VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

PHẠM HỒNG NAM

MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA MÔĐUN LIÊN KẾT VỚI HỆ THAM SỐ HẦU P-CHUẨN TẮC

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2020

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

PHẠM HỒNG NAM

MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA MÔĐUN LIÊN KẾT VỚI HỆ THAM SỐ HẦU P-CHUẨN TẮC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tập thể hướng dẫn:
PGS.TS. Đoàn Trung Cường
GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Hà Nội - 2020

Tóm tắt

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán Noether địa phương và M là một R-môđun hữu hạn sinh. Mục đích chính của luận án là nghiên cứu một lớp hệ tham số đặc biệt của môđun M gọi là các hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và ứng dụng để tính toán một số đại lượng như đặc trưng Euler-Poincaré của phức Koszul, hệ số Hilbert, đa thức Hilbert và xây dựng một lớp các bậc đối đồng điều. Nội dung luận án được chia thành 4 chương.

Chương 1 được dành để nhắc lại một số kiến thức cơ sở về môđun đối đồng điều địa phương, hệ số Hilbert, hệ tham số p-chuẩn tắc, dd-dãy và đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul.

Trong Chương 2 chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Xét $0 \leq i \leq d-1$ và $\Lambda \subseteq \{i+2, \ldots, d\}$. Trước tiên chúng tôi chứng minh rằng các môđun $U_M^{i,\Lambda} = (0 : x_{i+1}^{n_{i+1}})_{M/(x_j^{n_j}:j\in\Lambda)M}$ không phụ thuộc vào $n_{i+1}, \ldots, n_d \geq 2$ và cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $\underline{x}$. Tiếp theo, sử dụng các môđun con thương này chúng tôi chỉ ra rằng các bậc tương ứng với các hệ số khác không của hàm đa thức $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số và thu được một dãy bất biến quan trọng của M. Sử dụng bội của các môđun con thương này, chúng tôi đưa ra công thức tính các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ và các hệ số Hilbert $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ đối với một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Từ đó đưa ra so sánh giữa các hệ số của các đa thức ứng với hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$, các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và các hệ số Hilbert đối với luỹ thừa của một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

Trong Chương 3, cho I là một iđêan thực sự của vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$, chúng tôi chỉ ra hàm $\ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+1}))$ là một hàm đa thức trong trường hợp I là iđêan chính hoặc I là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Hơn nữa, trong trường hợp I là iđêan chính hoặc I là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số chuẩn tắc trong vành Cohen-Macaulay suy rộng, chúng tôi đưa ra công thức tính các hệ số của đa thức này qua độ dài các môđun đối đồng địa phương và số bội. Phần cuối của chương này, chúng tôi đưa ra ví dụ về một vành địa phương R và một iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số nhưng hàm $\ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+1}))$ không là đa thức theo n.

Chương 4 được dành để trình bày về một ứng dụng của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc để xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều của R. Chúng tôi cũng có một số so sánh giữa các bậc trong họ này với bậc đồng điều của Vasconcelos đối với một số lớp môđun đặc biệt.

Abstract

Let $(R, \mathfrak{m})$ be a commutative Noetherian local ring and M be a finitely generated R-module. The aim of this thesis is to study a class of systems of parameters of the module M called almost p-standard systems of parameters and their applications in computing the partial Euler-Poincaré characteristic of Koszul complex, Hilbert coefficients, Hilbert polynomial and in constructing a family of cohomological degree. The thesis consists of four chapters.

In Chapter 1, we recall some basic results on local cohomology, Hilbert coefficients, p-standard systems of parameters, dd-sequences and partial Euler-Poincaré characteristic of Koszul complex.

In Chapter 2, we study several properties of almost p-standard system of parameters. Let $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ be an almost p-standard of M. Take $0 \leq i \leq d$ and $\Lambda \subseteq \{i+2, \ldots, d\}$. Firstly, we prove that the subquotient module $U_M^{i,\Lambda} = (0 : x_{i+1}^{n_{i+1}})_{M/(x_j^{n_j}: j \in \Lambda)M}$ does not depend on $n_{i+1}, \ldots, n_d \geq 2$ and the choice of $\underline{x}$. By using theses subquotient modules we show that the degrees corresponding to the non-zero coefficients of the polynomial $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ does not depend on the choice of the system of parameters and obtain a sequence of important numerical invariants of M. Using multiplicities of these subquotients, we give precise formulas to compute all the partial Euler-Poincaré characteristics $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ of the Koszul complex and the Hilbert coefficients $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ of the module with respect to an almost p-standard system of parameters. The formulas anable us to establish some comparision between coefficients of the polynomials associated to the length function $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M$, the partial Euler-Poincaré characteris-

tics and the Hilbert coefficients with respect to powers of an almost p-standard system of parameters.

