VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

PHẠM HỒNG NAM

MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA MÔĐUN LIÊN KẾT VỚI HỆ THAM SỐ HẦU P-CHUẨN TẮC

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2020

Luận án được hoàn thành tại: Viện Toán học-Viện Hàn lâm khoa học và Công nghệ Việt Nam

Tập thể hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Đoàn Trung Cường
GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Viện họp tại: Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
vào hồi.......giờ......ngày......tháng......năm.....

Có thể tìm hiểu về luận án tại:
- Thư viện Quốc gia
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Một vấn đề quan trọng trong đại số giao hoán được các nhà toán học nghiên cứu từ lâu là mối liên hệ giữa các cấu trúc đại số của một vành hay một môđun với các bất biến bằng số. Thông thường sự triệt tiêu hoặc độ lớn của các bất biến này dẫn đến các thông tin về độ phức tạp của cấu trúc tương ứng. Việc tính toán, đánh giá các bất biến đó nói chung không dễ, phản ánh sự khó khăn trong việc nghiên cứu các cấu trúc đại số. Luận án này tập trung nghiên cứu tính chất của một số bất biến của môđun hữu hạn sinh trên một vành địa phương Noether liên kết với một lớp hệ tham số đặc biệt, gọi là các hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

Một trong những lớp môđun quan trọng nhất trong đại số giao hoán là môđun Cohen-Macaulay. Việc nghiên cứu các môđun này khá thuận lợi và thu được nhiều kết quả, một phần là vì môđun này được đặc trưng bằng sự tồn tại các hệ tham số là dãy chính quy, dẫn đến nhiều bất biến của môđun có thể tính toán cụ thể. Hệ tham số của một môđun bất kỳ nói chung không là dãy chính quy, tuy nhiên vẫn có những lớp hệ tham số có tính chất tương tự, mở rộng các tính chất của các dãy này. Thông thường, tính chất của các hệ tham số là dãy chính quy được mở rộng cho các môđun hữu hạn sinh bất kỳ theo hai hướng. Một hướng xét các hệ tham số đồng thời là các dãy lọc chính quy, được các nhà toán học N.T. Cường, Schenzel và N.V. Trung (1978) đưa ra nghiên cứu và áp dụng đầu tiên. Một hướng khác là xét các hệ tham số là d-dãy, một khái niệm do Huneke

(1982) đưa ra. Ví dụ, các hệ tham số chuẩn tắc của vành và môđun Buchsbaum hay Cohen-Macaulay suy rộng là những hệ tham số cũng đồng thời là d-dãy. Nhờ các tính chất tốt của d-dãy nên các hệ tham số là d-dãy có thể giúp định nghĩa hoặc tính toán chính xác được nhiều bất biến liên quan.

Ví dụ hệ tham số đồng thời là d-dãy trong trường hợp tổng quát hơn là các hệ tham số mà phần tử thuộc vào một số iđêan linh hoá tử của môđun đối đồng điều địa phương, gọi là các hệ tham số p-chuẩn tắc. Khái niệm này được tác giả N.T. Cường (1995) đưa ra và có vai trò đặc biệt quan trọng trong lời giải của Kawasaki cho bài toán Macaulay hoá và giả thuyết của Sharp về điều kiện tồn tại phức đối ngẫu (xem [T. Kawasaki, 2000 và 2002]). Các hệ tham số này đều là những d-dãy rất đặc biệt, dẫn đến nhiều ứng dụng quan trọng của lớp các hệ tham số này.

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán Noether địa phương và M là một R-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d$. Kí hiệu các môđun đối đồng điều địa phương của M với giá $\mathfrak{m}$ là $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và $\mathfrak{a}_i(M) = \mathrm{Ann}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Đặt $\mathfrak{a}(M) = \mathfrak{a}_0(M) \ldots \mathfrak{a}_{d-1}(M)$. Một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ của một môđun M được gọi là một hệ tham số p-chuẩn tắc nếu $x_d \in \mathfrak{a}(M), x_{d-1} \in \mathfrak{a}(M/x_dM), \ldots, x_1 \in \mathfrak{a}(M/(x_2, \ldots, x_d)M)$ (xem [N.T. Cường, 1995]). Một tính chất rất quan trọng của hệ tham số p-chuẩn tắc là $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum\limits_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i$, trong đó $\lambda_i = e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M})$, với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Từ tính chất này, có thể suy ra một hệ tham số p-chuẩn tắc luôn là một d-dãy đặc biệt (xem [N.T. Cường, 1995]). Từ đó dẫn các tác giả N.T. Cường và Đ.T. Cường (2007) đến việc định nghĩa khái niệm dd-dãy, một cách mở rộng khái niệm hệ tham số p-chuẩn tắc cho một dãy phần tử với số phần tuỳ ý, tập trung ở khía cạnh d-dãy của các hệ tham số này. Nhắc lại rằng theo Huneke (1982), một dãy phần tử $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ là một d-dãy trên môđun M nếu

$$(x_1, \ldots, x_i)M :_M x_j = (x_1, \ldots, x_i)M :_M x_{i+1}x_j,$$

với mọi $0 \leq i < j \leq r$. Một dãy $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ được gọi là một dd-dãy trên M nếu $x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}$ là d-dãy trên $M/(x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_r^{n_r})M$, với $i = 1, \ldots, r$ và với mọi $n_1, \ldots, n_r > 0$. Khi đó, một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ của M là một dd-dãy khi và chỉ khi

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i$$

là một đa thức theo $n_1, \ldots, n_d > 0$ (xem [N.T. Cường-Đ.T.Cường, 2007]). Do đó mọi hệ tham số p-chuẩn tắc cũng là dd-dãy trên M.

