập điểm bất động chung S của các ánh xạ không giãn $T_j,\ j = 1, \ldots, N$ không rỗng. Đặt $T(x) := \sum_{j=1}^{N} \mu_j T_j(x)$ với $0 < \mu_j < 1,\ j = 1, \ldots, N$ và $\sum_{j=1}^{N} \mu_j = 1$. Khi đó T là ánh xạ không giãn và S trùng với tập điểm bất động của T.*

Chứng minh. Cách chứng minh dưới đây tương tự như chứng minh Mệnh đề 4.34 trong [12].

Trước hết, dễ thấy T là ánh xạ không giãn và $S \subseteq \mathrm{Fix}(T)$.

Để chứng minh $\mathrm{Fix}(T) \subseteq S$, ta lấy $x \in \mathrm{Fix}(T)$ và chỉ ra rằng $x \in S$. Thật vậy, lấy $u \in S$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x - u\|^2 &= \|\sum_{j=1}^{N} \mu_j T_j(x) - u\|^2 \\
&= \|\sum_{j=1}^{N} \mu_j [T_j(x) - T_j(u)]\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mu_j \|[T_j(x) - T_j(u)]\|^2 - \sum_{1 \le j < k \le N} \mu_j \mu_k \|[T_j(x) - T_k(x)]\|^2 \\
&\le \sum_{j=1}^{N} \mu_j \|[x - u]\|^2 - \sum_{1 \le j < k \le N} \mu_j \mu_k \|[T_j(x) - T_k(x)]\|^2 \\
&= \|[x - u]\|^2 - \sum_{1 \le j < k \le N} \mu_j \mu_k \|[T_j(x) - T_k(x)]\|^2,
\end{aligned}$$

điều đó kéo theo $T_j(x) = T_k(x)$ với mọi $1 \le j < k \le N$. Do đó

$$T_j(x) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_k(x) = T(x) = x,\ \forall j = 1, 2, \ldots, N.$$

Điều đó có nghĩa $x \in \mathrm{Fix}(T_j)$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, N$, tức là $x \in S$. $\square$

Bổ đề 1.2.5. *[86] Giả sử $\{\alpha_k\}$ là dãy số không âm thỏa mãn*

$$\alpha_{k+1} \leq \alpha_k + \sigma_k \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

ở đó dãy $\{\sigma_k\}$ thỏa mãn $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k| < \infty$. Khi đó dãy $\{\alpha_k\}$ có giới hạn.

Bổ đề 1.2.6. *[93] Giả sử $\{\alpha_k\}$ là dãy số không âm thỏa mãn*

$$\alpha_{k+1} \leq (1 - \lambda_k)\alpha_k + \lambda_k \delta_k + \sigma_k \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

ở đó $\{\lambda_k\} \subset (0, 1), \{\delta_k\}$ and $\{\sigma_k\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$;

(ii) $\limsup_{k\to\infty} \delta_k \leq 0$;

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k| < \infty$.

Khi đó $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

Bổ đề 1.2.7. *[75] Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert, $\{x^n\}$ là một dãy phần tử trong $\mathcal{H}$. Cho $\{r_n\}$ là một dãy số thực không âm sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = +\infty$ và đặt $\bar{x}^n := \dfrac{\sum_{i=1}^{n} r_i x^i}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$. Giả sử tồn tại một tập lồi đóng khác rỗng $S \subset \mathcal{H}$ thỏa mãn:*

(i) Với mọi $u \in S$, $\lim_{n\to\infty} \|x^n - u\|$ tồn tại;

(ii) Mọi điểm tụ yếu của dãy $\{\bar{x}^n\}$ đều thuộc vào S.

Khi đó $\{\bar{x}^n\}$ hội tụ yếu đến một phần tử $\bar{x} \in S$.

1.3. Kết luận chương

Phần đầu của Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích lồi, một số khái niệm cho ánh xạ và song hàm trong không gian Hilbert.

Phần tiếp theo là một số kết quả bổ trợ sẽ được dùng để chứng minh các kết quả về sự tồn tại nghiệm cũng như sự hội tụ của các thuật toán giải bài toán cân bằng trong các chương sau.

Chương 2

Các thuật toán chiếu cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh

Như đã đề cập trong phần mở đầu, tính bức của song hàm là một điều kiện quan trọng đảm bảo cho sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Trong trường hợp song hàm đơn điệu mạnh, điều kiện bức đó luôn thỏa mãn và do đó bài toán có nghiệm, hơn nữa nghiệm của bài toán là duy nhất. Trong chương này, chúng tôi chỉ ra rằng với một số điều kiện cơ bản, nếu song hàm cân bằng là giả đơn điệu mạnh thì điều kiện bức cũng luôn được thỏa mãn, do đó bài toán cân bằng luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất.

Về phương diện tính toán, với song hàm f đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz thì có thể chọn được tham số $\rho > 0$ sao cho từ điểm $x^0 \in C$ chọn tùy ý, dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi $x^{k+1} = s(x^k), k = 0, 1, \ldots$, ở đó

$$s(x) := \underset{y \in C}{\operatorname{argmin}} \{\rho f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\},$$

hội tụ về nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng (EP) cũng chính là điểm bất động của ánh xạ s [58, 76].

Trong trường hợp song hàm f là giả đơn điệu mạnh, dãy lặp xác định như trên có còn tính chất đó nữa hay không? Phần tiếp theo của chương này sẽ giải quyết câu hỏi đó cùng một số thuật toán cải tiến để giải bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh. Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M. Duc, Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Solution-existence and algorithms with their convergence rate for strongly pseudomonotone equilibrium problems, *Pacific Journal of Optimization*, Vol 12, No. 4, pages 833-845, 2016".

2.1. Sự tồn tại nghiệm

Mục này chỉ ra rằng bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, dưới một số giả thiết cơ bản sẽ luôn có duy nhất nghiệm.

Giả sử C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và song hàm cân bằng $f : C \times C \to \mathbb{R}$.

Giả thiết

(A1) $f(., y)$ là hàm nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in C$;

(A2) $f(x, .)$ là hàm lồi và khả dưới vi phân trên C với mỗi $x \in C$;

(A2a) $f(x, .)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới ở trên C với mỗi $x \in C$.

Chú ý rằng một hàm chính thường khả dưới vi phân tại một điểm thì nửa liên tục dưới tại điểm đó ([12], Mệnh đề 16.3), tuy nhiên một hàm lồi nửa liên tục dưới trên một tập C chưa chắc đã khả dưới vi phân trên đó, nhưng nó là ϵ-khả dưới vi phân trên C với mọi $\epsilon > 0$ ([1], Mệnh đề 11.17).

Bổ đề sau là một hệ quả trực tiếp của Định lý 3.1 trong [15], được dùng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh.

Bổ đề 2.1.1. *Cho $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng giả đơn điệu sao cho $f(.,y)$ là bán liên tục ở trên C với mỗi $y \in C$ và $f(x,.)$ lồi, nửa liên tục dưới ở trên C với mỗi $x \in C$. Giả sử điều kiện bức sau thỏa mãn: tồn tại hình cầu đóng B sao cho*

$$\forall x \in C \setminus B,\ \exists y \in C \cap B : f(x,y) < 0.$$

Khi đó bài toán cân bằng (EP) có nghiệm.

Ta có kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh được phát biểu như sau:

Mệnh đề 2.1.1. *Giả sử f là song hàm giả đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C, khi đó với các giả thiết (A1), (A2a), bài toán (EP) có duy nhất nghiệm.*

Chứng minh. Chú ý rằng trong trường hợp tập C bị chặn, mệnh đề trên là một hệ quả của định lý Ky Fan [55].

Giả sử C không bị chặn. Khi đó, từ Bổ đề 2.1.1, chỉ cần chứng minh điều kiện bức sau được thỏa mãn: tồn tại hình cầu đóng B sao cho

$$\forall x \in C \setminus B,\ \exists y \in C \cap B : f(x,y) < 0. \tag{C0}$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tức là không tồn tại hình cầu đóng nào thỏa mãn điều kiện bức trên. Khi đó với mọi hình cầu đóng B_r tâm ở gốc, bán kính r, tồn tại $x^r \in C \setminus B_r$ sao cho $f(x,y) \geq 0\ \forall y \in C \cap B_r$.

Cố định $r_0 > 0$, khi đó với mọi $r > r_0$, tồn tại $x^r \in C \setminus B_r$ sao cho $f(x^r, y^0) \geq 0$ với $y^0 \in C \cap B_{r_0}$. Từ đó, do f là song hàm giả đơn điệu mạnh với hệ số β, ta có

$$f(y^0, x^r) + \beta\|x^r - y^0\|^2 \leq 0\ \forall r > 0. \tag{2.1}$$

Mặt khác, do C lồi và $f(y^0,.)$ lồi trên C, với $\epsilon_r := 1/r$, tồn tại $x^0 \in C$ sao cho $\partial_2^{\epsilon_r} f(y^0, x^0) \neq \emptyset$. Lấy tùy ý $w^* \in \partial_2^{\epsilon_r} f(y^0, x^0)$, ta có

$$f(y^0, x) + 1/r \geq \langle w^*, x - x^0 \rangle + f(y^0, x^0) \ \forall x.$$

Với $x = x^r$, ta được

$$\begin{aligned} f(y^0, x^r) + \beta \|x^r - y^0\|^2 + 1/r &\geq f(y^0, x^0) + \langle w^*, x^r - x^0 \rangle + \beta \|x^r - y^0\|^2 \\ &\geq f(y^0, x^0) - \|w^*\| \|x^r - x^0\| + \beta \|x^r - y^0\|^2. \end{aligned}$$

Cho $r \to \infty$, ta được $\|x^r\| \to \infty$ và do đó $f(y^0, x^r) + \beta \|x^r - y^0\|^2 \to \infty$, điều này trái với (2.1). Vậy điều kiện bức $(C0)$ luôn đúng. Do đó, theo Bổ đề 2.1.1, bài toán (EP) có nghiệm.

Giả sử $x^1, x^2 \in C$ là hai nghiệm của bài toán, ta có $f(x^1, x^2) \geq 0, f(x^2, x^1) \geq 0$. Do f là song hàm giả đơn điệu mạnh trên C nên từ $f(x^1, x^2) \geq 0$, kéo theo

$$0 \leq f(x^2, x^1) \leq -\beta \|x^2 - x^1\|^2,$$

do đó $x^1 = x^2$. □

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\text{Tìm } x^* \in C : \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \ \forall y \in C, \qquad (VIP)$$

ở đó $F : C \to \mathcal{H}$ là toán tử giả đơn điệu mạnh trên C.

Áp dụng kết quả của Mệnh đề 2.1.1 với song hàm f xác định bởi

$$f(x, y) := \langle F(x), y - x \rangle, \qquad (2.2)$$

ta thu được kết quả về sự tồn tại nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân như sau.

Hệ quả 2.1.1. *Giả sử F bán liên tục và giả đơn điệu mạnh trên C. Khi đó bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) có nghiệm duy nhất.*

Trong [37] và [48], các tác giả khi nghiên cứu kết quả cho bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu mạnh đều phải giả thiết bài toán có nghiệm. Hệ quả 2.1.1 đã giúp cho giả thiết đó luôn được thỏa mãn.

2.2. Thuật toán và tốc độ hội tụ

Các thuật toán đưa ra trong mục này dựa trên thuật toán tìm điểm bất động của ánh xạ $s : C \to C$ xác định bởi

$$s(x) := \underset{y \in C}{\text{argmin}}\{\rho f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\}, \tag{2.3}$$

ở đó $\rho > 0$. Với giả thiết $f(x, .)$ lồi, đóng trên tập lồi đóng C, ánh xạ s luôn xác định vì hàm mục tiêu là lồi mạnh.

Mối liên hệ giữa nghiệm của bài toán cân bằng và điểm bất động của ánh xạ s được phát biểu như sau:

Bổ đề 2.2.1. *[58] Cho s được xác định bởi công thức (4.4). Khi đó, dưới các giả thiết (A1) và (A2), x^* là một nghiệm của (EP) nếu và chỉ nếu $x^* = s(x^*)$.*

Điều kiện kiểu Lipschitz sau cũng được giới thiệu trong [58]: ta nói f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C, nếu tồn tại $L_1, L_2 > 0$ sao cho:

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - L_1\|x - y\|^2 - L_2\|y - z\|^2, \ \forall x, y, z \in C. \tag{2.4}$$

Có thể thấy, trong trường hợp bài toán tối ưu (OP): Tìm $x^* \in C$ cực tiểu hàm $\phi : C \to \mathbb{R}$, thì với

$$f(x, y) = \phi(y) - \phi(x),$$

điều kiện (2.4) luôn được thỏa mãn.

Trong trường hợp bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP):

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C,$$

thì với

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle,$$

điều kiện (2.4) thỏa mãn khi F là ánh xạ liên tục Lipschitz với hệ số $L > 0$. Khi đó ta có thể chọn $L_1 = \dfrac{Lm}{2}$ và $L_2 = \dfrac{L}{2m}$ với $m > 0$ tùy ý.

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, z) &= \langle F(x), y - x \rangle + \langle F(y), z - y \rangle \\ &= \langle F(x), z - x \rangle + \langle F(y) - F(x), z - y \rangle \\ &= f(x, z) + \langle F(y) - F(x), z - y \rangle. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và chú ý rằng F là liên tục L-Lipschitz, ta được

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, z) &\geq f(x, z) - L\|y - x\|\|z - y\| \\ &\geq f(x, z) - \frac{Lm}{2}\|y - x\|^2 - \frac{L}{2m}\|z - y\|^2. \end{aligned}$$

2.2.1. Thuật toán với tốc độ hội tụ tuyến tính

Giả thiết song hàm f là giả đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (2.4). Khi đó ta có một thuật toán hội tụ tuyến tính cho bài toán cân bằng (EP) như sau.

Thuật toán 2.2.1. *Cho trước sai số* $\varepsilon > 0$ *Chọn tham số* $0 < \rho < \dfrac{1}{2L_1}$.

Lấy tùy ý $x^0 \in C$, *đặt* $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$, giải bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\min\{\rho f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : x \in C\} \tag{2.5}$$

thu được nghiệm duy nhất x^{k+1}.

Nếu $x^{k+1} = x^k$ thì dừng, x^k là nghiệm của bài toán (EP). Trái lại, tăng $k \to k+1$.

Trong trường hợp bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP), khi $f(x, y) := \langle F(x), y - x\rangle$, việc giải bài toán tối ưu lồi mạnh (2.5) chính là việc tính hình chiếu của vec-tơ $x^k - \frac{1}{\rho}F(x^k)$ lên C, tức là $x^{k+1} = P_C(x^k - \rho F(x^k))$.

Sự hội tụ của Thuật toán 2.2.1 được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.1. *Giả sử f là song hàm giả đơn điệu mạnh ở trên C với hệ số $\beta > 0$, các điều kiện (A1), (A2) và điều kiện dạng Lipschitz (2.4) được thỏa mãn với $L_2 < \beta$ và $0 < \rho \leq \dfrac{1}{2L_1}$. Ngoài ra, với mỗi $x \in C$, hàm $f(x, .)$ liên tục tại một điểm thuộc C hoặc $intC \neq \emptyset$. Khi đó, nếu Thuật toán 2.2.1 không dừng sau hữu hạn bước thì dãy lặp $\{x^k\}$ hội tụ mạnh với tốc độ tuyến tính đến nghiệm duy nhất x^* của (EP) và ta có đánh giá:*

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{1-\alpha}\|x^k - x^{k+1}\|, \quad \forall k \geq 0, \tag{2.6}$$

ở đó $\alpha := \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2\rho(\beta - L_2)}} \in (0, 1)$.