In Chapter 3, for an ideal I we show that the function $\ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+1}))$ is a polynomial for n big enough if either I is a principle ideal or I is generated by part of an almost p-standard system of parameters. Furthermore, we are able to compute the coefficients of this polynomial in terms of length of certain local cohomology modules and usual multiplicity if either I is principal or I is generated by part of a standard system of parameters in a generalized Cohen-Macaulay ring. We also give an example of an ideal generated by part of a system of parameters such that the function $\ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+1}))$ is not a polynomial for $n \gg 0$.

Chapter 4 is used for an application of almost p-standard system of parameters in a construction of an infinite family of cohomological degrees of R. We also compare the cohomological degrees in this family with the homological degree of Vasconcelos for special classes of modules.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của các đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Các kết quả được nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Phạm Hồng Nam

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy và Cô tôi: PGS.TS. Đoàn Trung Cường và GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Thầy đã dành rất nhiều công sức và kiên nhẫn để không chỉ dẫn dắt, giảng dạy cho tôi về kiến thức, kinh nghiệm và tư duy của người làm Toán, mà còn luôn chỉ bảo cho tôi cách thức nhìn nhận của người làm Toán trong cuộc sống. Thầy đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong học tập, nghiên cứu và cho tôi cơ hội được giao lưu với cộng đồng Đại số giao hoán. Điều đó đã giúp tôi tự tin hơn trong bước đầu tiên nghiên cứu khoa học. Được làm việc dưới sự hướng dẫn của Thầy là một may mắn lớn của tôi. Tôi xin gửi lời cảm ơn đến GS. Lê Thị Thanh Nhàn. Sự tận tình dạy dỗ và chỉ bảo của Cô từ lúc tôi học Đại học đã giúp tôi có cơ sở để có thêm những hoài bão trong khoa học. Nhờ những định hướng, chỉ dẫn của Cô mà tôi đã được may mắn học tập và nghiên cứu trong điều kiện tốt nhất. Tôi xin được bày tỏ tấm lòng biết ơn vô hạn đến Thầy, Cô.

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn vô cùng sâu sắc đến GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường và nhóm nghiên cứu. Thầy đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có cơ hội tham gia các hội thảo quan trọng, các buổi học về các vấn đề mới. Với tấm lòng của mình, tôi xin được trân trọng cảm ơn Thầy.

Tôi cũng trân trọng cảm ơn Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau đại học, các phòng chức năng của Viện Toán học đã cho tôi một môi trường học tập và nghiên cứu lý tưởng để tôi có thể hoàn thành luận án này. Tôi cũng trân trọng cảm ơn phòng Đại số và Lý thuyết số đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi được tham gia các sinh hoạt khoa học của liên phòng.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, các đồng nghiệp trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi nhất, phù hợp nhất để tôi vừa hoàn thành việc học tập, vừa đảm bảo công việc giảng dạy của mình tại Trường. Tôi xin cảm ơn các anh, chị đang học tập và nghiên cứu tại Phòng Đại số và Lý thuyết số về những trao đổi, chia sẻ và hỗ trợ trong khoa học cũng như cuộc sống.

Tôi xin được bày tỏ sự biết ơn vô hạn tới Bố, Mẹ, Dì và anh chị em trong gia đình đã luôn động viên, kiên nhẫn, chờ đợi kết quả học tập của tôi. Đặc biệt là vợ: Phương Thảo và hai con nhỏ: Khôi Nguyên và Bảo Ngọc, những người đã luôn hy sinh rất nhiều, luôn lo lắng, mong mỏi tôi tiến bộ từng ngày. Luận án này tôi xin được dành tặng cho những người mà tôi yêu thương.