Các tác giả N.T. Cường và Đ.T. Cường (2007) đã nghiên cứu các đa thức Hilbert và đặc trưng Euler Poincaré bậc cao của phức Koszul đối với một hệ tham số là dd-dãy và thu được nhiều kết quả thú vị. Các dãy này cũng được ứng dụng để nghiên cứu các môđun Cohen-Macaulay dãy và Cohen-Macaulay suy rộng dãy (xem trong [N.T. Cường-Đ.T. Cường, 2007]). Trong luận án này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các tính chất của hệ tham số đồng thời là dd-dãy cũng như sử dụng để nghiên cứu một số bất biến của môđun hữu hạn sinh trên một vành địa phương. Để thuận tiện chúng tôi gọi các hệ tham số đồng thời là dd-dãy là các hệ tham số *hầu p-chuẩn tắc.* Chúng tôi tập trung vào ba vấn đề nghiên cứu sau.

Vấn đề thứ nhất liên quan đến việc nghiên cứu, tính toán các hàm độ dài, các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul và các hệ số Hilbert của một môđun đối với một hệ tham số. Cụ thể hơn, cho một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ của môđun M và đặt $I = (x_1, \ldots, x_d)$. Với $0 \leq r \leq d$, kí hiệu $H_i(x_1, \ldots, x_r; M)$ là môđun đồng điều Koszul thứ i của M đối với dãy $x_1, \ldots, x_r$. Trong trường hợp các môđun $H_i(x_1, \ldots, x_r; M)$ có độ dài hữu hạn với mọi $k \le r \le d$ thì đặc trưng Euler-Poincaré bậc k của phức Koszul tương ứng với dãy $x_1, \ldots, x_r$ được định nghĩa là

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) := \sum_{i=k}^{r} (-1)^{i-k} \ell(H_i(x_1, \ldots, x_r; M)).$$

Mặt khác, với mọi $n \gg 0$ ta có $\ell(M/I^{n+1}M) = P_{M,I}(n)$, trong đó

$$P_{M,I}(n) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i}(I; M) \binom{n+i}{i}$$

là đa thức Hilbert-Samuel của M đối với I. Các hệ số $e_i(I; M)$ hay $e_i(x_1, \ldots, x_d; M)$ được gọi là hệ số Hilbert của M đối với I (định nghĩa hệ số Hilbert này có thể sai khác dấu so với định nghĩa của một số tác giả khác).

Ta xét các hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$, đặc trưng Euler-Poincaré $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$, hệ số Hilbert $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ như là các hàm theo $n_1, \ldots, n_d > 0$. Trong trường hợp hệ tham số bất kỳ, không có nhiều liên hệ rõ ràng giữa các hàm số trên. Tuy nhiên khi hệ tham số đặc biệt hơn thì có thể có một số quan hệ thú vị. Ví dụ, nếu hệ tham số là d-dãy thì các tác giả Goto-Hong-Vasconcelos (2012) đã đưa ra công thức tính cho các hệ số Hilbert qua các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul như sau

$$e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) = \chi_1(x_1, \ldots, x_{i+1}; M) - \chi_1(x_1, \ldots, x_i; M),$$

với $i = 0, 1, \ldots, d$. Mặt khác, nếu $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thì hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ là một đa thức như ta đã thấy ở trên. Bên cạnh đó, các tác giả N.T. Cường và Đ.T. Cường (2007) chứng minh rằng các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ của phức Koszul cũng là đa thức có dạng tương tự. Các kết quả của Goto-Hong-Vasconcelos và N.T. Cường-Đ.T. Cường thúc đẩy chúng tôi nghiên cứu sâu hơn mối liên hệ giữa các hàm hàm trên, đặt ra vấn đề nghiên cứu sau đây.

Vấn đề 1. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của môđun M, tính toán các đa thức ứng với các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$, hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ và các hệ số Hilbert $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$, qua đó so sánh các đa thức này.

Vấn đề thứ hai là tính đa thức của hàm độ dài của iđêan bão hoà của luỹ thừa một iđêan. Cụ thể hơn, với một iđêan I của vành R, ta xét $h_I^0(n) := \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(R/I^{n+1}))$ như một hàm nhận giá trị nguyên và không âm theo $n \geq 0$. Nếu I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thì $h_I^0(n) = \ell(R/I^{n+1})$ là hàm Hilbert-Samuel của R đối với I. Do đó $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức, nghĩa là có một đa thức $P_I(n)$ sao cho $h_I^0(n) = P_I(n)$ với mọi $n \gg 0$.