Chứng minh. Với mỗi $k \geq 0$, để đơn giản, đặt

$$f_k(x) := \rho f(x^k, x) + \frac{1}{2}\|x - x^k\|^2. \tag{2.7}$$

Do điều kiện (A2), hàm f_k lồi mạnh với hệ số 1 và khả dưới vi phân trên C, do đó

$$f_k(x^{k+1}) + \langle g^k, x - x^{k+1}\rangle + \frac{1}{2}\|x - x^{k+1}\|^2 \leq f_k(x), \quad \forall x \in C \tag{2.8}$$

với $g^k \in \partial f_k(x^{k+1})$. Theo cách xác định của x^{k+1} bởi (2.5), sử dụng điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu lồi, ta có

$$0 \in \partial f_k(x^{k+1}) + N_C(x^{k+1}),$$

do đó tồn tại $-g^k \in N_C(x^{k+1})$ sao cho $\langle g^k, x - x^{k+1}\rangle \geq 0$, $\forall x \in C$. Vì vậy, từ (2.8), ta được

$$f_k(x^{k+1}) + \frac{1}{2}\|x - x^{k+1}\|^2 \leq f_k(x), \quad \forall x \in C. \tag{2.9}$$

Thay $x = x^*$ trong(2.9) và sử dụng định nghĩa (2.7) của f_k, ta thu được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 &+ 2\rho[f(x^k, x^*) - f(x^k, x^{k+1})] \\ &- \|x^{k+1} - x^k\|^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Áp dụng điều kiện kiểu Lipschitz (2.4) với $x = x^k, y = x^{k+1}, z = x^*$, ta được

$$\begin{aligned} f(x^k, x^{k+1}) + f(x^{k+1}, x^*) &\geq f(x^k, x^*) - L_1\|x^k - x^{k+1}\|^2 - L_2\|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ \Rightarrow f(x^k, x^*) - f(x^k, x^{k+1}) &\leq f(x^{k+1}, x^*) + L_1\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &+ L_2\|x^{k+1} - x^*\|^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Do x^* là nghiệm của (EP) nên $f(x^*, x^{k+1}) \geq 0$. Từ đó, do tính giả đơn điệu mạnh của f, ta có

$$f(x^{k+1}, x^*) \leq -\beta\|x^{k+1} - x^*\|^2. \tag{2.12}$$

Từ (2.11) và (2.12), dẫn đến

$$\begin{aligned} f(x^k, x^*) - f(x^k, x^{k+1}) &\leq -\beta\|x^{k+1} - x^*\|^2 + L_1\|x^k - x^{k+1}\|^2 + L_2\|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &= -(\beta - L_2)\|x^{k+1} - x^*\|^2 + L_1\|x^{k+1} - x^k\|^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Thế (2.13) vào (2.10), do cách chọn của ρ, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1}-x^*\|^2 \le \|x^k-x^*\|^2 &+ 2\rho[-(\beta-L_2)\|x^{k+1}-x^*\|^2 \\
&+ L_1\|x^{k+1}-x^k\|^2] - \|x^{k+1}-x^k\|^2 \\
\Longrightarrow [1+2\rho(\beta-L_2)]\|x^{k+1}-x^*\|^2 &\le \|x^k-x^*\|^2 - (1-2\rho L_1)\|x^{k+1}-x^k\|^2 \\
&\le \|x^k-x^*\|^2. \\
\Longrightarrow \|x^{k+1}-x^*\|^2 &\le \frac{1}{1+2\rho(\beta-L_2)}\|x^k-x^*\|^2 \\
\Longrightarrow \|x^{k+1}-x^*\| &\le \alpha\|x^k-x^*\|. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Do $\alpha \in (0,1)$ nên từ (2.14) ta suy ra $x^k \to x^*$ khi $k \to +\infty$.

Cũng từ (2.14), ta có

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)\|x^k-x^*\| &\le \|x^k-x^*\| - \|x^{k+1}-x^*\| \le \|x^k-x^{k+1}\| \\
\Longrightarrow \|x^k-x^*\| &\le \frac{1}{1-\alpha}\|x^k-x^{k+1}\|,
\end{aligned}$$

Từ đó ta được đánh giá (2.6). □

Chú ý 2.2.1. *Ta gọi một điểm $x^k \in C$ là ε-nghiệm của (EP) nếu $\|x^k - x^*\| \le \varepsilon$, ở đó x^* là nghiệm chính xác của (EP). Trong Thuật toán 2.2.1, nếu thuật toán dừng tại bước k, tức $x^{k+1} = x^k$ thì x^k là nghiệm. Trường hợp thuật toán không dừng thì dãy lặp $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.2.1 hội tụ tốc độ tuyến tính đến nghiệm duy nhất x^* của (EP) với đánh giá (2.6). Do đó trong thực tế tính toán, ta có thể dừng thuật toán khi khoảng cách giữa hai điểm lặp này nhỏ thua một sai số cho trước.*

2.2.2. Thuật toán với hệ số hiệu chỉnh không phụ thuộc điều kiện kiểu Lipschitz

Thuật toán 2.2.1, hệ số hiệu chỉnh ρ được chọn dựa trên hằng số Lipschitz. Thuật toán tiếp theo đây giúp tránh được điều đó, tuy nhiên với việc các hệ số bước hội tụ tới 0, thuật toán không đạt được tốc độ hội tụ tuyến tính nữa.

Thuật toán 2.2.2. *Cho trước một dãy các số thực dương* $\{\rho_k\}_{k\geq 0}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \rho_k = 0.$$

Lấy $x^0 \in C$ *và đặt* $k = 0$.

Tại mỗi bước $k = 0, 1, \ldots,$ *giải bài toán tối ưu lồi mạnh*

$$\min_{y\in C}\{\rho_k f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2\}$$

được nghiệm duy nhất x^{k+1}.

Nếu $x^{k+1} = x^k$ *thì dừng,* x^k *là nghiệm của bài toán* (EP)*. Trái lại, tăng* $k \to k+1$.

Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.2. *Giả sử* f *là song hàm giả đơn điệu mạnh với hệ số* β *trên* C *và thỏa mãn các giả thiết (A1), (A2) và điều kiện kiểu Lipschitz (2.4) với* $L_2 < \beta$*. Cho* $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *là dãy sinh bởi Thuật toán 2.2.2 và* x^* *là nghiệm duy nhất của* (EP)*. Khi đó tồn tại một chỉ số* $k_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho với mỗi* $k > k_0$,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^{k}[1 + 2\rho_k(\beta - L_2)]}}\|x^{k_0} - x^*\|. \tag{2.15}$$

Hơn nữa, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^{k}[1 + 2\rho_k(\beta - L_2)]}} = 0, \tag{2.16}$$

và do đó nếu thuật toán không dừng thì $\{x^k\}$ *hội tụ mạnh đến* x^*.

Chứng minh. Tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.2.1, với mỗi k ta có

$$[1+2\rho_k(\beta-L_2)]\|x^{k+1}-x^*\|^2 \le \|x^k-x^*\|^2-(1-2\rho_k L_1)\|x^{k+1}-x^k\|^2.$$

Từ giả thiết $\lim_{k\to\infty}\rho_k=0$, tồn tại $k_0\in\mathbb{N}$ sao cho $1-2\rho_k L_1>0$, với mọi $k\ge k_0$. Do đó

$$\begin{aligned}
[1+2\rho_k(\beta &- L_2)]\|x^{k+1}-x^*\|^2 \le \|x^k-x^*\|^2 \quad \forall k\ge k_0\\
\Longrightarrow \|x^{k+1}-x^*\| &\le \frac{1}{\sqrt{1+2\rho_k(\beta-L_2)}}\|x^k-x^*\| \quad \forall k\ge k_0.
\end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$\|x^{k+1}-x^*\|\le\frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^{k}[1+2\rho_i(\beta-L_2)]}}\|x^{k_0}-x^*\|,$$

tức là (2.15) được chứng minh.

Đặt $\alpha_k:=2\rho_k(\beta-L_2)>0$, ta có

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\alpha_k=2(\beta-L_2)\sum_{k=k_0}^{\infty}\rho_k=\infty,$$

kéo theo

$$\frac{1}{\prod_{i=k_0}^{k}(1+\alpha_i)}\le\frac{1}{1+\sum_{i=k_0}^{k}\alpha_i}\to 0,\ \text{khi } k\to\infty.$$

Do đó từ (2.15), ta được $x^k\to x^*$ khi $k\to+\infty$. □

Chú ý 2.2.2. *Trong trường hợp bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP):*

$$\textit{Tìm } x^*\in C \textit{ sao cho } \langle F(x^*),y-x^*\rangle\ge 0,\ \forall y\in C,$$

ở đó $F:C\to\mathcal{H}$ là toán tử giả đơn điệu mạnh hệ số $\mu>0$ và liên tục L-Lipschitz trên C, với song hàm f xác định bởi

$$f(x,y)=\langle F(x),y-x\rangle,$$

ta luôn có thể chọn được tham số $m > 0$ sao cho $L_2 = \dfrac{L}{2m} < \mu$.

Khi đó, phép lặp trong Thuật toán 2.2.2 trở thành phép chiếu cải biên xác định bởi

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \rho_k F(x^k)).$$

Sự hội tụ của thuật toán chiếu cải biên cho bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu mạnh đã được các tác giả trong [48] nghiên cứu. Các Thuật toán 2.2.1 và 2.2.2 có thể coi như là sự mở rộng của các kết quả đó.

Ví dụ sau chhỉ ra rằng Thuật toán 2.2.2 không hội tụ tuyến tính. Cho $C = \mathcal{H} = \mathbb{R}$ và $f(x, y) = x(y - x)$. Dễ thấy, $f(x, y)$ là song hàm đơn điệu mạnh với hệ số $\beta = 1$ trên C và thỏa mãn điều kiện dạng Lipschitz với $L_1 = L_2 = \dfrac{1}{2}$. Bài toán (EP) có nghiệm duy nhất $x^* = 0$.

Cho $\{\rho_k\}_{k\geq 0} \subset (0, 1)$ sao cho $\rho_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Xuất phát từ một điểm $x^0 \neq 0$ tùy ý. Theo thuật toán ta có

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \underset{y\in C}{\operatorname{argmin}}\{\rho_k f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2\} \\ &= \underset{y\in C}{\operatorname{argmin}}\{\rho_k x^k(y - x^k) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2\} = (1 - \rho_k)x^k, \end{aligned}$$

cùng với điều kiện $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$ and $x^k \neq 0$ for all $k \in \mathbb{N}$, ta suy ra $\{x^k\}$ hội tụ về $x^* = 0$ nhưng tốc độ hội tụ không tuyến tính.

2.2.3. Thuật toán dưới vi phân xấp xỉ cho song hàm không cần điều kiện kiểu Lipschitz

Thuật toán tiếp theo đây áp dụng cho lớp bài toán mà ở đó song hàm f không cần giả thiết khả dưới vi phân. Hơn nữa, giả thiết cho bài toán được giảm nhẹ đi nhiều khi không cần điều kiện kiểu Lipschitz cho song hàm f nữa.

Thuật toán 2.2.3. *Chọn sai số $\epsilon \geq 0$ và các dãy số $\{\rho_k\}_{k\geq 0} \subset (0, \infty)$ và $\{\epsilon_k\}_{k\geq 0} \subset [0, \infty)$ thỏa mãn*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {\rho_k}^2 < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \epsilon_k < +\infty.$$

Lấy $x^0 \in C$ và đặt $k = 0$.

Bước 1: *Lấy $g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x^k, x^k)$, tức là*

$$f(x^k, y) + \langle g^k, x^k - y \rangle \geq -\epsilon_k \; \forall y \in C \tag{2.17}$$

a) Nếu $g^k = 0$ và $\epsilon_k \leq \epsilon$ thì dừng: x^k là một ϵ-nghiệm.

b) Nếu $g^k = 0$ và $\epsilon_k > \epsilon$, quay trở lại Bước 1 và tăng $k \to k + 1$.

Bước 2: *Giải bài toán tối ưu lồi mạnh*

$$\min_{y \in C} \{\rho_k f(x^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2\}$$

được nghiệm duy nhất x^{k+1}.

Nếu $x^{k+1} = x^k$ thì dừng: x^k là một nghiệm. Nếu không thì trở lại Bước 1 và tăng $k \to k + 1$.

Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.3. *Giả sử hàm f giả đơn điệu mạnh trên C với hệ số β, thỏa mãn các giả thiết (A1), (A2a). Xét dãy $\{x^k\}_{k\geq 0}$ sinh bởi Thuật toán 2.2.3.*

(i) Nếu thuật toán dừng tại bước lặp k trong Bước 1 thì x^k là một ϵ-nghiệm.

(ii) Ta có đánh giá sau

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - 2\beta\rho_k)\|x^k - x^*\|^2 + \rho_k^2 \|g^k\|^2 + 2\rho_k \epsilon_k \; \forall k, \tag{2.18}$$

ở đó x^* là nghiệm duy nhất của (EP). Hơn nữa, nếu $\{g^k\}$ bị chặn thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh đến x^*.

Chứng minh. (i) Nếu thuật toán dừng tại Bước 1, khi đó $g^k = 0$ và $\epsilon_k \leq \epsilon$. Do điều kiện (2.17), $f(x^k, y) \geq -\epsilon_k \geq -\epsilon$ với mọi $y \in C$. Vì vậy, x^k là một ϵ-nghiệm.

(ii) Sử dụng lập luận như trong chứng minh của Định lý 2.2.1, với mỗi k ta có

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\rho_k[f(x^k, x^*) - f(x^k, x^{k+1})] - \|x^{k+1} - x^k\|^2. \tag{2.19}$$

Từ (2.17), ta có

$$f(x^k, x^{k+1}) \geq \langle g^k, x^{k+1} - x^k \rangle - \epsilon_k. \tag{2.20}$$

Do tính giả đơn điệu mạnh trên C với hệ số β của f và x^* là nghiệm của (EP), ta có

$$f(x^k, x^*) \leq -\beta\|x^k - x^*\|^2. \tag{2.21}$$

Từ các đánh giá (2.19), (2.20) và (2.21) ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - 2\beta\rho_k)\|x^k - x^*\|^2 - 2\rho_k\langle g^k, x^{k+1} - x^k \rangle \\
&\qquad\qquad + 2\rho_k\epsilon_k - \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= (1 - 2\beta\rho_k)\|x^k - x^*\|^2 + \rho_k^2\|g^k\|^2 + 2\rho_k\epsilon_k \\
&\qquad\qquad - \|x^{k+1} - x^k + \rho_k g^k\|^2 \\
&\leq (1 - 2\beta\rho_k)\|x^k - x^*\|^2 + \rho_k^2\|g^k\|^2 + 2\rho_k\epsilon_k.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có (2.18) được chứng minh. Giả sử $\{g^k\}$ bị chặn, khi đó có $M > 0$ sao cho $\|g^k\| \leq M$ với mọi k. Từ (2.18), ta được

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - 2\beta\rho_k)\|x^k - x^*\|^2 + M^2\rho_k^2 + 2\rho_k\epsilon_k. \tag{2.22}$$

Do $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = +\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < +\infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k\epsilon_k < +\infty$, theo Bổ đề 1.2.6, từ (2.22) ta suy ra $\|x^k - x^*\| \to 0$ khi $k \to \infty$. □

Sử dụng ví dụ như trong Mục 2.2.2 ta cũng kiểm tra được sự hội tụ của Thuật toán 2.2.3 là không tuyến tính.