Tác giả

Phạm Hồng Nam

Bảng các kí hiệu

$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên 1,2,3...
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathrm{Ann}(M)$	iđêan linh hóa tử của môđun M
$\mathrm{Ass}(M)$	tập iđêan nguyên tố liên kết của M
$\mathrm{depth}(M)$	độ sâu của M
$\dim(M)$	chiều của M
$e(I;M)$	số bội của M đối với iđêan I
$e(M)$	số bội của M đối với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$
$e_i(I;M)$	hệ số Hilbert thứ i của M đối với iđêan I
$H_I^i(M)$	môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M với giá I
hdeg	bậc đồng điều
$I(M)$	số Buchsbaum của M
$\ell(-)$	hàm độ dài
Mod_R	phạm trù các R-môđun hữu hạn sinh
$\mathcal{R}(I)$	vành Rees của R đối với iđêan I
Supp(M)	giá của môđun M
udeg	bậc không trộn lẫn
$\mu(M)$	số phần tử sinh tối tiểu của M

Mục lục

Mở đầu

Một vấn đề quan trọng trong đại số giao hoán được các nhà toán học nghiên cứu từ lâu là mối liên hệ giữa các cấu trúc đại số của một vành hay một môđun với các bất biến bằng số. Thông thường sự triệt tiêu hoặc độ lớn của các bất biến này dẫn đến các thông tin về độ phức tạp của cấu trúc tương ứng. Việc tính toán, đánh giá các bất biến đó nói chung không dễ, phản ánh sự khó khăn trong việc nghiên cứu các cấu trúc đại số. Luận án này tập trung nghiên cứu tính chất của một số bất biến của môđun hữu hạn sinh trên một vành địa phương Noether liên kết với một lớp hệ tham số đặc biệt, gọi là các hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

Một trong những lớp môđun quan trọng nhất trong đại số giao hoán là môđun Cohen-Macaulay. Các môđun này có nhiều tính chất đại số phong phú và ứng dụng quan trọng trong toán học. Việc nghiên cứu các môđun này khá thuận lợi và thu được nhiều kết quả, một phần là vì môđun Cohen-Macaulay được đặc trưng bằng sự tồn tại các hệ tham số là dãy chính quy, dẫn đến nhiều bất biến của môđun có thể tính toán cụ thể. Hệ tham số của một môđun bất kỳ nói chung không là dãy chính quy, tuy nhiên vẫn có những lớp hệ tham số có tính chất tương tự, mở rộng các tính chất của các dãy này. Thông thường, tính chất của các hệ tham số là dãy chính quy được mở rộng cho các môđun hữu hạn sinh bất kỳ theo hai hướng. Một hướng xét các hệ tham số đồng thời là các dãy lọc chính quy, theo nghĩa nào đó, các phần tử của hệ tham số tránh càng nhiều iđêan nguyên tố liên kết càng tốt. Chúng được các nhà toán học N.T. Cường, Schenzel và N.V. Trung nghiên cứu đầu tiên và thu được nhiều kết quả trong [54]. Các hệ tham số này mở rộng trực tiếp khái niệm dãy chính quy và có rất nhiều ứng dụng trong đại số giao hoán, đặc biệt trong việc đánh giá các bất biến của môđun và vành. Một hướng khác là xét các hệ tham số là d-dãy, một khái niệm do Huneke [34] đưa ra. Ví dụ, các hệ tham số chuẩn tắc của vành và môđun Buchsbaum hay Cohen-Macaulay suy rộng là những hệ tham số cũng đồng thời là d-dãy. Nhờ các tính chất tốt của d-dãy nên các hệ tham số là d-dãy có thể giúp định nghĩa hoặc tính toán chính xác được nhiều bất biến liên quan.

Ví dụ hệ tham số đồng thời là d-dãy trong trường hợp tổng quát hơn là các hệ tham số mà phần tử thuộc vào một số iđêan linh hoá tử của môđun đối đồng điều địa phương, gọi là các hệ tham số p-chuẩn tắc. Khái niệm này được tác giả N.T. Cường đưa ra trong [16, 1] và có vai trò đặc biệt quan trọng trong lời giải của Kawasaki cho bài toán Macaulay hoá và giả thuyết của Sharp về điều kiện tồn tại phức đối ngẫu [35, 36]. Các hệ tham số này đều là những d-dãy rất đặc biệt, dẫn đến nhiều ứng dụng quan trọng của lớp các hệ tham số này.