Trong trường hợp iđêan I tuỳ ý, Ulrich và Validashti (2011) chứng minh rằng giới hạn $\limsup_{n\to\infty} d!\frac{h_I^0(n)}{n^d}$ tồn tại, trong đó $d = \dim(R)$. Giới hạn này được gọi là ϵ-bội của R đối với I, kí hiệu là $\epsilon(I)$. Số bội này được dùng hiệu quả trong nghiên cứu về đẳng kỳ dị. Nếu $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức thì $\epsilon(I)$ là một số hữu tỷ và việc nghiên cứu $\epsilon(I)$ nói chung sẽ khá thuận lợi. Tuy nhiên, không phải trường hợp nào $h_I^0(n)$ cũng là một hàm đa thức. Năm 2005, Cutkosky, Ha, Srinivasan và Theodorescu đưa ra ví dụ một vành chính quy, địa phương R có chiều 4 và một iđêan I sao cho $\epsilon(I)$ là một số vô tỷ. Do đó $h_I^0(n)$ không phải là một hàm đa thức. Tuy vậy, việc xét các trường hợp hàm $h_I^0(n)$ là hàm đa thức vẫn có nhiều ý nghĩa. Vì thế chúng tôi đặt ra vấn đề nghiên cứu sau.

Vấn đề 2. Phải chăng $h^0_I(n)$ là hàm đa thức nếu I sinh bởi một phần hệ tham số?

Vấn đề thứ ba là xây dựng các bậc đối đồng điều. Khái niệm *bậc đối đồng điều* (hay bậc mở rộng) được các tác giả Doering, Gunston và Vasconcelos đưa ra vào năm 1998 như một thước đo độ phức tạp của cấu trúc đại số của vành và môđun. Trong trường hợp môđun bất kỳ, các bậc đối đồng điều dẫn đến chặn trên cho hàng loạt bất biến quan trọng của môđun như số phần tử sinh tối tiểu, hệ số Hilbert, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của vành phân bậc, số Betti, số Bass... Ví dụ đầu tiên của bậc đối đồng điều là *bậc đồng điều* hdeg được Vasconcelos nghiên cứu trước đó. Ngay sau đó Gunston (1998) đã đưa ra trong luận án của mình ví dụ bậc đồng điều thứ hai bằng cách lấy giá trị nhỏ nhất của tất cả các bậc đối đồng điều, kí hiệu là bdeg. Gần đây hai tác giả N.T. Cường và P.H. Quý đã đưa ra một ví dụ bậc đối đồng điều khác là *bậc không trộn lẫn* udeg dựa trên các hệ tham số p-chuẩn tắc. Kết quả này dẫn chúng tôi đến vấn đề nghiên cứu sau.

Vấn đề 3. Sử dụng hệ tham số hầu p-chuẩn tắc để xây dựng các bậc đối đồng điều mới.

Luận án được chia làm 4 chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức cơ sở về đối đồng điều địa phương, hệ số Hilbert, đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao, hệ tham số p-chuẩn tắc và dd-dãy.

Chương 2 được dành để nghiên cứu các tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và áp dụng vào Vấn đề 1. Cụ thể, trong Tiết 2.1 chúng tôi định nghĩa và đưa ra một số tính chất quan trọng của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc, được dùng hiệu quả ở các phần sau. Hơn nữa chúng tôi cũng đưa ra một điều kiện hữu hạn để kiểm tra một hệ tham số là hầu p-chuẩn tắc (Định lý 2.1.5 (ii)). Trong Tiết

2.2, ta xét một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ của môđun M. Cố định $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ và đặt $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_r\}$, $x_\Lambda M = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})M$. Với $0 \leq i < i_1 - 1 \leq d$, đặt

$$U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}} := \begin{cases} (0 : x_{i+1})_{M/x_\Lambda M} & \text{nếu } i \leq d-1, \\ M/x_\Lambda M & \text{nếu i=d.} \end{cases}$$

Kí hiệu dãy $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ bởi $\underline{x}(\underline{n})$. Một kết quả quan trọng của luận án là các môđun $U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})}$ chỉ phụ thuộc vào i, Λ và không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và số mũ $n_1, \ldots, n_d > 1$ (Mệnh đề 2.2.2). Lớp đẳng cấu của $U^{i,\Lambda}_{M,\underline{x}(\underline{n})}$ được kí hiệu là $U^{i,\Lambda}_M$. Các môđun này được ứng dụng trong xuyên suốt các vấn đề nghiên cứu của luận án. Đầu tiên, chúng tôi chứng minh các bậc khác không của đa thức ứng với hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và là một dãy bất biến số quan trọng của M (Định lý 2.2.7). Trong Tiết 2.3, chúng tôi đưa ra công thức tính các hệ số của đa thức ứng với các hàm đặc trưng Euler-Poincaré $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M)$ qua bội của các môđun $U^{i,\Lambda}_M$ (Định lý 2.3.5).

Trong trường hợp $x_1, \ldots, x_d$ là một d-dãy trên M, tác giả N.V. Trung (1983) đã đưa ra mối liên hệ giữa hệ số Hilbert với độ dài một số môđun đối đồng điều địa phương (cũng xem trong bài báo của Goto-Ozeki (2011)). Mối liên hệ giữa độ dài của các môđun đối đồng điều địa phương đó với các môđun đồng điều Koszul được các tác giả N.T. Cường-N.Đ. Minh đưa ra (1996). Sử dụng các quan hệ trên chúng tôi thu được công thức tính các hệ số Hilbert $e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M)$ đối với các iđêan tham số sinh bởi hệ tham số hầu p-chuẩn tắc qua số bội của các môđun $U^{i,\Lambda}_M$ (Định lý 2.4.1). Hệ quả là các hàm $e_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ cũng là đa thức theo $n_1, \ldots, n_d > 0$ (Hệ quả 2.4.2). Từ các kết quả trên chúng tôi đưa ra so sánh giữa hệ số của các đa thức ứng với hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})M)$, đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul $\chi_k(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d};M)$ và hệ số Hilbert $e_{d-i}(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d};M)$ (Định lý 2.4.3).

Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 2, cụ thể là về tính đa thức của hàm $h_I^0(n) := \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(R/I^{n+1}))$. Trong Tiết 3.1, chúng tôi chỉ ra $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức nếu I là iđêan chính (Định lý 3.1.5). Hơn nữa chúng tôi cũng đưa ra công thức tính cho hệ số đầu tiên của đa thức tương ứng qua số bội và độ dài một số các môđun đối đồng điều địa phương (Định lý 3.1.7). Trong Tiết 3.2, chúng tôi chứng minh $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức nếu R là không trộn lẫn và I là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R (Định lý 3.2.5). Để tính các hệ số của đa thức này chúng tôi phải hạn chế xuống trường hợp vành là Cohen-Macaulay suy rộng. Khi đó các hệ số của đa thức này được tính qua độ dài của các môđun đối đồng điều địa phương (Định lý 3.2.8).

Vấn đề 3 được tìm hiểu trong Chương 4. Trong Tiết 4.1, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và các ví dụ về bậc đối đồng điều. Trong Tiết 4.2, sử dụng các môđun $U_M^{i,\Lambda}$ chúng tôi đặc trưng tính Cohen-Macaulay của M và một số tính chất mở rộng của nó. Trong Tiết 4.3, chúng tôi xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều bằng cách sử dụng số bội của các môđun $U_M^{i,\Lambda}$ (Định lý 4.3.4). Trong tiết cuối của chương, chúng tôi đưa ra một số so sánh giữa bậc đối đồng điều xây dựng trong Tiết 4.3 với bậc đồng điều hdeg đối với một số lớp môđun đặc biệt.

Trong toàn bộ luận án này, $(R,\mathfrak{m},k)$ luôn là một vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ và trường thặng dư vô hạn $k = R/\mathfrak{m}$.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Mục đích của chương này là nhắc lại một số kết quả xoay quanh đối đồng điều địa phương, hệ tham số p-chuẩn tắc, d-dãy, dd-dãy, hệ số Hilbert và đặc trưng Euler-Poincaré của phức Koszul. Cấu trúc của chương gồm 4 phần.

1.1. Môđun đối đồng điều địa phương và hệ tham số p-chuẩn tắc

Mục tiêu của tiết này là nhắc lại một số kết quả quan trọng về môđun đối đồng điều địa phương như tính triệt tiêu, tính Artin và khái niệm hệ tham số p-chuẩn tắc được dùng cho chứng minh các kết quả ở các chương sau.

1.2. d-dãy và dd-dãy

Mục tiêu của tiết này là nhắc lại một số khái niệm và kết quả quan trọng về d-dãy và dd-dãy. Cụ thể nếu $x_1, \ldots, x_d$ là hệ tham số p-chuẩn tắc thì $x_1, \ldots, x_d$ là một dd-dãy trên M. Ngược lại $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ sẽ là hệ tham số p-chuẩn tắc, với mọi $n_i \geq i, i = 1 \ldots, d$.

1.3. Đa thức Hilbert

Trong tiết này chúng tôi nhắc lại một số kết quả về đa thức Hilbert của các môđun hữu hạn sinh và một khái niệm mở rộng là đa thức Rees của một cặp iđêan.

1.4. Đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao

Trong tiết cuối của chương này, chúng tôi trình bày lại một số kết quả đã biết về các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul. Cho $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$, xét phức Koszul tương ứng $K(x_1, \ldots, x_r; M)$. Kí hiệu $H_k(x_1, \ldots, x_r; M)$ là môđun đồng điều Koszul thứ k và giả sử các môđun này có độ dài hữu hạn. Đặc trưng Euler-Poincaré bậc k của phức $K(x_1, \ldots, x_r; M)$ được định nghĩa là

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) = \sum_{i=k}^{r} (-1)^{i-k} \ell(H_i(x_1, \ldots, x_r; M)).$$

Chương 2

Hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của hệ tham số là dd-dãy mà trong luận án này chúng tôi gọi là hệ tham số *hầu p-chuẩn tắc*. Từ một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M, chúng tôi định nghĩa một họ các môđun con thương $U_M^{i,\Lambda}$, trong đó $i = 0, 1, \ldots, d-1$ và $\Lambda \subseteq \{i+1, \ldots, d\}$.

Sử dụng số bội của các môđun $U_M^{i,\Lambda}$, chúng tôi đưa ra các công thức tính cho các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và các hệ số Hilbert đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Chúng tôi cũng đưa ra một so sánh giữa các hệ số của các đa thức ứng với hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$, các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul và các hệ số Hilbert đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

2.1. Hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Mục tiêu của tiết này là nghiên cứu một số tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra một điều kiện hữu hạn để kiểm tra một hệ tham số khi nào là hầu p-chuẩn tắc.

Định nghĩa 2.1.1. Một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ của một môđun M được gọi là một *hệ tham số hầu p-chuẩn tắc* nếu tồn tại các số nguyên $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$ sao cho

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i,$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$.

Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của một môđun M. Đặt $\underline{x}(\underline{n}) = (x_1^{n_1}, \ldots, x_n^{n_d})$ với $n_1, \ldots, n_d > 0$. Xét hàm số

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{n}) =& \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - n_1 \ldots n_d e(x_1, \ldots, x_d; M) \\ & - \sum_{i=0}^{d-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M}) \end{aligned}$$

theo $n_1, \ldots, n_d$. Khi đó ta có kết quả sau.