2.3. Kết luận chương

Các kết quả chính đạt được trong chương này là:

1. Chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh.

2. Đề xuất ba thuật toán chiếu cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh:

   - Chứng minh được thuật toán có tốc độ hội tụ tuyến tính khi song hàm có tính chất kiểu Lipschitz và tham số hiệu chỉnh được chọn phụ thuộc vào hệ số giả đơn điệu mạnh và hằng số Lipschitz.

   - Chứng minh được sự hội tụ của thuật toán chiếu mà không đòi hỏi phải biết các hằng số Lipschitz. Đưa ra ví dụ cho thấy thuật toán không có tốc độ hội tụ tuyến tính.

   - Xây dựng một thuật toán trong đó không đòi hỏi điều kiện kiểu Lipschitz và điều kiện khả dưới vi phân theo biến thứ hai của song hàm. Trường hợp này thuật toán cũng không có được sự hội tụ tuyến tính.

Chương 3

Thuật toán tách cho bài toán cân bằng

Đối với việc giải bài toán phụ tối ưu lồi mạnh ở mỗi bước lặp của các thuật toán đã trình bày trong chương trước, một yếu tố rất ảnh hưởng đến tốc độ tính toán chính là cấu trúc của song hàm f. Điều đó dẫn đến việc xét trường hợp song hàm cân bằng ban đầu là tổng của hai hay nhiều song hàm khác, trong đó mỗi song hàm thành phần có những tính chất đặc thù mà ta có thể khai thác khi giải bài toán phụ tối ưu lồi mạnh nói trên, trong khi đó song hàm tổng lại không có được những tính chất đặc thù ấy. Cụ thể, trong chương này, chúng tôi xét song hàm f có thể đưa về dạng

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y),$$

mà mỗi song hàm thành phần có thể có những cấu trúc riêng giúp cho việc tính toán thuận lợi hơn so với song hàm tổng. Một ví dụ điển hình là bài toán tối ưu khi hàm mục tiêu là tổng của một hàm toàn phương nhưng không tách biến và một hàm tách biến nhưng không toàn phương, khi đó hàm tổng không được bảo toàn tính toàn phương hay tách biến nên không tận dụng được các tính chất này. Ngoài ra, có thể thấy trong một số bài toán, song hàm mục tiêu cũng có sẵn cấu trúc dạng này, ví dụ như trong phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, phương pháp điểm gần kề, trong bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp hay trong một bài toán quan trọng của tin học là bài toán Lasso ...

Phương pháp giải những bài toán dạng này gần đây cũng đã được một vài tác giả trong và ngoài nước quan tâm. Trong [62], tác giả đưa ra thuật toán mà tại mỗi bước lặp, phải giải các bài toán cân bằng phụ sau:

$$\begin{cases} \text{Tìm } y^k, z^k \text{ sao cho} \\ f_1(y^k, y) + \dfrac{1}{r_k}\langle y^k - x^k, y - y^k\rangle \geq 0 \ \forall y \in C, \\ f_2(z^k, y) + \dfrac{1}{r_k}\langle z^k - x^k, y - z^k\rangle \geq 0 \ \forall y \in C. \end{cases}$$

Tính toán đơn giản hơn, trong [7, 39], tại mỗi bước lặp, các bài toán cân bằng phụ được thay bằng các bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\begin{cases} y^k = \arg\min\{\lambda_k f_1(x^k, y) + \dfrac{1}{2}\|y - x^k\|^2 | y \in C\}, \\ x^{k+1} = \arg\min\{\lambda_k f_2(y^k, y) + \dfrac{1}{2}\|y - y^k\|^2 | y \in C\}. \end{cases}$$

Tuy nhiên, trong thuật toán này, để bảo đảm sự hội tụ, các song hàm f_1, f_2 cần thỏa mãn điều kiện liên tục Hölder, là điều kiện tương đối nặng.

Bằng cách cập nhật tại từng bước cho tham số λ_k, chúng tôi đưa ra thuật toán mà trong đó các song hàm f_1, f_2 được giải phóng khỏi điều kiện liên tục Hölder.

Các kết quả trong chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M. Duc, Le X. Thanh: Subgradient algorithms for solving equilibrium problems invoving the sum of two monotone bifunctions: Application to the Nash-Cournot Model (đã gửi đăng)".

3.1. Thuật toán và sự hội tụ

Cho C là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Trong mục này ta xét song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ được phân tích thành tổng của hai song hàm $f_1, f_2 : C \times C \to \mathbb{R}$ như sau:

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) \ \forall x, y \in C.$$

Các giả thiết áp dụng cho song hàm f và $f_i,\ i = 1, 2$ như sau:

(B1) $f(., y)$ là nửa liên tục trên ở trên C với mỗi $y \in C$; $f(x, .)$ là nửa liên tục dưới ở trên C với mỗi $x \in C$;

(B2) $f_i(x, x) = 0 \ \forall x \in C$;

(B3) $f_i(x, .)$ là các hàm lồi và khả dưới vi phân trên C với mỗi $x \in C$.

Với các giả thiết (B1)-(B3), tập nghiệm (SEP) của (EP) là một tập lồi đóng. Trong mục này ta giả thiết rằng (SEP) không rỗng.

Một thuật toán ergodic giải bài toán (EP) như sau:

Thuật toán 3.1.1. *Chọn dãy* $\{\beta_k\}_{k\geq 0} \subset (0, 1)$ *thỏa mãn các điều kiện*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = +\infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty. \tag{3.1}$$

Lấy $x^0 \in C$ *and* $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$, *lấy* $g_1^k \in \partial_2 f_1(x^k, x^k), g_2^k \in \partial_2 f_2(x^k, x^k)$ *rồi xác định*

$$\begin{cases} \eta_k := \max\{\beta_k, \|g_1^k\|, \|g_2^k\|\}, \ \lambda_k = \dfrac{\beta_k}{\eta_k} \\ y^k = \arg\min\{\lambda_k f_1(x^k, y) + \dfrac{1}{2}\|y - x^k\|^2 | y \in C\} \\ x^{k+1} = \arg\min\{\lambda_k f_2(x^k, y) + \dfrac{1}{2}\|y - y^k\|^2 | y \in C\} \end{cases}$$

và đặt

$$z^k = \frac{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x^i}{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i}, k = 0, 1, \ldots$$

Chú ý rằng, nếu $f_1 \equiv 0$, khi đó $y^k = x^k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Trong trường hợp này, với song hàm f là đơn điệu trên C thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên có thể không hội tụ về nghiệm của bài toán. Một phản ví dụ quen thuộc minh họa cho điều này trong [36] như sau:

Xét trong $\mathbb{R}^2$, $C := \mathbb{R}^2$ và song hàm

$$f_2(x, y) := \langle Ax, y - x \rangle$$

với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy, $x^* = (0, 0)^T$ là nghiệm duy nhất của bài toán. Với $x^0 \neq 0$ tùy ý, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán một lần chiếu được cho bởi

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k A x^k = (x_1^k - \lambda_k x_2^k, x_2^k + \lambda_k x_1^k)^T.$$

Do đó, $\|x^{k+1}\|^2 = (1 + \lambda_k^2)\|x^k\|^2 > \|x^k\|^2 > 0$, suy ra dãy $\{x^k\}$ không hội tụ về nghiệm $x^* = 0$.

Tuy nhiên, dãy $\{z^k\}$ lại hội tụ đến một nghiệm của bài toán (EP). Điều này được bảo đảm qua các định lý về sự hội tụ trình bày dưới đây.

Để chứng minh sự hội tụ của Thuật toán 3.1.1, chúng tôi cần thêm giả thiết sau:

(B4) Dãy $\{g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)\}$ bị chặn nếu dãy $\{x^k\}$ bị chặn.

Một điều kiện thỏa mãn giả thiết (B4) được trình bày trong [91] như sau:

Mệnh đề 3.1.1. *([91], Mệnh đề 4.1) Cho song hàm $f : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện (A2), và liên tục yếu đồng thời trên $\Delta \times \Delta$, ở đó Δ là một tập lồi mở chứa C, theo nghĩa, nếu $x, y \in \Delta$, $\{x^n\}$ và $\{y^n\}$ là các dãy con trong Δ mà $x^n \rightharpoonup x, y^n \rightharpoonup y$ thì $f(x^n, y^n) \to f(x, y)$. Giả sử $\bar{u}, \bar{v} \in \Delta$, $\{u^n\}$ và $\{v^n\}$ là các dãy con trong Δ mà $u^n \rightharpoonup \bar{u}, v^n \rightharpoonup \bar{v}$. Khi đó, với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\eta > 0$ và $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sao cho*

$$\partial_2 f(u^n, v^n) \subset \partial_2 f(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\epsilon}{\eta} B,$$

với mọi $n > n_\epsilon$, ở đó B là hình cầu đơn vị trong $\mathcal{H}$.

Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu như sau.

Định lý 3.1.1. *Giả sử các điều kiện (B1)-(B4) được thỏa mãn, f là song hàm giả đơn điệu trên C và $f(., y)$ lõm với mỗi $y \in C$. Ngoài ra, với mỗi $x \in C, f_i(x, .)$ $(i = 1, 2)$ liên tục tại một điểm nào đó thuộc C hoặc $intC \neq \emptyset$. Khi đó dãy $\{z^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu về một nghiệm của (EP).*

Chứng minh. Ta sẽ chỉ ra rằng các điều kiện của Bổ đề 1.2.7 được thỏa mãn.

i.Với mỗi $x^* \in (SEP)$, dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ hội tụ.

Với mỗi $k \geq 0$, để đơn giản ta đặt

$$h_1^k(x) := \lambda_k f_1(x^k, x) + \frac{1}{2}\|x - x^k\|^2,$$
$$h_2^k(x) := \lambda_k f_2(x^k, x) + \frac{1}{2}\|x - y^k\|^2.$$

Do giả thiết (B3), hàm h_1^k lồi mạnh với hệ số 1 và khả dưới vi phân, nên ta có

$$h_1^k(y^k) + \langle u_1^k, x - y^k\rangle + \frac{1}{2}\|x - y^k\|^2 \leq h_1^k(x), \quad \forall x \in C, \tag{3.2}$$

với $u_1^k \in \partial h_1^k(y^k)$.

Mặt khác, từ định nghĩa của y^k, sử dụng điều kiện tối ưu cho bài toán quy hoạch lồi, ta có

$$0 \in \partial h_1^k(y^k) + N_C(y^k),$$

do đó tồn tại $-u_1^k \in N_C(y^k)$ sao cho $\langle u_1^k, x - y^k\rangle \geq 0,\ \forall x \in C$. Vì vậy, từ (3.2), với mỗi $x \in C$, ta có

$$\begin{aligned}
& h_1^k(y^k) + \frac{1}{2}\|x - y^k\|^2 \leq h_1^k(x) \\
\Leftrightarrow\ & \lambda_k f_1(x^k, y^k) + \frac{1}{2}\|y^k - x^k\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y^k\| \leq \lambda_k f_1(x^k, x) + \frac{1}{2}\|x - x^k\|^2 \\
\Leftrightarrow\ & \|y^k - x\|^2 \leq \|x^k - x\|^2 - \|y^k - x^k\|^2 \\
& \qquad + 2\lambda_k[f_1(x^k, x) - f_1(x^k, y^k)].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Lập luận tương tự cho h_2, ta được

$$\begin{aligned}
& h_2^k(x^{k+1}) + \frac{1}{2}\|x - x^{k+1}\|^2 \leq h_2^k(x) \\
\Longrightarrow\ & \|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|y^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - y^k\|^2 \\
& \qquad + 2\lambda_k[f_2(x^k, x) - f_2(x^k, x^{k+1})].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Kết hợp (3.3) và (3.4), cho ta

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k &- x\|^2 + 2\lambda_k[f_1(x^k, x) + f_2(x^k, x)] - \|y^k - x^k\|^2 \\
&- 2\lambda_k[f_1(x^k, y^k) + f_2(x^k, x^{k+1})] - \|x^{k+1} - y^k\|^2 \\
= \|x^k &- x\|^2 + 2\lambda_k f(x^k, x) - \|y^k - x^k\|^2 - \|x^{k+1} - y^k\|^2 \\
&- 2\lambda_k[(f_1(x^k, y^k) + f_2(x^k, x^{k+1})].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Từ $g_1^k \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$ và $f_1(x^k, x^k) = 0$, ta có

$$f_1(x^k, y^k) - f_1(x^k, x^k) \ \geq\ \langle g_1^k, y^k - x^k\rangle$$

$$\Rightarrow -2\lambda_k f_1(x^k, y^k) \ \leq \ -2\lambda_k \langle g_1^k, y^k - x^k\rangle. \tag{3.6}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và chú ý rằng $\|g_1^k\| \leq \eta_k$, từ (3.6), ta được

$$-2\lambda_k f_1(x^k, y^k) \ \leq \ 2\frac{\beta_k}{\eta_k}\eta_k\|y^k - x^k\| = 2\beta_k\|y^k - x^k\|. \tag{3.7}$$

Tương tự ta có

$$-2\lambda_k f_2(x^k, x^{k+1}) \ \leq \ 2\beta_k\|x^{k+1} - x^k\|. \tag{3.8}$$

Thế (3.7) và (3.8) vào (3.5), ta được

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k \ &- \ x\|^2 + 2\lambda_k f(x^k, x) - \|y^k - x^k\|^2 - \|x^{k+1} - y^k\|^2 \\ &+ \ 2\beta_k\|y^k - x^k\| + 2\beta_k\|x^{k+1} - x^k\|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Thay $x = x^k$ trong (3.9), do $f(x^k, x^k) = 0$, nên

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq 2\beta_k\|y^k - x^k\| \ &+ \ 2\beta_k\|x^{k+1} - x^k\| \\ &- \ \|y^k - x^k\|^2 - \|x^{k+1} - y^k\|^2 \\ \Longrightarrow (\|x^{k+1} - x^k\| - \beta_k)^2 + (\|y^k \ &- \ x^k\| - \beta_k)^2 + \|x^{k+1} - y^k\|^2 \leq 2\beta_k^2 \\ \Longrightarrow \|x^{k+1} - x^k\| \ &\leq \ 3\beta_k. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Từ (3.10) và (3.9), kéo theo

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k - x\|^2 + 2\lambda_k f(x^k, x) + 7\beta_k^2. \tag{3.11}$$

Giả sử $x^* \in (SEP)$. Thay $x = x^*$ trong (3.11) và sử dụng tính giả đơn điệu của f, ta được

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 7\beta_k^2. \tag{3.12}$$

Từ (3.12) và điều kiện (3.1), theo Bổ đề 1.2.5, ta suy ra dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ hội tụ, và do đó dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Khi đó tồn tại $M > 0$ sao cho $\|x^k\| \leq$

$M\ \forall k = 0, 1, \dots$ Từ cách xác định của z^k, ta có

$$\|z^k\| = \|\frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i x^i}{\sum_{i=0}^k \lambda_i}\| \le \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i \|x^i\|}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} \le M,\ \forall k = 0, 1, \dots$$

điều đó có nghĩa dãy $\{z^k\}$ cũng bị chặn.