Định lý 2.1.5 (ii). *Hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của một môđun M khi và chỉ khi $\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{n}) = 0$ với mọi $1 \leq n_1, \ldots, n_d \leq 2$.*

2.2. Bậc không triệt tiêu của hàm độ dài

Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Cố định $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ và đặt $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Kí hiệu

$$x_\Lambda M = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})M.$$

Với $0 \leq i \leq d$ và $i + 1 \notin \Lambda$, đặt

$$U^{i,\Lambda}_{M,\, \underline{x}} := \begin{cases} (0 : x_{i+1})_{M/x_\Lambda M} & \text{nếu } i \leq d-1, \\ M/x_\Lambda M & \text{nếu i=d.} \end{cases}$$

Đặc biệt, khi $\Lambda = \{i+2, \ldots, j\}$, kí hiệu $U^{i,\Lambda}_{M,\underline{x}} = U^{ij}_{M,\underline{x}}$. Với mỗi bộ số nguyên dương $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$, ta có mệnh đề quan trọng sau.

Mệnh đề 2.2.2. *Các môđun $U^{i,\Lambda}_{M,\, \underline{x}(\underline{n})}$ chỉ phụ thuộc vào i, Λ và không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của*

M và số mũ $n_1, \ldots, n_d$. Cụ thể, nếu $\underline{y}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc khác của M thì ta có $U^{i,\Lambda}_{M,\, \underline{x}(\underline{n})} \simeq U^{i,\Lambda}_{M,\, \underline{y}(\underline{m})}$, với mọi $n_1, \ldots, n_d, m_1, \ldots, m_d \geq 2$.

Lớp đẳng cấu của các môđun $U^{i,\Lambda}_{M,\, \underline{x}(\underline{n})}$ được kí hiệu là $U^{i,\Lambda}_M$. Với $\Lambda = \{i+2, \ldots, j\}$ kí hiệu $U^{i,\Lambda}_M = U^{ij}_M$, trong đó $0 \leq i < j \leq d$. Trước tiên, ta có mối quan hệ quan trọng giữa các môđun con thương này trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2.6. *Giả sử M có hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Các phát biểu sau là đúng.*

(i) Cho $i = 1, \ldots, d$ và $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \{i+2, \ldots, d\}$. Khi đó tồn tại đơn cấu

$$\varphi : U^{i,\Lambda}_M \hookrightarrow U^{i,\Lambda'}_M,$$

sao cho $\mathrm{Im}(\varphi)$ là một thành phần trực tiếp của $U^{i,\Lambda'}_M$.

(ii) Nếu $\Lambda = \{i+2, \ldots, j-1\}$ và $\Lambda' = \{i+2, \ldots, j\}$, kí hiệu $\mathrm{Coker}(\varphi)$ là $\overline{U}^{ij}_M$. Khi đó ta có phân tích

$$U^{ij}_M \simeq \overline{U}^{ij}_M \oplus \overline{U}^{i,j-1}_M \oplus \ldots \oplus \overline{U}^{i,i+2}_M \oplus U^{i,i+1}_M.$$

Để thuận tiện cho việc trình bày ta đặt $\overline{U}^{i,i+1}_M := U^{i,i+1}_M$. Ứng dụng đầu tiên của các môđun này là kết quả sau.

Định lý 2.2.7. *Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Khi đó ta có*

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; U^{id}_M),$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Hệ quả là ta có biểu diễn

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_{d_j} n_1 \ldots n_{d_j},$$

trong đó $\lambda_{d_0}, \ldots, \lambda_{d_r} \neq 0$ và các bậc không triệt tiêu $d_0, \ldots, d_r$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số.

2.3. Đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Đối với các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao ta có kết quả sau.

Định lý 2.3.5. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Với $0 < k \leq r \leq d$, ta có*

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) = \sum_{t=0}^{r-k} \sum_{j=t}^{r-k} \binom{r-j-2}{k-2} e(x_1, \ldots, x_t; U_M^{t,j+1}).$$

Kí hiệu, $N_{r,r-k,t} = \bigoplus_{i=0}^{r} (U_M^{t,j+1})^{\oplus \binom{r-j-2}{k-2}}$. *Khi đó,*

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) = \sum_{t=0}^{r-k} e(x_1, \ldots, x_t; N_{r,r-k,t}).$$

2.4. Hệ số Hilbert đối với iđêan sinh bởi hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M và $I = (x_1, \ldots, x_d)$ là iđêan tham số sinh bởi $x_1, \ldots, x_d$. Để thuận tiện cho trình bày ta kí hiệu $e_i(I; M) = e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M)$, với mọi $0 \leq i \leq d$. Khi đó, chúng tôi thu được kết quả sau.

Định lý 2.4.1. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và I là iđêan sinh bởi $x_1, \ldots, x_d$. Khi đó với mọi $n > 0$, ta có*

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) \binom{n+i}{i}.$$

Hơn nữa, $e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) = \sum_{t=0}^{i} e(x_1, \ldots, x_t; \overline{U}_M^{t,i+1})$, *với mọi* $0 \leq i \leq d-1$.

Định lý 2.4.1 cho ta một hệ quả trực tiếp sau.

Hệ quả 2.4.2. *Với giả thiết và kí hiệu như trong Định lý 2.4.1. Khi đó,*

$$e_{d-i}(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d};M)=\sum_{t=0}^{i} n_1\ldots n_t e(x_1,\ldots,x_t;\overline{U}_M^{t,i+1})$$

là một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng i, *với mọi* $0\le i\le d-1$.

Trong định lý thứ hai của tiết này chúng tôi đưa ra một quan hệ đặc biệt giữa hàm độ dài, đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và các hệ số Hilbert đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Trước đây, việc so sánh này hầu như là bất khả thi. Tuy nhiên với việc tính toán các hệ số của các đa thức này thông qua bội của các môđun U_M^{ij}, ta thu được quan hệ rất thú vị giữa chúng.

Định lý 2.4.3. *Cho* $x_1,\ldots,x_d$ *là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của* M *với*

$$\ell(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})M)=\sum_{j=0}^{r}\lambda_{d_j}n_1\ldots n_{d_j},$$

ở đây $d_0<d_1<\ldots<d_r$ *là các bậc ứng với* $\lambda_{d_j}\neq 0$. *Khi đó, với* $0\le i<d$, *ta có*

$$e_{d-i}(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d};M)=\sum_{d_j\le i}\mu_{d_j}n_1\ldots n_{d_j},$$

$$\chi_{d-i}(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d};M)=\sum_{d_j\le i}\lambda_{i,d_j}n_1\ldots n_{d_j},$$

với mọi $n_1,\ldots,n_d>0$. *Ở đây các hệ số* $\lambda_{i,d_j},\mu_{d_j}$ *thỏa mãn*

$$0\le \mu_{d_j}\le\lambda_{i,d_j}\le(\lambda_{d_j})^{\binom{d-d_j-1}{d-i-1}}.$$

Chương 3

Hàm độ dài của iđêan bão hòa của lũy thừa iđêan

Mục đích của chương này là đưa ra một số điều kiện đủ để hàm $h^0_I(n)$ là một hàm đa thức, nghĩa là, tồn tại đa thức $P_I(n)$ sao cho $h^0_I(n) = P_I(n)$ với mọi $n \gg 0$. Vì $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n) = \bigcup_{s>0}(I^n :_R \mathfrak{m}^s)/I^n$ nên chúng tôi gọi $h^0_I(n)$ là *hàm độ dài của iđêan bão hòa* của lũy thừa iđêan I. Trong các kết quả chính của chương này, chúng tôi chỉ ra rằng $h^0_I(n)$ là một hàm đa thức trong hai trường hợp: I là iđêan chính; R là không trộn lẫn và I là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R.

3.1. Trường hợp iđêan chính

Trong tiết này, chúng tôi xét I là một iđêan chính và chỉ ra hàm $h^0_I(n)$ là một hàm đa thức bằng cách xét mối quan hệ giữa hàm $h^0_I(n)$ với hàm Hilbert của môđun Artin $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$. Hơn nữa, chúng tôi chỉ ra rằng hệ số đầu tiên của đa thức tương ứng được tính qua số bội và độ dài các môđun đối đồng điều địa phương. Cụ thể ta có các kết quả sau.

Định lý 3.1.5. *Cho $I = aR$ là một iđêan chính của vành R. Khi* *đó, tồn tại đa thức $P_I(n)$ với $\deg(P_I(n)) \leq 1$ sao cho $P_I(n) = h_I^0(n)$ với mọi $n \gg 0$.*

Ta đặt

$$P_I(n) = ne_0^{sat}(a;R) + e_1^{sat}(a;R),$$

trong đó $I = aR$ và các hệ số $e_0^{sat}(a;R), e_1^{sat}(a;R)$ là các số nguyên. Khi đó ta có công thức tính hệ số $e_0^{sat}(a;R)$ như sau.

Định lý 3.1.3. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $I = aR$ là một iđêan chính của vành R. Khi đó, ta có*

$$e_0^{sat}(a;R) = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)_1 \setminus V(I)} \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}))e(a;R/\mathfrak{p}),$$

ở đây $\operatorname{Ass}(R)_1 = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R) : \dim(R/\mathfrak{p}) = 1\}$.

3.2. Trường hợp iđêan sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Trong tiết này, chúng tôi xét các iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số và nghiên cứu khi nào hàm $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức. Đầu tiên, chúng tôi xét iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi trong Vấn đề 2. Để tính các hệ số của đa thức tương ứng, chúng tôi phải hạn chế xuống trường hợp đặc biệt, R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng. Cụ thể chúng tôi có các kết quả sau.

Trước tiên với $0 \leq i < j \leq d$, gọi t là số nguyên dương sao cho $t = 1$ nếu $i \geq 1$ và $t = j+1$ nếu $i = 0$. Đặt $I_1 = I :_R x_t$.