Do giả thiết (B4), các dãy $\{g_1^k\}, \{g_2^k\}$ bị chặn, cùng với điều kiện (3.1), tồn tại $K > 0$ sao cho $\|g_1^k\| \le K, \|g_2^k\| \le K, \beta_k \le K,\ \forall k = 0, 1, \dots$ Do đó, từ cách xác định của η_k, λ_k, ta có

$$\begin{aligned}
\eta_k &= \max\{\beta_k, \|g_1^k\|, \|g_2^k\|\} \le K \\
\Rightarrow \lambda_k &= \frac{\beta_k}{\eta_k} \ge \frac{\beta_k}{K},\ \forall k = 1, 2, \dots \\
\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k &= +\infty. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

ii. Mọi điểm tụ yếu của $\{z^k\}$ đều thuộc vào (SEP).

Giả sử $\bar{z}$ là một điểm tụ yếu của dãy $\{z^k\}$, khi đó tồn tại một dãy con $\{z^{k_j}\}$ của $\{z^k\}$ sao cho $z^{k_j} \rightharpoonup \bar{z}$.

Từ (3.11), với mọi $x \in C$, ta có

$$\begin{aligned}
2\lambda_k f(x^k, x) &\ge \|x^{k+1} - x\|^2 - \|x^k - x\|^2 - 7\beta_k^2 \\
\Rightarrow 2\sum_{i=0}^k \lambda_i f(x^i, x) &\ge \sum_{i=0}^k (\|x^{i+1} - x\|^2 - \|x^i - x\|^2 - 7\beta_i^2) \\
\Rightarrow \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i f(x^i, x)}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} &\ge \frac{\sum_{i=0}^k (\|x^{i+1} - x\|^2 - \|x^i - x\|^2 - 7\beta_i^2)}{2\sum_{i=0}^k \lambda_i}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Sử dụng tính lõm của $f(., x)$ và rút gọn (3.14), ta được

$$\begin{aligned}
f(z^k, x) &= f\Big(\frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i x^i}{\sum_{i=0}^k \lambda_i}, x\Big) \\
&\ge \frac{\|x^{k+1} - x\|^2 - \|x^0 - x\|^2 - 7\sum_{i=0}^k \beta_i^2}{2\sum_{i=0}^k \lambda_i}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Do điều kiện (3.1) và (3.13), nên từ (3.15),

$$\lim_{k\to\infty} \inf f(z^k, x) \geq 0.$$

Cụ thể, với dãy con $z^{k_j} \rightharpoonup \bar{z}$, do $f(., x)$ lõm và nửa liên tục trên ở trên C nên $f(., x)$ là nửa liên tục trên yếu ở trên C, ta được

$$f(\bar{z}, x) \geq 0, \ \forall x \in C,$$

điều đó có nghĩa $\bar{z} \in (SEP)$.

Vậy các điều kiện của Bổ đề 1.2.7 được thỏa mãn, do đó dãy $\{z^k\}$ hội tụ yếu đến một điểm $x^* \in (SEP)$. □

Trong Định lý 3.1.1, với song hàm f là giả đơn điệu, để đảm bảo cho sự hội tụ của dãy lặp $\{z^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1.1 thì cần hàm $f(., y)$ là lõm trên C với mỗi $y \in C$. Các kết quả sau chỉ ra rằng tính lõm có thể bỏ nếu song hàm f là đơn điệu trên C. Hơn nữa, nếu song hàm f là giả đơn điệu mạnh thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán.

Định lý 3.1.2. *Với các giả thiết (B1)-(B4), song hàm f đơn điệu trên C, thì dãy $\{z^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ yếu đến một điểm $x^* \in (SEP)$.*

Chứng minh. Thật vậy, từ đánh giá (3.11) trong chứng minh của Định lý 3.1.1, với mọi $x \in C$, do tính đơn điệu của f, ta có

$$\begin{aligned}
2\lambda_k f(x, x^k) &\leq \|x^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 + 7\beta_k^2 \\
\Rightarrow 2\sum_{i=0}^{k} \lambda_k f(x, x^i) &\leq \sum_{i=0}^{k} (\|x^i - x\|^2 - \|x^{i+1} - x\|^2 + 7\beta_i^2) \\
\Rightarrow \frac{\sum_{i=0}^{k} \lambda_k f(x, x^i)}{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i} &\leq \frac{\sum_{i=0}^{k} (\|x^i - x\|^2 - \|x^{i+1} - x\|^2 + 7\beta_i^2)}{2\sum_{i=0}^{k} \lambda_i} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Sử dụng tính lồi của $f(x,.)$ và rút gọn (3.16), ta được

$$\begin{aligned} f(x, z^k) &= f\Big(x, \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i x^i}{\sum_{i=0}^k \lambda_i}\Big) \\ &\leq \frac{\|x^0 - x\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 + 7\sum_{i=0}^k \beta_i^2}{2\sum_{i=0}^k \lambda_i}. \qquad (3.17) \end{aligned}$$

Do điều kiện (3.1) và (3.13), nên từ (3.17),

$$\lim_{k\to\infty} \sup f(x, z^k) \leq 0.$$

Cụ thể, với dãy con $z^{k_j} \rightharpoonup \bar{z}$, do $f(x,.)$ lồi và nửa liên tục dưới ở trên C nên $f(x,.)$ là nửa liên tục dưới yếu trên C, ta có

$$f(x, \bar{z}) \leq 0, \ \forall x \in C.$$

Từ đó, kết hợp với Bổ đề 1.2.1, suy ra $\bar{z} \in (SDEP) = (SEP)$.

Như vậy, các giả thiết của Bổ đề 1.2.7 được thỏa mãn, do đó dãy $\{z^k\}$ hội tụ yếu đến một điểm $x^* \in (SEP)$. □

Ví dụ: Trong không gian chuỗi bình phương khả tổng $\mathcal{H} = \ell^2$, xét toán tử $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ xác định bởi

$$Ax = (-x_2, x_1, 0, \ldots) \text{ với } x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{H},$$

và các song hàm $f_1, f_2 : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$f_1(x, y) = \langle Ax, y - x\rangle, \ f_2(x, y) = \|y\|^2 - \|x\|^2$$

với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f_1(x, y) + f_1(y, x) &= \langle Ax - Ay, y - x\rangle \\ &= (y_2 - x_2)(y_1 - x_1) + (x_1 - y_1)(y_2 - x_2) = 0, \end{aligned}$$

nên f_1 đơn điệu. Ngoài ra ta có $\partial_2 f_1(x,x) = Ax$.

Tương tự cũng dễ kiểm tra được f_2 đơn điệu và $\partial_2 f_2(x,x) = 2x$.

Do đó song hàm $f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.2, nên bài toán cân bằng trong trường hợp này có thể giải được theo Thuật toán 3.1.1.

Định lý 3.1.3. *Với các giả thiết (B1)-(B4), song hàm f là giả đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1.1 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất x^* của (EP).*

Chứng minh. Thật vậy, từ đánh giá (3.11) trong chứng minh của Định lý 3.1.1, do tính giả đơn điệu mạnh của f, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k f(x^k, x^*) + 7\beta_k^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - 2\beta\lambda_k \|x^k - x^*\|^2 + 7\beta_k^2 \\
&= (1 - 2\beta\lambda_k)\|x^k - x^*\|^2 + 7\beta_k^2.
\end{aligned}$$

Do đó, theo Bổ đề 1.2.6, ta được $\|x^k - x^*\| \to 0$ khi $k \to \infty$. □

So sánh với Thuật toán 2.2.2 trong Chương 2, ta có thể thấy trong Thuật toán 3.1.1 cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, song hàm cân bằng không đòi hỏi phải thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (2.4), điều này giúp cho lớp bài toán có thể áp dụng Thuật toán 3.1.1 được mở rộng hơn nhiều so với Thuật toán 2.2.2.

Chú ý 3.1.1. *Trong [7] và [39], các tác giả cũng sử dụng thuật toán tách để giải bài toán cân bằng, tuy nhiên để đảm bảo sự hội tụ của thuật toán đó thì các song hàm f_1, f_2 phải có tính chất liên tục Hölder theo một trong hai biến, được phát biểu như sau:*

Một hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục τ-Hölder theo biến thứ nhất (tương ứng, theo biến thứ hai) nếu tồn tại hằng số $L > 0$ và $\tau \in (0, 1]$ sao cho

$$|f(x, y) - f(z, y)| \leq L\|x - z\|^\tau \ \forall x, y, z \in C$$

$$(\textit{tương ứng, } |f(x, y) - f(x, z)| \leq L\|y - z\|^\tau \ \forall x, y, z \in C).$$

Tính liên tục Hölder khiến lớp hàm có thể áp dụng cho bài toán bị thu hẹp. Một ví dụ về song hàm không liên tục Hölder như sau:

$$h(x, y) = e^y - e^x, \ \textit{ với } x, y \in [0, +\infty).$$

Hàm h không liên tục Hölder trên $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ vì với $z = 0$ thì không tồn tại các hằng số $L > 0$ và $\tau \in (0, 1]$ thỏa mãn các bất đẳng thức trong định nghĩa về tính liên tục Hölder trên. Khi đó, bài toán cân bằng hỗn hợp dạng

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle + h(x, y),$$

với $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là ánh xạ đơn điệu và liên tục Lipschitz, sẽ không thỏa mãn điều kiện hội tụ của các thuật toán trong [7] và [39] khi áp dụng cho các song hàm $f_1(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle$, $f_2(x, y) = h(x, y)$.

Tuy nhiên, chú ý rằng với mỗi $x \in [0, +\infty)$ thì $h(x, .)$ là hàm lồi và đơn điệu trên $[0, +\infty)$ nên các song hàm đó đều thỏa mãn điều kiện của Định lý 3.1.2, đảm bảo sự hội tụ của dãy $\{z^k\}$ trong Thuật toán 3.1.1, và do đó có thể áp dụng thuật toán này để tính toán.

3.2. Tính toán thử nghiệm

Ví dụ 1: Trong ví dụ này, chúng tôi áp dụng Thuật toán 3.1.1 tìm điểm cân bằng Nash trong mô hình độc quyền Cournot. Giả thiết rằng có n

công ty cùng sản xuất một mặt hàng. Gọi x_i là lượng sản phẩm của công ty i sản xuất và $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là véc-tơ chỉ lượng sản phẩm của tất cả các công ty. Mỗi công ty thứ i có tập chiến lược $C_i \subset \mathbb{R}_+$ cho lượng sản phẩm của mình. Giả thiết rằng hàm giá cho sản phẩm của công ty i đưa ra là p_i được xác định bởi:

$$p_i(x) := \alpha - \sum_{k=1}^{n} \tau_{ik} x_k \quad (\alpha > 0, \tau_{ik} \geq 0).$$

Gọi $c_i(x_i)$ là chi phí sản xuất x_i sản phẩm của công ty i. Khi đó, lợi nhuận của công ty i được cho bởi:

$$q_i(x) = x_i p_i(x) - c_i(x_i).$$

Mỗi công ty đều tìm cách tối đa lợi nhuận của mình bằng cách sản xuất lượng sản phẩm tương ứng $x_i \in C_i$ dưới những giả định rằng lượng sản phẩm của các công ty khác là các tham số đầu vào. Một điểm $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in C = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ được gọi là một điểm cân bằng Nash của mô hình nêu trên nếu nó thỏa mãn

$$q_i(x^*[x_i]) \leq q_i(x^*) \qquad \forall x \in C, i = 1, \ldots, n,$$

ở đó $x^*([x_i]) = (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$. Điều này có nghĩa là nếu công ty nào không giữ lượng sản phẩm của mình trong mức cân bằng chung thì lợi nhuận của họ sẽ không tăng. Trong mô hình này, điểm cân bằng Nash x^* chính là nghiệm của bài toán cân bằng (EP) với

$$\begin{aligned} f(x,y) :=& \sum_{i=1}^{n} \left(q_i(x) - q_i(x[y_i])\right) \\ =& \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{ik} x_k \right) (y_i - x_i) + \sum_{i=1}^{n} \tau_{ii} y_i (y_i - x_i) - \alpha \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(c_i(y_i)-c_i(x_i))$$
$$=\langle Px+Qy-\bar{\alpha}, y-x\rangle + h(y)-h(x),$$

ở đó

$$P := \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{bmatrix}, \qquad Q := \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \tau_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\alpha} := (\alpha, \dots, \alpha)^T, \qquad h(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i).$$

Đặt

$$\varphi(x,y) := \langle (P+Q)x-\bar{\alpha}, y-x\rangle + h(y)-h(x),$$

ta được

$$f(x,y) = \varphi(x,y) + \langle Q(y-x), y-x\rangle.$$

Do Q là ma trận nửa xác định dương, nên theo Mệnh đề 2.1 trong [58], tập nghiệm của bài toán cân bằng

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*,y) \geq 0, \ \forall y \in C$$

trùng với tập nghiệm của bài toán cân bằng

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \varphi(x^*,y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Do đó, việc tìm nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm f có thể chuyển thành tìm nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm φ. Áp dụng Thuật toán 3.1.1, ta tách song hàm $\varphi(x,y)$ thành tổng hai hàm như sau:

$$\varphi(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y),$$

với

$$f_1(x, y) := \langle (P + Q)x - \bar{\alpha}, y - x \rangle,$$
$$f_2(x, y) := h(y) - h(x) = \sum_{i=1}^{n} (c_i(y_i) - c_i(x_i)) .$$

Trong thử nghiệm số, chúng tôi xét mô hình Nash-Cournot với hàm chi phí có dạng

$$c_i(x_i) := a_i e^{b_i x_i},\ i = 1, \ldots, n,$$

trong đó $x_i \in C_i \subset \mathbb{R}_+, a_i, b_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

Có thể thấy được các song hàm f_1, f_2 thỏa mãn các điều kiện (B1)-(B4). Đồng thời, nếu $P + Q$ là ma trận nửa xác định dương thì song hàm φ đơn điệu trên C. Khi đó các điều kiện của Định lý 3.1.2 được thỏa mãn.

Trong tính toán với các giá trị cụ thể, chúng tôi xét $C_i = [10, 50]$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Các tham số a_i được chọn ngẫu nhiên trong khoảng $[0.1, 1]$ và b_i được chọn ngẫu nhiên trong khoảng $[0.01, 0.1]$. Chúng tôi chạy thử nghiệm để kiểm tra tác động của điểm chọn ban đầu, của tham số bước β_k và số chiều n lên tốc độ hội tụ và độ chính xác của dãy lặp thu được. Trong các thử nghiệm, chúng tôi chọn các tham số $\tau_{ii} = 0.5, i = 1, \ldots, n$ và $\tau_{ij} = 1,\ i \neq j,\ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$. Điều kiện dừng cho thuật toán là $\|z^{k+1} - z^k\| < 10^{-3}$ hoặc khi số bước lặp nhiều hơn 10^4. Chương trình được thử nghiệm bằng phần mềm MATLAB R2016a chạy trên máy tính với chip Core i5, RAM 4GB và hệ điều hành Windows 7.