Định lý 3.2.5. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và R là không trộn lẫn. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R. Với $0 \leq i < j \leq d$, cho I*

là iđêan sinh bởi $x_{i+1},\ldots,x_j$*. Khi đó, tồn tại đa thức* $P_I(n)$ *sao cho* $h^0_I(n) = P_I(n)$ *với mọi* $n \gg 0$*. Hơn nữa,* $\deg(P_I(n)) + 1$ *là chiều của môđun phân bậc* $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I_1^n/I^n$ *trên đại số Rees* $\mathcal{R}(I)$*.*

Định lý 3.2.8. *Giả sử* R *là vành Cohen-Macaulay suy rộng, địa phương. Cho* I *là iđêan của* R *sinh bởi một phần hệ tham số chuẩn tắc của* R *gồm* i *phần tử,* $i < d$*. Khi đó*

$$h^0_I(n) = h^0(R) + \sum_{t=0}^{i-1}\Big(\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}h^{j+1}(R)\Big)\binom{n+t}{t},$$

với mọi $n \geq 0$*. Ở đây* $h^j(R) = \ell(H^j_{\mathfrak{m}}(R))$*. Đặc biệt,* $h^0_I(n) = 0$ *nếu* $i < \operatorname{depth}(R)$ *và* $\deg(h^0_I(n)) = i - 1$ *nếu* $\operatorname{depth}(R) \leq i < d$*.*

Ví dụ sau đây chỉ ra Định lý 3.2.7 không thể mở rộng cho trường hợp tổng quát mà iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số bất kỳ.

Ví dụ 3.2.9. Theo Cutkosky, Ha, Srinivasan và Theodorescu (2005), tồn tại một vành chính quy $(A,\mathfrak{n})$ có chiều 4 và một iđêan I sao cho $h^0_I(n)$ không là một đa thức với $n \gg 0$. Chọn một hệ sinh của I là $a_1,...,a_r$. Cho $S = A[T_1,...,T_r]_{(T_1,...,T_r)+\mathfrak{n}}$ và đặt $J = (T_1+a_1,...,T_r+a_r)$. Khi đó, $S/J \cong A$. Do đó J là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số của S. Vì S là chính quy nên S/J^n là Cohen-Macaulay với mọi n.

Ta có $\operatorname{Ann}_S(A) = (T_1,...,T_r)$. Do đó $A/J^nA = A/I^n$. Đặt $\mathfrak{n}' = (T_1,...,T_r) + \mathfrak{n}S$ thì $H^0_{\mathfrak{n}'}(S/J^n) = 0$ và $H^0_{\mathfrak{n}'}(A/J^nA) \cong H^0_{\mathfrak{n}}(A/I^n)$.

Cho $R = S \ltimes A$ là vành iđêan hóa. Đặt $\mathfrak{q} = ((T_1+a_1,0),\ldots,(T_r+a_r,0))$. Lưu ý rằng, $\mathfrak{q}$ là iđêan trong vành địa phương R sinh bởi một phần hệ tham số và

$$R/\mathfrak{q}^n \simeq S/J^n \ltimes A/I^n,$$

với mọi n. Gọi $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại của R. Khi đó,

$$\ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{q}^n)) = \ell(H^0_{\mathfrak{n}}(A/I^n)),$$

không là đa thức theo n.

Chương 4

Một họ các bậc đối đồng điều

Mục đích của chương này là sử dụng bội của các môđun $\overline{U}_M^{ij}$ để xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều. Chúng tôi cũng so sánh các bậc đối đồng điều này với hdeg, udeg trong một số trường hợp đặc biệt. Cấu trúc của chương gồm 4 phần.

4.1. Bậc đối đồng điều trên vành địa phương

Mục đích của tiết này là nhắc lại các khái niệm và tính chất của các bậc đối đồng điều đã biết: hdeg, udeg và bdeg.

4.2. Các cản trở Cohen-Macaulay

Mục đích của tiết này là sử dụng các môđun con thương đã xây dựng trong Chương 2 để đặc trưng tính chất Cohen-Macaulay và một số tính chất mở rộng. Một ví dụ là kết quả sau.

Trước tiên, cho $x_1, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và $D_0 \subset D_1 \ldots \subset D_t = M$, với $\dim(D_i) = d_i, i = 0, \ldots, t$ là lọc chiều của M. Khi đó ta có $D_i \cap (x_{d_i+1}, \ldots, x_d)M = 0$. Do đó tồn tại đồng cấu nhúng tự nhiên $\tau_i : D_i \hookrightarrow U_M^{d_i,d}$, với $i = 1, 2, \ldots, t$ và $d_i = \dim(D_i)$. Khi đó ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.2.4. *Cho M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Các phát biểu sau là tương đương:*

(i) M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy;

(ii) $\ell(U_M^{jd}) < \infty$, với $j \neq d_0, \ldots, d_{t-1}$, và $\ell(\mathrm{Coker}(\tau_i)) < \infty$, với $i = 0, \ldots, t-1$;

(iii) $\dim(U_M^{jd}) < j$, với mọi $j \neq d_0, \ldots, d_{t-1}$, và $\dim(\mathrm{Coker}(\tau_i)) < d_i$, với mọi $i = 1, \ldots, t-1$.

Đặc biệt, M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $e(\overline{U}_M^{ij})_i = 0$, với mọi $0 \leq i < j \leq d$, ở đây $d = \dim(M)$.

4.3. Một họ vô hạn các bậc đối đồng điều

Kết quả sau là kết quả chính của chương này. Trong kết quả này, chúng tôi sử dụng số bội của các môđun $\overline{U}_M^{ij}$ trong tiết trước để xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều. Cụ thể ta có kết quả sau.