Bảng 3.1 là các kết quả tính toán theo Thuật toán 3.1.1 với số chiều $n = 10$, tham số $\alpha = 200$. Có 3 điểm xuất phát được chọn khác nhau và

3 cách chọn dãy tham số β_k. Ba điểm xuất phát được chọn bởi:

$$x^a = (10, 10, \dots, 10), \quad x^b = (30, 30, \dots, 30), \quad x^c = (50, 50, \dots, 50).$$

Trong mỗi thử nghiệm, giá trị gần đúng Error $= |\min_{y\in C} \varphi(z^*, y)|$, với z^* được chọn là giá trị z^k ở bước cuối cùng khi thuật toán dừng. Giá trị này thể hiện độ chính xác của nghiệm xấp xỉ z^* vì khi $\min_{y\in C} \varphi(z^*, y) = 0$ thì z^* là nghiệm của bài toán cân bằng.

Điểm xuất phát	β_k	Số bước lặp	Error
$x^0 = x^a$	$10/(k+1)$	2196	17.666
	$100/(k+1)$	5301	1.446
	$1000/(k+1)$	4118	0.508
$x^0 = x^b$	$10/(k+1)$	2195	5.782
	$100/(k+1)$	5315	1.144
	$1000/(k+1)$	4115	2.717
$x^0 = x^c$	$10/(k+1)$	8903	722.607
	$100/(k+1)$	5310	1.704
	$1000/(k+1)$	4117	14.418

Bảng 3.1: Thuật toán 3.1.1 với các điểm xuất phát và các tham số β_k khác nhau.

Từ Bảng 3.1, có thể thấy số bước tính và độ chính xác của nghiệm xấp xỉ là khác nhau tùy theo điểm xuất phát và dãy tham số $\{\beta_k\}$, trong đó dãy tham số với $\beta_k = 100/(k+1)$ cho nghiệm xấp xỉ khá tốt. Có một điều chú ý là, với mỗi dãy $\{\beta_k\}$, từ 3 điểm xuất phát khác nhau, các dãy nghiệm $\{z^k\}$ tương ứng đều hội tụ về một nghiệm chung. Tuy nhiên trong trường hợp $\beta_k = 10/(k+1)$, nghiệm xấp xỉ có các thành phần nằm trong khoảng $(10, 30)$ nên với 2 điểm xuất phát $x^0 = (10, \dots, 10)$ và $x^0 = (30, \dots, 30)$, nghiệm xấp xỉ của chúng khá gần nhau và tương đối tốt, còn với điểm xuất phát $x^0 = (50, \dots, 50)$, kết quả của thuật toán bị nhiễu khá nhiều.

Điều đó cho thấy việc chọn điểm xuất phát cũng có vai trò rất quan trọng trong kết quả của thuật toán.

Bảng 3.2 sau đây cho kết quả của Thuật toán 3.1.1 trong các trường hợp khác nhau của số chiều n. Trong thử nghiệm này, chúng tôi chọn điểm xuất phát $x^0 = (30, \dots, 30)$ và tham số $\alpha = 300$.

n	β_k	Số bước lặp	Error
10	$100/(k+1)$	3720	0.833
	$1000/(k+1)$	1897	1.399
15	$100/(k+1)$	5960	1.428
	$1000/(k+1)$	4516	8.298
20	$100/(k+1)$	4284	2.223
	$1000/(k+1)$	2072	51.301

Bảng 3.2: Thuật toán 3.1.1 với số chiều n và các tham số β_k khác nhau.

Bảng 3.2 cho thấy ngoài tham số β_k, sự chính xác của nghiệm xấp xỉ cũng phụ thuộc vào số chiều tính toán. Cũng dễ hiểu bởi khi số chiều tăng lên thì sai số gây nhiễu trong mỗi bước tính lớn hơn, do đó kết quả của thuật toán cũng bị sai lệch đi nhiều hơn. Đây cũng là một vấn đề chúng tôi quan tâm nghiên cứu tiếp theo để cải thiện độ chính xác của thuật toán hơn nữa.

Ví dụ 2: Trong ví dụ này, chúng tôi so sánh hiệu năng của Thuật toán 3.1.1 với thuật toán đề xuất trong [9]. Xét bài toán cân bằng (EP):

$$\text{Tìm } x \in C : f(x, y) \geq 0 \ \forall y \in C,$$

ở đó $C = C_1 \times \ldots \times C_5$ với $C_i = [1, 10], i = 1, \ldots, 5$, và

$$f(x, y) = \langle Px + Qy - \bar{\alpha}, y - x\rangle + \sum_{i=1}^{5}(y_i^3 - x_i^3),$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 8 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 4 & 8 & 0 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 21 & 23 & 17 & 15 & 21 \\ 23 & 50 & 36 & 21 & 18 \\ 17 & 36 & 76 & 27 & 60 \\ 15 & 21 & 27 & 25 & 27 \\ 21 & 18 & 60 & 27 & 66 \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^5_+.$$

Đặt

$$f_1(x,y) = \langle Px + Qy - \bar{\alpha}, y - x\rangle, \quad f_2(x,y) = \sum_{i=1}^{5}(y_i^3 - x_i^3),$$

ta được $f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)$.

Chú ý rằng $f_1(x,y)$ là hàm toàn phương nhưng không tách biến theo y, còn $f_2(x,y)$ không là toàn phương nhưng tách biến theo y.

Tại mỗi bước lặp của thuật toán đề xuất trong [9], ta tính

$$\begin{cases} x^{k+1} = \arg\min\{\tau_k f(x^k, y) + \dfrac{1}{2}\langle M(y - x^k), y - x^k\rangle | y \in C\}, \\ z^k = \dfrac{\sum_{i=0}^{k} \tau_i x^i}{\sum_{i=0}^{k} \tau_i}, k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

với M là một ma trận đối xứng xác định dương. Trong ví dụ so sánh này, chúng tôi chọn M là ma trận đơn vị, $\bar{\alpha} = (20, 20, 20, 20, 20)$.

Tham số bước trong Thuật toán 3.1.1 được chọn là $\beta_k = \dfrac{1}{k+1}$ và tham số của thuật toán trong [9] được chọn là $\tau_k = \dfrac{1}{k+1}$.

Trong các thử nghiệm, chương trình MATLAB dừng khi $\|z^{k+1} - z^k\| \leq 10^{-3}$, hoặc số bước lặp vượt quá 10^4.

Chúng tôi chọn ba điểm xuất phát khác nhau là:

$$x^a = (1, 10, 1, 10, 1),\ x^b = (5.5, 5.5, 5.5, 5.5, 5.5),\ x^c = (10, 10, 10, 10, 10).$$

Bảng sau so sánh hiệu năng của Thuật toán 3.1.1 (ký hiệu là ESGA) và thuật toán đề xuất trong [9] (ký hiệu là EA).

Điểm xuất phát	Thuật toán	Thời gian chạy (giây)
$x^0 = x^a$	ESGA	1.086
	EA	3.525
$x^0 = x^b$	ESGA	0.712
	EA	3.157
$x^0 = x^c$	ESGA	0.015
	EA	6.122

Bảng 3.3: So sánh hiệu năng của Thuật toán 3.1.1 với thuật toán trong [9]

Có thể thấy thuật toán chúng tôi đề xuất có thời gian tính toán tốt hơn so với thuật toán đề xuất trong [9]. Lý giải cho điều này, có thể thấy với việc tách song hàm $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, chúng ta có thể tận dụng được các cấu trúc đặc biệt của từng hàm thành phần như đã nêu ở trên, trong khi nếu để nguyên thì các cấu trúc đó không còn được bảo toàn nữa.

3.3. Kết luận chương

Kết quả đạt được trong Chương 4 bao gồm:

- Chứng minh được sự hội tụ yếu của thuật toán cho bài toán cân bằng đơn điệu và giả đơn điệu mà ở đó song hàm được tách thành tổng của hai hàm khác.

- Chứng minh được sự hội tụ mạnh của thuật toán cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh.

- Trình bày một kết quả tính toán thử nghiệm khi áp dụng thuật toán xây dựng ở trên để tìm điểm cân bằng Nash trong mô hình độc quyền Cournot và một ví dụ so sánh hiệu năng của thuật toán với một thuật toán đã có trước đó.

Chương 4

Thuật toán song song cho bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn

Một điểm chung của các thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng đã trình bày trong các chương trước là tại mỗi bước lặp, ta đều giải một số bài toán tối ưu lồi mạnh dạng

$$\min\{\epsilon f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}.$$

Việc tìm nghiệm của bài toán trên sẽ dễ thực hiện khi tập ràng buộc C là một tập dạng hiển hoặc có cấu trúc đơn giản. Tuy nhiên, khi C là một tập dạng ẩn như tập nghiệm của một bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân hay bài toán cân bằng, tức là bài toán cân bằng hai cấp, thì việc tính toán trên sẽ không dễ, thậm chí là không tính được.

Trong chương này chúng tôi trình bày thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp mà ở đó bài toán cấp hai, tức tập ràng buộc của bài toán, là tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn. Một số trường hợp riêng được xét đến khi bài toán cấp hai là các bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng hay bài toán bao hàm thức. Ở đây, thay vì tính toán trên giao của các tập nghiệm đó, nói chung là khó tính, thì chúng tôi tách ra tính trên từng miền riêng rồi tổ hợp lại, giúp cho việc tính toán đơn giản hơn rất nhiều. Đã có một số tác giả cả trong và ngoài nước nghiên cứu các thuật toán cho lớp bài toán dạng này như cho bài toán bất đẳng thức biến phân [22, 23, 94], bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại [84, 89, 96].

Bài toán chúng tôi xét trong chương này có dạng như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in S : f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in S, \qquad (BEF)$$

ở đó S là giao của các tập điểm bất động của các ánh xạ không giãn $T_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, (j = 1, ..., N)$ trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$, tức là,

$$S = \cap_{j=1}^{N} Fix(T_j),$$

và $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là một song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{H}$.

Trong chương này chúng tôi luôn giả thiết rằng tập S khác rỗng. Khi đó theo Bổ đề 1.2.4 ta có S là tập lồi, đóng.

Các kết quả cho bài toán trong chương này được trình bày dựa trên bài báo "Phung M. Duc, Le D. Muu: A splitting algorithm for a class of bilevel equilibrium problems involving nonexpansive mappings, *Optimization*, Vol 65, pages 1855-1866, 2016".

4.1. Thuật toán và sự hội tụ

Trước hết ta cần một số giả thiết cho song hàm f để đảm bảo cho sự hội tụ của thuật toán giải (BEF) sau.

Giả thiết

(C1) $f(.,y)$ nửa liên tục trên với mỗi $y \in \mathcal{H}$;

(C2) $f(x,.)$ lồi và khả dưới vi phân với mỗi $x \in \mathcal{H}$, $f(x^*,.)$ khả vi tại nghiệm x^* của bài toán;

(C3) f là song hàm đơn điệu mạnh với hệ số β trên $\mathcal{H}$;

(C4) Toán tử $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ xác định bởi $F(x) := \partial_2 f(x,x)$ liên tục Lipschitz với hệ số $L > 0$ trên $\mathcal{H}$.

Với các giả thiết (C1)-(C3), theo kết quả ở Chương 2, bài toán (BEF) luôn tồn tại duy nhất nghiệm.

Một số ví dụ về các song hàm thỏa mãn các giả thiết trên.

Ví dụ 1: Một lớp hàm thỏa mãn giả thiết (C4) là các song hàm f mà với mỗi $x \in \mathcal{H}$, hàm $f(x,.)$ là hàm đa diện lồi, tức là hàm có trên đồ thị là một đa diện lồi. Thật vậy, theo Định lý 23.10 trong [80] thì $F(x) = \partial_2 f(x,x)$ cũng là một đa diện lồi, từ đó, theo Ví dụ 9.35 trong [81], F liên tục Lipschitz trên dom$F$.

Ví dụ 2: Xét song hàm $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

$$f(x,y) = x|y| - y|x| + x(y-x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Có thể dễ dàng kiểm tra được f là đơn điệu mạnh trên toàn không gian.

Ta có $f(0,y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ nên $\partial_2 f(0,0) = \{0\}$.

Với $x \neq 0$ thì hàm $f(x,.)$ không khả vi tại $y = 0$ mà chỉ khả dưới vi phân tại đó, cụ thể:

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} -|x| \text{ với } y < 0 \\ x[-1,1] - |x| + x \text{ với } y = 0 \\ 2x - |x| \text{ với } y > 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có $\partial_2 f(x,x) = x$. Như vậy, trong trường hợp này thì

$$F(x) = \partial_2 f(x,x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

là một hàm liên tục Lipschitz với hệ số $L = 1$.

Để đảm bảo cho các thuật toán trong chương này là xác định, trước hết ta cần kết quả bổ trợ sau. Cho $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là một ánh xạ đa trị và $C \subseteq \mathrm{dom} F$. Với mỗi $x \in C$ và $g \in F(x)$, tính

$$y_g(x) := \arg\min\{\langle g, u - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|u - x\|^2 | u \in C\},$$

ở đó $\alpha > 0$. Ta có kết quả sau.

Bổ đề 4.1.1. *[8] Nếu F là toán tử đơn điệu mạnh với hệ số β và liên tục Lipschitz với hệ số L trên C, thì*

$$\|y_g(x) - y_{g'}(x')\|^2 \leq (1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2})\|x - x'\|^2,$$

$\forall x, x' \in C, \ \forall g \in F(x), \ g' = P_{F(x')}g.$

Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết (C1)-(C4). Ta có một thuật toán giải bài toán cân bằng (BEF) như sau.

Thuật toán 4.1.1. *Chọn $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, các trọng số $\mu_j > 0$ ($j = 1, ..., N$) sao cho $\sum_{j=1}^N \mu_j = 1$, và một dãy $\{\lambda_k\}_{k\geq 0} \subset (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| < +\infty. \qquad (4.1)$$

Lấy $x^0 \in \mathcal{H}, g^0 \in \partial_2 f(x^0, x^0)$ *và đặt* $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$, *lấy* $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ *sao cho*

$$\|g^k - g^{k-1}\| \le L\|x^k - x^{k-1}\|$$

và tính

$$\begin{cases} y^k := \arg\min\{\langle g^k, y - x^k\rangle + \dfrac{\alpha}{2}\|y - x^k\|^2 | y \in \mathcal{H}\} = x^k - \dfrac{1}{\alpha} g^k \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k) \sum_{j=1}^N \mu_j T_j(x^k). \end{cases}$$

Nhận xét: Trong [22], các tác giả trình bày một thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\text{Tìm } x^* \in S \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^*\rangle \ge 0, \ \forall y \in S, \qquad (VIP)$$

cũng với $S = \cap_{j=1}^N Fix(T_j)$.

Ở đó, xuất phát từ một điểm $x_0 \in \mathcal{H}$, tại mỗi bước lặp, ta tính

$$\begin{cases} y_0^0 = x_0 \\ y_k^i := (1 - \beta_k^i) y_k^{i-1} + \beta_k^i T_i y_k^{i-1}, \ i = 1, \ldots, N, \\ x^{k+1} := (1 - \beta_k^0) x_k + \beta_k^0 (I - \lambda_k \mu F) y_k^N, k \ge 0, \end{cases}$$

với các hệ số $\lambda_k, \beta_k^i, i = 0, \ldots, N$ thỏa mãn một số điều kiện để đảm bảo sự hội tụ của thuật toán.

Có thể thấy thuật toán trong [22], tại mỗi bước lặp ta phải tính tuần tự lần lượt các giá trị $y_k^i, \ i = 1, \ldots, N$ rồi mới có thể tính đến x^{k+1}. Còn trong Thuật toán 4.1.1, tại mỗi bước ta có thể tính độc lập cùng lúc các $T_j(x^k)$ rồi tổ hợp lại ta được x^{k+1}. Điều này giúp ta trong thực nghiệm có thể tính song song các giá trị, do đó tiết kiệm thời gian tính toán hơn.

Nhắc lại một giả thiết đã trình bày trong Chương 3, Mục 3.1:

(B4) Dãy $\{g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)\}$ bị chặn nếu dãy $\{x^k\}$ bị chặn.

Sự hội tụ của thuật toán được phát biểu như sau.

Định lý 4.1.1. *Giả sử f là song hàm thỏa mãn các giả thiết (C1)-(C4) và (B4). Khi đó dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 4.1.1 hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của (BEF).*

Chứng minh. Đặt $T = \sum_{j=1}^{N} \mu_j T_j$. Theo Bổ đề 1.2.4, ta có $S = \text{Fix}T$. Chứng minh được chia thành ba bước.

Bước 1: Ta chứng minh rằng các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}, \{T(x^k)\}$ bị chặn.

Thật vậy, từ định nghĩa của y^k, x^{k+1} và tính không giãn của T, ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\| &= \|\lambda_k y^k + (1-\lambda_k)T(x^k) - x^*\| \\ &= \|\lambda_k(y^k - x^*) + (1-\lambda_k)[T(x^k) - T(x^*)]\| \\ &\le \lambda_k\|y^k - x^*\| + (1-\lambda_k)\|T(x^k) - T(x^*)\| \\ &\le \lambda_k\|x^k - \frac{1}{\alpha}g^k - x^*\| + (1-\lambda_k)\|x^k - x^*\|.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Đặt $g^* = \nabla_2 f(x^*, x^*)$. Do f đơn điệu mạnh với hệ số β và $\partial_2 f(x,x)$ liên tục Lipschitz với hệ số L, theo Bổ đề 4.1.1, ta có

$$\begin{aligned}\|x^k - x^* - \frac{1}{\alpha}(g^k - g^*)\|^2 &= \|y^k - y^*\|^2 \\ &\le (1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2})\|x^k - x^*\|^2 \\ &= (1-\gamma)^2\|x^k - x^*\|^2,\end{aligned}$$

ở đó $0 < \gamma = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}} < 1$. Do đó

$$\|x^k - x^* - \frac{1}{\alpha}(g^k - g^*)\| \le (1-\gamma)\|x^k - x^*\|,$$

suy ra

$$\begin{aligned}\|x^k - \frac{1}{\alpha}g^k - x^*\| &\le \|x^k - x^* - \frac{1}{\alpha}(g^k - g^*)\| + \frac{1}{\alpha}\|g^*\| \\ &\le (1-\gamma)\|x^k - x^*\| + \frac{1}{\alpha}\|g^*\|.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Thay (4.3) vào (4.2), ta được

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\| &\le (1-\gamma\lambda_k)\|x^k - x^*\| + \frac{\lambda_k}{\alpha}\|g^*\| \\ &= (1-\gamma\lambda_k)\|x^k - x^*\| + \gamma\lambda_k\frac{\|g^*\|}{\alpha\gamma} \\ &\le \max\{\|x^k - x^*\|, \frac{\|g^*\|}{\alpha\gamma}\},\end{aligned} \tag{4.4}$$

từ đó, bằng quy nạp ta được

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le \max\{\|x^0 - x^*\|, \frac{\|g^*\|}{\alpha\gamma}\},$$

suy ra dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Do giả thiết (B4), dãy $\{g^k\}$ bị chặn và do đó các dãy $\{y^k\}, \{T(x^k)\}$ cũng bị chặn.

Bước 2: Ta chứng minh mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x^k\}$ đều là một điểm bất động của T.

Đầu tiên, từ giả thiết $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0$ và tính bị chặn của các dãy $\{y^k\}, \{T(x^k)\}$, ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - T(x^k)\| &= \|\lambda_k y^k + (1-\lambda_k)T(x^k) - T(x^k)\| \\ &= \lambda_k\|y^k - T(x^k)\| \to 0 \text{ khi } k\to\infty.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Mặt khác, đặt $K := \sup_{k\ge 0}\|x^k - \frac{1}{\alpha}g^k - T(x^k)\| < \infty$, lập luận tương tự trong Bước 1, ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^k\| \;&=\; \|\lambda_k x^k - \frac{\lambda_k}{\alpha}g^k + (1-\lambda_k)T(x^k) \\ &-\; (\lambda_{k-1}x^{k-1} - \frac{\lambda_{k-1}}{\alpha}g^{k-1} + (1-\lambda_{k-1})T(x^{k-1}))\| \\ = \|\lambda_k[x^k \;&-\; x^{k-1} - \frac{1}{\alpha}(g^k - g^{k-1})] + (1-\lambda_k)[T(x^k) - T(x^{k-1})] \\ &+\; (\lambda_k - \lambda_{k-1})[x^{k-1} - \frac{1}{\alpha}g^{k-1} - T(x^{k-1})]\| \\ \le \lambda_k\|x^k \;&-\; x^{k-1} - \frac{1}{\alpha}(g^k - g^{k-1})\| + (1-\lambda_k)\|T(x^k) - T(x^{k-1})\|\end{aligned}$$

$$+ \quad |\lambda_k - \lambda_{k-1}| \|x^{k-1} - \frac{1}{\alpha} g^{k-1} - T(x^{k-1})]\|$$
$$\leq (1 \quad - \quad \gamma\lambda_k)\|x^k - x^{k-1}\| + |\lambda_k - \lambda_{k-1}|K.$$

Từ $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| < +\infty$, theo Bổ đề 1.2.6, ta suy ra

$$\|x^{k+1} - x^k\| \to 0 \text{ khi } k \to \infty. \tag{4.6}$$

Từ (4.5) và (4.6) ta được

$$\|x^k - T(x^k)\| \leq \|x^{k+1} - x^k\| + \|x^{k+1} - T(x^k)\| \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Giả sử $\bar{x}$ là một điểm tụ yếu của dãy $\{x^k\}$. Khi đó tồn tại một dãy con $\{x^{k_j}\}$ của dãy $\{x^k\}$ sao cho $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$. Theo Bổ đề 1.2.2, ta được $T(\bar{x}) = \bar{x}$, tức là $\bar{x} \in \text{Fix}(T)$.

Bước 3: Ta chứng minh rằng $\|x^k - x^*\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|x^{k+1} - x^* + \frac{\lambda_k}{\alpha} g^* - \frac{\lambda_k}{\alpha} g^*\|^2 \\
&= \|x^{k+1} - x^* + \frac{\lambda_k}{\alpha} g^*\|^2 + \frac{\lambda_k^2}{\alpha^2}\|g^*\|^2 - 2\frac{\lambda_k}{\alpha}\langle g^*, x^{k+1} - x^* + \frac{\lambda_k}{\alpha} g^*\rangle \\
&= \|\lambda_k[x^k - x^* - \frac{1}{\alpha}(g^k - g^*)] + (1-\lambda_k)[T(x^k) - T(x^*)]\|^2 \\
&\qquad - 2\frac{\lambda_k}{\alpha}\langle g^*, x^{k+1} - x^*\rangle - \frac{\lambda_k^2}{\alpha^2}\|g^*\|^2 \\
&\leq \lambda_k\|x^k - x^* - \frac{1}{\alpha}(g^k - g^*)\|^2 + (1-\lambda_k)\|T(x^k) - T(x^*)\|^2 \\
&\qquad + 2\frac{\lambda_k}{\alpha}\langle -g^*, x^{k+1} - x^*\rangle \\
&\leq [1 - \frac{2\alpha\beta - L^2}{\alpha^2}\lambda_k]\|x^k - x^*\|^2 + 2\frac{\lambda_k}{\alpha}\langle -g^*, x^{k+1} - x^*\rangle.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Gọi $\{x^{k_j}\}$ là một dãy con của $\{x^k\}$ sao cho $x^{k_j} \to \bar{x}$ và

$$\limsup_{k\to\infty}\langle -g^*, x^{k+1} - x^*\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle -g^*, x^{k_j} - x^*\rangle = \langle -g^*, \bar{x} - x^*\rangle. \tag{4.8}$$

Theo Bước 2, $\bar{x} \in \text{Fix}(T) = S$. Do x^* là nghiệm của (BEF) và $g^* = \nabla_2 f(x^*, x^*)$, ta có

$$x^* = \arg\min\{f(x^*, x) : x \in S\}$$
$$\Longrightarrow 0 \in g^* + N_S(x^*)$$
$$\Longrightarrow \langle -g^*, x - x^* \rangle \le 0 \; \forall x \in S.$$

Suy ra $\langle -g^*, \bar{x} - x^* \rangle \le 0$. Do đó, từ (4.7) và (4.8), áp dụng Bổ đề 1.2.6 với $\sigma_k \equiv 0$, ta suy ra $\|x^k - x^*\| \to 0$ khi $k \to \infty$. □

Chú ý 4.1.1. *Nếu T_j chỉ xác định trên các tập con $C_j, j = 1, \ldots, N$, ta có thể mở rộng ra toàn không gian bằng cách đặt $T_j(x) = T_j(P_{C_j}(x))$ nếu $x \neq C_j$, mà tập điểm bất động của nó không thay đổi.*

Chú ý 4.1.2. *Ví dụ sau cho thấy thuật toán trên hội tụ không tuyến tính.*

Xét với $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ và $f(x, y) = x(y - x), T(x) = x$. Ta có $f(x, y)$ là song hàm đơn điệu mạnh với hệ số $\beta = 1$ trên $\mathbb{R}$ và $\partial_2 f(x, x) = \{x\}$ thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với $L = 1$. Bài toán (BEF) có một nghiệm duy nhất $x^* = 0$.

Lấy dãy $\{\lambda_k\}_{k\ge 0} \subset (0, 1)$ sao cho $\lambda_k \to 0$ khi $k \to \infty$ và $\alpha > 1$. Xuất phát từ một điểm tùy ý $x^0 \neq 0$. Theo thuật toán, ta có

$$y^k = x^k - \frac{1}{\alpha} x^k = (1 - \frac{1}{\alpha}) x^k$$
$$x^{k+1} = \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k) T x^k = (1 - \frac{1}{\alpha}\lambda_k) x^k,$$

kết hợp với giả thiết $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ và $x^k \neq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, suy ra $\{x^k\}$ hội tụ nhưng không tuyến tính đến nghiệm $x^* = 0$.

4.2. Một số trường hợp riêng

Trong mục này, ta xét một số trường hợp riêng của bài toán (BEF) mà ở đó tập ràng buộc là tập nghiệm chung của các bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược, tập nghiệm chung của các bài toán cân bằng đơn điệu hay tập không điểm của các ánh xạ đơn điệu cực đại và một áp dụng giải bài toán cực tiểu lồi mạnh.

1. Bài toán cân bằng với tập ràng buộc là tập nghiệm của các bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược.

Bài toán phát biểu như sau

$$\text{Tìm } x^* \in S \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in S, \qquad (BEVI)$$

ở đó S là tập nghiệm chung của các bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\text{Tìm } \bar{x} \in C_j \text{ sao cho } \langle F_j(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle \geq 0 \ \forall y \in C_j,$$

với $C_j \subseteq \mathcal{H}$ là các tập lồi đóng và $F_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, j = 1, 2, \ldots, m$.

Bổ đề sau cho phép biểu diễn bài toán $(BEVI)$ dưới dạng của (BEF).

Bổ đề 4.2.1. *Giả sử các ánh xạ F_j là đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$ với hệ số $\eta_j > 0, j = 1, 2, \ldots, m$. Khi đó các ánh xạ $T_j, j = 1, 2, \ldots, m$, xác định bởi*

$$T_j(x) = P_{C_j}(x - \xi F_j(x)) \ \ \forall x \in \mathcal{H},$$

là ánh xạ không giãn trên $\mathcal{H}$ với mọi $0 < \xi \leq 2\eta_j$. Hơn nữa, tập điểm bất động của T_j trùng với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\textit{Tìm } x^* \in C_j : \langle F_j(x^*), y - x^*\rangle \geq 0 \ \forall y \in C_j. \qquad VI(C_j, F_j)$$

Chứng minh. Từ giả thiết đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$ với hệ số η_j của F_j, ta có, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\|T_j(x) \quad - \quad T_j(y)\|^2 &= \|P_{C_j}(x - \xi F_j(x)) - P_{C_j}(y - \xi F_j(y))\|^2 \\
&\leq \|x - \xi F_j(x) - (y - \xi F_j(y))\|^2 \\
&= \|x - y - \xi(F_j(x) - F_j(y))\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2\xi\langle x - y, F_j(x) - F_j(y)\rangle + \xi^2\|F_j(x) - F_j(y)\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\xi\eta_j\|F_j(x) - F_j(y)\|^2 + \xi^2\|F_j(x) - F_j(y)\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 + \xi(\xi - 2\eta_j)\|F_j(x) - F_j(y)\|^2.
\end{aligned}$$

Do $0 < \xi \leq 2\eta_j$, nên

$$\|T_j(x) - T_j(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Hơn nữa, $x^* \in T_j(x^*)$ khi và chỉ khi $\langle x^* - \xi F_j(x^*) - x^*, y - x^*\rangle \leq 0$ với mọi $y \in C_j$. Do $\xi > 0$, ta có $\langle F_j(x^*), y - x^*\rangle \geq 0 \ \forall y \in C_j$, điều đó có nghĩa x^* là một nghiệm của $VI(C_j, F_j)$. □

Đặt S là giao của các tập nghiệm của các bài toán $VI(C_j, F_j)$ $(j = 1, ..., m)$, bài toán $(BEVI)$ được đưa về dạng của (BEF). Khi đó, một thuật toán giải bài toán $(BEVI)$ suy ra từ Thuật toán 4.1.1 như sau:

Thuật toán 4.2.1. *Chọn* $\mu_j > 0, \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, $\eta := \min\{\eta_j : j = 1, ..., m\}$, $\alpha > \dfrac{L^2}{2\beta}$, $0 < \xi \leq 2\eta$ *và chọn dãy* $\{\lambda_k\}_{k\geq 0} \subset (0, 1)$ *sao cho*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| < +\infty.$$

Lấy $x^0 \in \mathcal{H}, g^0 \in \partial_2 f(x^0, x^0)$ *và đặt* $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots,$ *lấy* $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ *sao cho*

$$\|g^k - g^{k-1}\| \leq L\|x^k - x^{k-1}\|$$

và tính

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha} g^k \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1-\lambda_k)\Big[\sum_{j=1}^m \mu_j P_{C_j}(x^k - \xi F_j(x^k))\Big]. \end{cases}$$

2. Bài toán cân bằng với các ràng buộc cân bằng đơn điệu.

Trong trường hợp này ta xét bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in S : f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in S \qquad (BEE)$$

với

$$S = \{x \in C_j : f_j(x, y) \geq 0 \ \forall y \in C_j (j = 1, ..., m)\},$$

ở đây f_j là các song hàm đơn điệu trên C_j với mọi $j = 1, .., m$.