Định lý 4.3.4. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương với $\dim(R) = n$. Cho $\Lambda = \{\lambda_{ijk} \in \mathbb{R} : 0 \leq i < j \leq k \leq n\}$ là tập các số thực thỏa mãn*

$$\lambda_{01k} = 1, \text{ với } 1 \leq k \leq n,$$

$$\lambda_{0jk} \leq \lambda_{0,j+1,k+1} \text{ và } \lambda_{ijk} \leq \lambda_{i+1,j+1,k+1}, \text{ với } 0 \leq i < j \leq k < n.$$

Định nghĩa hàm $\mathrm{Deg}_\Lambda : Mod_R \to \mathbb{R}$ bằng cách cho tương ứng mỗi môđun hữu hạn sinh M có chiều d với số thực

$$\mathrm{Deg}_\Lambda(M) := e(M) + \sum_{0 \leq i < j \leq d} \lambda_{ijd} e\left(\overline{U}_M^{ij}\right)_i.$$

Khi đó Deg_Λ là một bậc đối đồng điều.

4.4. So sánh các bậc đối đồng điều

Kí hiệu $\mathcal{D}(R)$ là tập tất cả các bậc đối đồng điều trong Định lý 4.3.4. Một câu hỏi thú vị là bậc đồng điều hdeg có thuộc họ $\mathcal{D}(R)$ hay không? Do bậc không trộn lẫn udeg là bậc nhỏ nhất trong $\mathcal{D}(R)$ nên câu hỏi này cũng liên quan đến một giả thuyết của các tác giả N.T. Cường-P.H. Quý trong (2015), phát biểu là $\mathrm{udeg}(M) \leq \mathrm{hdeg}(M)$. Chúng tôi chưa trả lời được câu hỏi trên trong trường hợp tổng quát. Thay vào đó, chúng tôi đưa ra so sánh giữa bậc hdeg và bậc Deg_b trong một số trường hợp đặc biệt.

Trước tiên, cho $\lambda_{ijk} = \binom{k-1}{i}$, với $0 \leq i < j \leq k$. Theo Định lý 4.3.4,

$$\mathrm{Deg}_b(M) := e(M) + \sum_{0 \leq i < j \leq d} \binom{d-1}{i} e(\overline{U}_M^{ij})_i,$$

là một bậc đối đồng điều, ở đây $d = \dim(M)$.

Khi đó, ta nhận được so sánh giữa các bậc đối đồng điều hdeg và Deg_b trong một số trường hợp đặc biệt như sau.

Hệ quả 4.4.2. *Ta có* $\mathrm{hdeg}(M) = \mathrm{Deg}_b(M)$ *trong các trường hợp sau:*

(i) M là một môđun Cohen-Macaulay dãy;

(ii) M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng;

(iii) $\dim(M) = 2$.

KẾT LUẬN

Trong luận án này, chúng tôi thu được một số kết quả sau.

(i) Đặc trưng một hệ tham số là hầu p-chuẩn tắc bằng một điều kiện hữu hạn của hàm $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n})$.

(ii) Xây dựng các môđun con thương $U_M^{i,\Lambda}$ với $\Lambda \subseteq \{i+2, \ldots, d\}$, ở đây $d = \dim(M)$. Áp dụng để chỉ ra bậc ứng với các hệ số khác không của hàm đa thức $\ell(M/\underline{x}(\underline{n}))$ là các bất biến của M.

(iii) Đưa ra công thức tính các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và hệ số Hilbert đối với một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thông qua số bội của các môđun $U_M^{i,\Lambda}$. Từ đó so sánh hệ số của đa thức ứng với các hàm độ dài $\ell(M/\underline{x}(\underline{n}))$, hệ số Hilbert $e_i(\underline{x}(\underline{n}); M)$ và đặc trưng Euler-Poincaré $\chi_k(\underline{x}(\underline{n}); M)$ đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

(iv) Chỉ ra hàm $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức trong các trường hợp I là iđêan chính hoặc sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Đưa ra công thức tính hệ số của đa thức đó trong trường hợp iđêan chính hoặc iđêan sinh bởi một phần hệ tham số chuẩn tắc trong vành Cohen-Macaulay suy rộng.

(v) Sử dụng số bội của các môđun $\overline{U}_M^{i,\Lambda}$ xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. D.T. Cuong and P.H. Nam, Hilbert coefficients and partial Euler-Poincaré characteristics of Koszul complexes of d-sequences, *J. Algebra.* **441** (2015), 125–158.
2. D.T. Cuong, P.H. Nam and P.H. Quy, On the length function of saturations of ideal powers, *Acta Math. Vietnam.* **43** (2018), 275–288.
3. D.T. Cuong and P.H. Nam, On a family of cohomological degrees, *J. Korean Math. Soc.* **57**(3) (2020), 669–689.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO VÀ THẢO LUẬN TẠI:

- Seminar Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học.
- Seminar Đại số giao hoán, Đại học Meiji, Nhật Bản.
- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học: 10/2014; 10/2015; 10/2016; 10/2017; 10/2018.
- Hội nghị ĐAHITÔ, tháng 10/2016 tại Buôn Ma Thuột.
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán, tháng 1/2017 tại Thái Nguyên.
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán và liên hệ với Tổ hợp, Hình học rời rạc và Lý thuyết kỳ dị, tháng 9/2017 tại Hà Nội - Hạ Long.
- Hội nghị quốc tế Đài Loan-Việt Nam về Toán, tháng 5/2018 tại Cao Hùng, Đài Loan.
- Hội nghị Toán học Việt-Mỹ, tháng 6/2019 tại Quy Nhơn.