Một trường hợp riêng, khi $f(x, y) = \langle x - u, y - x\rangle$, (BEE) trở thành bài toán tìm hình chiếu của phần tử u lên tập nghiệm của các bài toán cân bằng, được đề cập đến trong phương pháp hiệu chỉnh cho bài toán cân bằng được nghiên cứu bởi một số tác giả trong các bài báo [42, 50].

Giả thiết cho song hàm $f_j, j = 1, 2, \ldots, m$, trong bài toán (BEE):

(D1) $f_j(x, x) = 0$ với mọi $x \in C_j$;

(D2) f_j đơn điệu trên C_j, tức là $f_j(x, y) + f_j(y, x) \leq 0$ với mọi $x, y \in C_j$;

(D3) $f_j(., y)$ nửa liên tục trên theo tia, tức là với mỗi $x, y, z \in C_j$

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} f_j(\lambda z + (1-\lambda)x, y) \leq f_j(x, y);$$

(D4) Với mỗi $x \in C_j$, $f_j(x, .)$ là hàm lồi và nửa lên tục dưới trên C_j.

Bổ đề sau cho phép biểu diễn bài toán (BEE) dưới dạng của (BEF).

Bổ đề 4.2.2. *([27]) Cho $f_j : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các giả thiết (D1) - (D4). Với $r > 0$ và $x \in \mathcal{H}$, ta xác định ánh xạ $T^{f_j} : \mathcal{H} \longrightarrow C_j$ như sau:*

$$T^{f_j}(x) = \Big\{ z \in C_j : f_j(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0 \ \ \forall y \in C_j \Big\}$$

với mọi $x \in \mathcal{H}$. Khi đó:

(i) T^{f_j} xác định và đơn trị trên $\mathcal{H}$;

(ii) T^{f_j} là ánh xạ đơn điệu mạnh ngược với hệ số là 1, tức là, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\|T^{f_j}(x) - T^{f_j}(y)\|^2 \leq \langle T^{f_j}(x) - T^{f_j}(y), x - y\rangle;$$

(iii) Tập điểm bất động của T^{f_j} trùng với tập nghiệm của bài toán cân bằng

$$\text{Tìm } x^* \in C_j \text{ sao cho } f_j(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in C_j.$$

Áp dụng bổ đề trên, ta đưa bài toán (BEE) về dạng (BEF) và Thuật toán 4.1.1 cho trường hợp này có dạng như sau:

Thuật toán 4.2.2. *Chọn $\mu_j > 0, \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, lấy $\alpha > \dfrac{L^2}{2\beta}$ và dãy $\{\lambda_k\}_{k\geq 0} \subset (0, 1)$ sao cho*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty \ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| < +\infty.$$

Lấy $x^0 \in \mathcal{H}, g^0 \in \partial_2 f(x^0, x^0)$ và đặt $k = 0$.

Tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$, lấy $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ sao cho

$$\|g^k - g^{k-1}\| \leq L\|x^k - x^{k-1}\|$$

và tính

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha} g^k \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)\Big[\sum_{j=1}^m \mu_j T^{f_j}(x^k)\Big]. \end{cases}$$

Sự hội tụ mạnh của các dãy $\{x^k\}$ trong các Thuật toán 4.2.1 và Thuật toán 4.2.2 được suy ra từ Định lý 4.1.1. Điều đáng nói đến ở đây là trong Thuật toán 4.2.1 chỉ cần tính hình chiếu của một điểm trên từng C_j thay vì tính trên tập giao của chúng. Tương tự trong Thuật toán 4.2.2 ta chỉ tính giá trị của các ánh xạ gần kề T^{f_j}.

3. Bài toán cân bằng với ràng buộc bao hàm thức đơn điệu cực đại.

Cho $F_j : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}, j = 1, ..., m$ là các toán tử đơn điệu cực đại. Giả sử $\text{dom}F_j = C_j \neq \emptyset$. Do F_j đơn điệu cực đại, nên C_j là lồi đóng. Xét bài toán cân bằng với ràng buộc hệ bao hàm thức đơn điệu cực đại sau:

$$\text{Tìm } x^* \in S : f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in S, \qquad (BEI)$$

ở đó S là tập nghiệm của hệ $0 \in F_j(x), j = 1, ...m$. Giả thiết rằng S không rỗng. Ta xác định toán tử giải

$$T_j(x) := (I + F_j)^{-1}(x), \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Một kết quả quen thuộc trong [79] cho ta T_j là các toán tử đơn trị, không giãn trên toàn không gian và tập nghiệm của bao hàm thức $0 \in F_j(x)$ trùng với tập điểm bất động của T_j. Do đó bài toán (BEI) có thể đưa về dạng của bài toán (BEF). Áp dụng Thuật toán 4.1.1 cho bài toán (BEI), ta được dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm của bài toán (BEI), mà ở đó, trong mỗi bước lặp, ta chỉ tính giá trị của từng toán tử giải T_j rồi tổ hợp lại.

Chú ý rằng, trong thuật toán điểm gần kề của Rockafellar giải bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại trên không gian Hilbert [79], dãy lặp chỉ hội tụ yếu. Ở đây, nhờ cách tiếp cận hai cấp, ta thu được một dãy lặp hội tụ mạnh đến nghiệm chung của bài toán nói trên.

4. Áp dụng giải bài toán cực tiểu của một hàm lồi mạnh.

Xét bài toán:

$$\min\{\varphi(x) : x \in C := \cap_{j=1}^{m} C_j\}, \tag{MP}$$

ở đó $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi mạnh khả vi với $\nabla\varphi$ liên tục Lipschitz hệ số $L > 0$ trên $\mathcal{H}$, các tập C_j $(j = 1, ..., m)$ lồi đóng. Có thể thấy bài toán (MP) đưa được về bài toán (BEF) bằng cách đặt

$$f(x, y) := \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle,\ T_j(x) := P_{C_j}(x),\ j = 1, ..., m.$$

Do φ là hàm lồi mạnh nên f là song hàm đơn điệu mạnh. Vì vậy Thuật toán 4.1.1 có thể áp dụng để giải bài toán quy hoạch (MP), mà ở đó mỗi phép chiếu trên mỗi tập lồi đóng C_j được tính song song riêng biệt. Tức là, xuất phát từ một phần tử $x^0 \in \mathcal{H}$, Thuật toán 4.1.1 trở thành

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha}\nabla\varphi(x^k) \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)\sum_{j=1}^{m} \mu_j P_{C_j}(x^k), \end{cases}$$

ở đó μ_j, λ_k và α được chọn như trong Thuật toán 4.1.1.

Áp dụng thuật toán trên để giải bài toán LASSO, xuất hiện trong các bài toán xử lý tín hiệu, phục hồi ảnh hay bài toán xác suất ... [88] như sau:

$$\min \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 \quad \text{với } \|x\|_1 \le t,$$

ở đó $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}_+$ cho trước. Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle \\ &= \langle A^T(Ax - b), y - x\rangle. \end{aligned}$$

và $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \le t\}, T(x) = P_C(x)$.

Khi đó, tại mỗi bước lặp của Thuật toán 4.1.1 cho bài toán LASSO, ta tính:

$$\begin{cases} y^k := x^k - \dfrac{1}{\alpha} A^T(Ax^k - b) \\ x^{k+1} := \lambda_k y^k + (1-\lambda_k) P_C(x^k). \end{cases}$$

Khi chạy số, chúng tôi xét với ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, ở đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{với } i = j \\ 1 & \text{với } i+1 = j \\ 0 & \text{với các trường hợp khác.} \end{cases}$$

và $b = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Có thể kiểm tra được $\langle Ax, x\rangle \geq \|x\|^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, do đó hàm f đơn điệu mạnh với hệ số $\beta = 1$ và $\nabla_2 f(x,x) = A^T(Ax - b)$ liên tục Lipschitz với hệ số $L = \|A^T A\|$. Ở đây chúng tôi chọn $\alpha = L^2$, điểm xuất phát $x^0 = (0, \ldots, 0)$.

Chương trình thử nghiệm với $n = 10$ và $n = 20$. Trong mỗi trường hợp chúng tôi xét hai giá trị $t = t_{in}$ và $t = t_{out}$ khác nhau, ứng với các trường hợp nghiệm s của phương trình $Ax = b$ thuộc tập C hay không thuộc C.

Trong mỗi thử nghiệm, giá trị gần đúng $f_{sol} = \|Ax^* - b\|$ được tính tại $x^* = x^k$ ở bước cuối cùng.

Kết quả tính toán cho trong bảng sau.

n	t	Số bước lặp	Thời gian chạy (giây)	f_{sol}
$n = 10$	$t_{in} = 5$	2000	0.4772	0.0377
		4000	1.3523	9×10^{-7}
	$t_{out} = 2$	2000	0.5410	1.2960
		4000	1.1883	1.2940
$n = 20$	$t_{in} = 10$	2000	0.9359	0.2235
		4000	1.8100	1.7×10^{-5}
	$t_{out} = 4$	2000	0.8059	1.8057
		4000	1.6817	1.8036

Bảng 4.1: Thuật toán 4.1.1 giải bài toán Lasso.

Giá trị f_{sol} cho thấy độ chính xác của thuật toán trong trường hợp này là khá tốt. Với trường hợp nghiệm s của phương trình $Ax = b$ thuộc tập C, tại bước lặp $k = 4000$ cho ta độ sai lệch cỡ 10^{-7} và 10^{-5} tương ứng với các trường hợp $n = 10$ và $n = 20$. Còn với trường hợp nghiệm s của phương trình $Ax = b$ không thuộc tập C, Ax^k càng tiến gần đến hình chiếu của b trên $A(C)$ hơn khi k càng lớn.

4.3. Kết luận chương

Trong Chương 4, chúng tôi đã trình bày một số kết quả như sau:

- Xây dựng một thuật toán song song giải bài toán cân bằng hai cấp mà ở đó tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn và chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

- Xét ba trường hợp riêng khi tập ràng buộc là giao của các tập nghiệm của các bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược, tập nghiệm của các bài toán cân bằng đơn điệu và tập nghiệm của các bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại.

- Áp dụng thuật toán đã xây dựng để giải bài toán tối ưu trên giao của các tập lồi đóng khác rỗng. Thử nghiệm số giải bài toán Lasso với các trường hợp số chiều khác nhau.

Kết luận và kiến nghị

Kết luận

Các kết quả chính của luận án được trình bày trong ba chương, bao gồm các kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng cũng như các thật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng, ở đây đều là một lần chiếu, với các giả thiết về tính đơn điệu khác nhau của song hàm mục tiêu. Với giả thiết nhẹ nhất là song hàm giả đơn điệu hay đơn điệu, chỉ có dãy lặp ergodic đạt được sự hội tụ và là hội tụ yếu. Còn với các giả thiết chặt hơn là song hàm giả đơn điệu mạnh hay đơn điệu mạnh, các thuật toán đều đạt được sự hội tụ mạnh. Cụ thể là:

1. Đề xuất và chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh.

2. Đề xuất ba thuật toán chiếu cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh.

   - Chứng minh được thuật toán có tốc độ hội tụ tuyến tính khi song hàm có tính chất kiểu Lipschitz và tham số hiệu chỉnh được chọn phụ thuộc vào hệ số giả đơn điệu mạnh và hằng số Lipschitz.

   - Chứng minh được sự hội tụ của thuật toán chiếu giải bài toán cân bằng mà không đòi hỏi phải biết các hằng số Lipschitz. Đưa ra ví dụ cho thấy thuật toán không có tốc độ hội tụ tuyến tính.

- Chứng minh được sự hội tụ của một thuật toán trong đó không đòi hỏi điều kiện kiểu Lipschitz và điều kiện khả dưới vi phân theo biến thứ hai của song hàm. Trong trường hợp này, thuật toán cũng không có được sự hội tụ tuyến tính.

3. Đề xuất một thuật toán tách cho bài toán cân bằng.

   - Chứng minh được sự hội tụ yếu của thuật toán cho bài toán cân bằng đơn điệu và giả đơn điệu mà ở đó song hàm được tách thành tổng của hai hàm khác.

   - Chứng minh được sự hội tụ mạnh của thuật toán cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh.

   - Trình bày một ví dụ số minh họa để tìm điểm cân bằng Nash trong mô hình độc quyền Cournot và một ví dụ so sánh hiệu năng của thuật toán với một thuật toán đã có trước đó.

4. Đề xuất thuật toán giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn.

   - Xây dựng một thuật toán song song giải bài toán cân bằng hai cấp mà ở đó tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn và chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

   - Xét ba trường hợp riêng khi tập ràng buộc là giao của các tập nghiệm của các bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh ngược, tập nghiệm của các bài toán cân bằng đơn điệu và tập nghiệm của các bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại.

   - Áp dụng thuật toán đã xây dựng cho bài toán tối ưu trên giao của các tập lồi đóng khác rỗng. Thử nghiệm số giải bài toán Lasso với các trường hợp số chiều khác nhau.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Hướng nghiên cứu còn có một số câu hỏi mở sau:

1. Xây dựng thuật toán có tốc độ hội tụ tuyến tính cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh mà không đòi hỏi điều kiện kiểu Lipschitz của song hàm.

2. Bước tính y^k trong thuật toán cho bài toán cân bằng hai cấp ở Chương 4, Mục 4.1 có thể thay bằng thuật toán chiếu tăng cường hoặc tìm kiếm theo tia để áp dụng cho bài toán cân bằng đơn điệu hoặc giả đơn điệu?

3. Thuật toán chiếu trong Chương 3 có thể áp dụng cho song hàm $f = f_1 + f_2$ với f_1, f_2 là các song hàm cân bằng có những điều kiện nhẹ nhưng tốt hơn, giúp cho có thể giảm nhẹ các điều kiện giả đơn điệu mạnh thành giả đơn điệu hoặc đơn điệu. Câu hỏi tương tự với thuật toán cho bài toán cân bằng hai cấp trong Chương 4, Mục 4.1?

   Ngoài ra, một vấn đề chúng tôi cũng đã nêu ra trong phần cuối của phần tính toán ví dụ số, là việc cải thiện thuật toán để được độ chính xác tốt hơn khi số chiều của bài toán tăng lên.

Do thời gian nghiên cứu chưa nhiều, nên chúng tôi cũng chưa trả lời được các câu hỏi trên. Hi vọng rằng trong thời gian tới chúng tôi sẽ nghiên cứu và sớm giải quyết được những vấn đề đó.

Công trình liên quan đến luận án

[1.] Phung M. Duc, Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Solution-existence and algorithms with their convergence rate for strongly pseudomonotone equilibrium problems, *Pacific Journal of Optimization*, **Vol 12, No. 4** 833-845 (2016).

[2.] Phung M. Duc, Le D. Muu: A splitting algorithm for a class of bilevel equilibrium problems involving nonexpansive mappings, *Optimization*, **Vol 65** 1855-1866 (2016).

[3.] Phung M. Duc, Le X. Thanh: Subgradient algorithms for solving equilibrium problems invoving the sum of two monotone bifunctions: Application to the Nash-Cournot Model (đã gửi đăng).

Các kết quả liên quan đến luận án đã được tác giả báo cáo tại:

1. Seminar của Phòng Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học;
2. Hội nghị nghiên cứu sinh hằng năm của Viện Toán học (10/2014, 10/2015, 10/2016);
3. Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì (4/2015, 4/2016, 4/2017);
4. Hội nghị Việt Nam-Hàn Quốc về một số chủ đề trong Toán học, Đà Nẵng (2/2017);
5. Hội nghị Quốc tế "Optimization Algorithms and some related problems", Viện Toán học (12/2017);
6. Hội thảo Quốc tế về Tính toán khoa học hiệu năng cao lần thứ 7, Hà Nội (3/2018);
7. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 9, Nha Trang (8/2018).

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Văn Hiền, Lê Dũng Mưu, Nguyễn Hữu Điển: Giáo trình Giải tích lồi ứng dụng, *Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội* (2015).

[2] Lê Dũng Mưu: Giáo trình các phương pháp tối ưu, *Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật* (1998).

[3] Hoàng Tụy: Hàm thực và Giải tích hàm, *Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ* (2003).

[4] Nguyễn Đông Yên: Giáo trình giải tích đa trị, *Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ* (2007).

Tiếng Anh

[5] Lam Q. Anh, Phan Q. Khanh: Uniqueness and Hölder continuity of the solution to multivalued equilibrium problems in metric spaces, *J. Glob. Optim.* **37(3)**, 449-465 (2007).

[6] Lam Q. Anh, Pan Q. Khanh, Dang T. M. Van: Well-posedness under

relaxed semicontinuity for Bilevel Equilibrium and Optimization Problems with Equilibrium constraints, *J. Optim. Theory Appl.* **158(2)**, 42-59 (2012).

[7] Pham K. Anh and Trinh N. Hai: Splitting extragradient-like algorithms for strongly pseudomonotone equilibrium problems, *Numerical Algorithms* **76(1)**, 67-91 (2017).

[8] Pham N. Anh, Le D. Muu, Nguyen V. Hien, Strodiot J. J.: Using the Banach Contraction Principle to Implement the Proximal Point Method fo Multivalued Monotone Variational Inequalities, *J. Optim. Theory Appl.* **124**, 285-306 (2005).

[9] Pham N. Anh, Trinh N. Hai, Pham M. Tuan.: On ergodic algorithms for equilibrium problems, *J. Glob. Optim.* **64(1)** 179–195 (2016).

[10] Arrow K. J., Debreu G.: Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica* **22**, 265–290 (1954).

[11] Aubin J. P., Frankowska H.: Set-valued analysis, *Birkhauser, Boston* (1990).

[12] Bauschke H.H., Combettes P.H.: Convex Analysis and Monotone Operator in Hilbert Spaces, *Springer* (2010).

[13] Bello Cruz J.Y., Millán R.D.: A direct splitting method for nonsmooth variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl* **161**, 729-737 (2014).

[14] Biegler L. T.: Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes, *MOS-SIAM Series on Optimization*, Philadelphia (2010).

[15] Bigi G., Castellani M., Pappalardo M.: A new solution method for equilibrium problems, *Optimization Methods and Software* **24**, 895–911 (2009).

[16] Bigi G., Castellani M., Pappalardo M., Panssacantando M.: Existence and solution methods for equilibria, *European J. Oper. Res.* **227**, 1-11 (2013).

[17] Bigi G., Castellani M., Pappalardo M., Passacantando M.: Nonlinear Programming Techniques for Equilibria, Spinger (2018).

[18] Bianchi M., Schaible S.: Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.* **90**, 31-43 (1996).

[19] Bianchi M., Pini R.: Coercivity conditions for equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.* **124**, 79-92 (2005).

[20] Blum E., Oettli W.: From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student* **62**, 127-169 (1994).

[21] Brézis H., Nirenberg L., Stampacchia G.: A remark on Ky Fan's minimax principle, *Bollettino della Unione Matematica Italiana* **6**, 293-300 (1972).

[22] Nguyen Buong, Lam T. Duong: An Explicit Iterative Algorithm for a class of Variational Inequalities in Hilbert Spaces, *J. Optim. Theory Appl.* **151**, 513-524 (2011).

[23] Nguyen Buong, Nguyen T. Q. Anh: An Implicit Iteration Method for Variational Inequalities over the Set of Common Fixed Points for

a Finite Family of Nonexpansive Mappings in Hilbet Spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, DOI:10.1155/2011/276859 (2011).

[24] Cencor Y., Elfving T.: A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space, *Numer. Algorithms* **8**, 221-239 (1994).

[25] Cencor Y., Segal A.: The split common fixed point problem for directed operators, *J. Convex Anal.* **16**, 587-600 (2009).

[26] Cencor Y., Gibali A., Reich S.: Algorithm for split variational inequality problems, *Numerical Algorithms* bf 59, 301-323 (2012).

[27] Combettes P. L., Hirstoaga S. A.: Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* **6**, 117-136 (2005).

[28] Cohen G.: Auxiliary Problem Principle and Decomposition of Optimization Problems, *J. Optim. Theory Appl.* **32**, 277-305 (1980).

[29] Cohen G.: Auxiliary Problem Principle extended to Variationnal Inequalities, *J. Optim. Theory Appl.* **59**, 325-333 (1988)

[30] Cournot A. A.: Recherche sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses, *Hachette, Paris* (1838).

[31] Dafermos S.: Traffic equilibrium and variational inequalities, *Transportation Science* **14**, 42–54 (1980).

[32] Dempe S., Kalashnikov V., Perez-Valdes G. A., Kalashnykova V.: Bilevel Programming Problem, Theory, Algoritms and Applications to Energy Networks, *Springer* (2015).

[33] Bui V. Dinh, Le D. Muu: On penalty and gap function methods for e quilibrium problems, *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2011, Article ID 646452, 14 pages, 2011. https://doi.org/10.1155/2011/646452.

[34] Bui V. Dinh, Le D. Muu: A projection algorithm for solving pseudomonotone equilibrium problems and it's application to a class of bilevel equilibria, *Optimization* **64**, 559-575 (2015).

[35] Bui V. Dinh: An algorithm for variational inequalities with equilibrium and fixed point constraints, *Cogent Mathematics* **2**, 2015.

[36] Facchinei F., Pang J.S.: Finite - Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, *Springer, New York* (2003).

[37] Farouq N. E.: Pseudomonotone variational inequalities: convergence of proximal methods, *J. Optim. Theory Appl.* **109**, 311-326 (2001).

[38] Ferris M. C., Pang J. S.: Engineering and economic applications of complementarity problems, *SIAM Review* **39**, 669–713 (1997).

[39] Trinh N. Hai, Nguyen T. Vinh: Two new splitting algorithms for equilibrium problems, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **111(4)**, 1051-1069 (2017).

[40] He Z.: The split equilibrium problems and its convergence algorithms. *J. Inequal. Appl.* **162**, (2012).

[41] Nguyen V. Hien: Lecture Notes on Equilibrium Problems, Nha Trang: CIUF-CUD Summer School on Optimization and Applied Mathematics (2002).

[42] Pham G. Hung, Le D. Muu: The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions. *Nonlinear Anal. TMA.* **74**, 6121-6129 (2011).

[43] Ioffe A. D., Tihomirov V. M.: Theory of Extremal Problems, *North-Holland, Amsterdam* (1979).

[44] Iusem A. N., Sosa W.: Iterative algorithms for equilibrium problems, *Optimization* **52**, 301-316 (2003).

[45] Iusem A.N., Sosa W.: On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces, *Optimization* **8**, 1259-1274 (2010).

[46] Karamardian, S., Schaible, S.: Seven kinds of monotone maps, *J. Optim. Theory Appl.* **66**, 37–46 (1990).

[47] Kato T.: Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**, 548–550 (1964).

[48] Pham D. Khanh, Phan T. Vuong: Modified projection method for strongly pseudomonotone variational inequalities, *J Glob Optim* **58**, 341-350 (2014).

[49] Knaster B., Kuratowski C., Mazurkiewicz S.: Ein Beweies des Fixpunktsatzes f*ü*r *N* Dimensionale Simplexe, *Fundamenta Mathematicae* **14**, 132-137 (1929).

[50] Konnov I. V., Schaible S.: Duality for Equilibrium Problems under Generalized Monotonicity, *J. Opti. Theory and Appl.* **104**, 395-408 (2000).

[51] Konnov I.V.: Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **495**, *Springer, Verlag* (2001).

[52] Konnov I. V.: Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.* **119**, 317–333 (2003).

[53] Konnov I. V.: Regularization methods for nonmonotone equilibrium problems, *J. Nonlinear Convex Anal.* **10**, 93–101 (2009).

[54] Korpelevich G.M.: Extragradient method for finding saddle points and other problems, *Matecon* **12**, 747–756 (1976).

[55] Ky Fan: A minimax inequality and applications. In: Shisha O. (Ed.): Inequalities, *Academic Press, New York*, 103-113 (1972).

[56] Iiduka H., Yamada I.: A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its application, *Optimization* **58**, 251-261 (2009).

[57] Lorenzo D., Passacantando M., Sciandrone M.: A convergent inexact solution method for equilibrium problems, *Optim. Meth. Software*, DOI: 10. 1080/10556788.2013.796376 (2013).

[58] Mastroeni G.: On auxiliary principle for equilibrium problems, *Technical Report of the Department of Mathematics of Pisa Univercity, Italy* **3**, 1244-1258 (2000).

[59] Mastroeni G.: Gap function for Equilibrium Problems, *J. Glob. Optim.* **27**, 411-426 (2003).

[60] Moudafi A.: Proximal point methods extend to equilibrium problems, *Journal of Natural Geometry* **15**, 91-100 (1999).

[61] Moudafi A., Théra M.: Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems, in M. Thera, R. Tichatschke: Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniques, *Spinger, Berlin* (1999).

[62] Moudafi M.: On the convergence of splitting proximal methods for equilibrium problems in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **359**, 508-513 (2009).

[63] Moudafi M.: Proximal methods for a class of bilevel monotone equilibrium problems, *J. Glob. Optim.* **47**, 287–292 (2010).

[64] Le D. Muu, Oettli W.: Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria, *Nonlinear Anal.: TMA* **18**, 1159-1166 (1992).

[65] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Methods for finding global optimal solutions to linear programs with equilibrium constraints, Dedicated to Pham Huu Sach on the occasion of his sixtieth birthday, *Acta Math. Vietnam.* **26**, 333 - 347 (2001).

[66] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: On penalty function method for a class of nonconvex constrained optimization problems. *Vietnam J. Math.* **29**, 235 - 256 (2001).

[67] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: Methods for finding global optimal solutions to linear programs with equilibrium constraints, *Vietnam J. Math.* **30**, 189 - 194 (2002).

[68] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: A global optimiztion method for solving convex quadratic bilevel programming problems, *J. Glob. Optim.* **26**, 199-219 (2003).

[69] Le D. Muu, Nguyen V. Quy: On branch-and-bound algorithms for global optimal solutions to mathematical program with afine equilibrium constraints, *Vietnam J. Math.* **35**, 523-539 (2007).

[70] Le D. Muu, Nguyen V. Hien., Nguyen V. Quy: On Nash-Counort oligopolistic market equilibrium models with concave cost functions, *J. Glob. Optim.* **41**, 351-364 (2008).

[71] Le D. Muu, Tran D. Quoc: Regularization algorithms for solving monotone Ky Fan inequalities with application to a Nash-Cournot equilibrium model, *J. Optim. Theory Appl.* **142**, 185-204 (2009).

[72] Nash J. F.: Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* **36**, 48–49 (1950).

[73] Nash J. F.: Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* **54**, 286–295 (1951).

[74] Nikaido H., Isoda K.: Note on noncooperative convex games, *Pacific J. of Mathematics* **5**, 807-815(1955).

[75] Passty G. B.: Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.* **72**, 383-390 (1979).

[76] Tran D. Quoc, Le D. Muu, Nguyen V. Hien: Extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *Optimization* **57**, 749-776 (2008).

[77] Tran D. Quoc, Pham N. Anh, Le D. Muu: Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *J. Glob. Optim.* **52**, 139-159 (2012).

[78] Nguyen. V. Quy: An algorithm for a bilivel problem with equilibrium and fixxed point constraints, *Optimization* **64**, 2359-2376 (2015).

[79] Rockafellar R. T.: Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAMJ. Control Optim.* **5**, 877-898 (1976).

[80] Rockafellar R. T.: Convex Analysis, *Princeton University Press, Princeton,. N.J.* (1970).

[81] Rockafellar R. T., Wets R.: Variational Analysis, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschafte, Springer* **317** (1998) (3rd printing 2009).

[82] Santos P., Scheimberg S.: An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems, *Comput. Appl. Math.* **30**, 91-107 (2011).

[83] Stampacchia G.: Variational Inequatlities, Congrès international des mathématiciens, Sep 1970, Nice, France. 2, pp.877-883, Actes du Congrès international des mathematiciens.

[84] Eckstein J., Svaiter A. F.: General projective splitting methods for sums of maximal monotone operators, *SIAM Control Optim* **48**, 787–811 (2009).

[85] Nguyen N. Tam, Yao J. C., Nguyen D. Yen: Solution methods for pseudomonotone Variational Inequalities, *J. Opti. Theory and Appl.* **138**, 253-273 (2008).

[86] Tan K. K., Xu H. K.: Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, *J. Math. Anal. Appl.* **178**, 301-308 (1993).

[87] Nguyen X. Tan, Phan N. Tinh: On the existence of equilibrium points of vector functions, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **19**, 141-156 (1998).

[88] Tibshirani, R.: Regression Shrinkage and Selection via the Lasso, *J. R. Statist. Soc. B* **58**, 267-288 (1996).

[89] Tseng P.: A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings, *SIAM Control Optim.* **38**, 431-446 (2000).

[90] Hoang Tuy: Convex Analysis and Global Optimization, *Kluwer, Dordrecht* (1998).

[91] Phan T. Vuong, Strodiot J.-J., Nguyen V. Hien: Extragradient methods and linesearch algorithms for solving Ky Fan inequalites and fixed point problems, *J. Optim. Theory Appl.* **155**, 605-627 (2012).

[92] Phan T. Vuong, Strodiot J.-J., Nguyen V.Hien: On Extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space, *Optimization*, DOI:10.1080/02331934.2012.759327 (2013).

[93] Xu H. K.: Iterative algorithms for nonlinear operators, *J. London Math. Soc.* **66**, 240-256 (2002).

[94] Yamada, I.: The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings. In: Butnariu, D., Censor, Y., Reich, S., (eds.) *In-*

herently Parallel Algorithm for Feasibility and Optimization and Their Applications, Elsevier, pp. 473–504 (2001).

[95] Le H. Yen, Le D. Muu, Nguyen T. T. Huyen: An Algorithm for a class of split feasibility problems: application to a model in electricity production, *Math. Meth. Oper. Res.* **84**, 549-565 (2016).

[96] Zhang H., Cheng L.: Projective splitting methods for sums of maximal monotone operators with applications. *J. Math. Anal. Appl.* **406**, 321-334 (2013).