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán Noether địa phương với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ và M là một R-môđun hữu hạn sinh với chiều $\dim(M) = d$. Kí hiệu các môđun đối đồng điều địa phương của M với giá $\mathfrak{m}$ là $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và kí hiệu các iđêan linh hoá tử $\mathfrak{a}_i(M) = \mathrm{Ann}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. Đặt $\mathfrak{a}(M) = \mathfrak{a}_0(M) \ldots \mathfrak{a}_{d-1}(M)$. Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay nào đó. Theo một kết quả của P. Schenzel [43] thì ta luôn có $\dim(R/\mathfrak{a}(M)) < d$. Vì vậy luôn có thể chọn một phần tử tham số của M trong $\mathfrak{a}(M)$. Hệ quả là tồn tại một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ thỏa mãn tính chất $x_d \in \mathfrak{a}(M), x_{d-1} \in \mathfrak{a}(M/x_dM), \ldots, x_1 \in \mathfrak{a}(M/(x_2, \ldots, x_d)M)$. Hệ tham số như vậy được gọi là một hệ tham số p-chuẩn tắc của M (xem [16, 1]). Nếu M là đẳng chiều, nghĩa là mọi iđêan nguyên tố liên kết tối tiểu $\mathfrak{p}$ của M thoả mãn $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(M)$, thì $\mathfrak{a}(M)$ xác định quỹ tích không Cohen-Macaulay của M, nghĩa là

$$V(\mathfrak{a}(M)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : M_{\mathfrak{p}} \text{ không là Cohen-Macaulay}\}$$

(xem [14, 15]). Do đó, một cách tự nhiên hệ tham số p-chuẩn tắc có quan hệ chặt chẽ với cấu trúc của M. Một trong những tính chất rất quan trọng của hệ tham số p-chuẩn tắc, cũng liên quan đến tên của hệ tham số này, là tính chất đa thức của hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$. Cụ thể hơn, theo [16, 1], nếu $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số p-chuẩn tắc, thì ta có

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i,$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$, trong đó

$$\lambda_i = e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M}).$$

Từ tính chất cuối này, có thể suy ra một hệ tham số p-chuẩn tắc luôn là một d-dãy đặc biệt (xem trong [16, 1]). Từ đó dẫn các tác giả N.T.

Cường và Đ.T. Cường [17] đến việc định nghĩa khái niệm dd-dãy, một cách mở rộng khái niệm hệ tham số p-chuẩn tắc cho một dãy phần tử với số phần tuỳ ý, tập trung ở khía cạnh d-dãy của các hệ tham số này. Nhắc lại rằng theo Huneke [34], một dãy phần tử $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ là một d-dãy trên môđun M nếu $(x_1, \ldots, x_i)M :_M x_j = (x_1, \ldots, x_i)M :_M x_{i+1}x_j$, với mọi $0 \leq i < j \leq r$. Một dãy $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ được gọi là một dd-dãy trên M nếu $x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}$ là d-dãy trên $M/(x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_r^{n_r})M$, với $i = 1, \ldots, r$ và với mọi $n_1, \ldots, n_r > 0$. Khi đó, một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ của M là một dd-dãy khi và chỉ khi

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i,$$

là một đa thức đặc biệt theo $n_1, \ldots, n_d > 0$ (xem trong [17, 2]). Do đó mọi hệ tham số p-chuẩn tắc cũng là dd-dãy trên M. Một mở rộng khác của hệ tham số p-chuẩn tắc cũng được tác giả P.H. Quý nghiên cứu trong luận án của mình năm 2013 [3]. Có thể nói mở rộng của P.H. Quý hoặc hệ tham số là dd-dãy như trên đều là những phiên bản khác của hệ tham số p-chuẩn tắc, mỗi phiên bản được định nghĩa để sử dụng thuận tiện trong một số tình huống khác nhau.

Các tác giả N.T. Cường và Đ.T. Cường [17] đã nghiên cứu các đa thức Hilbert và đặc trưng Euler Poincaré bậc cao của phức Koszul đối với một hệ tham số là dd-dãy và thu được nhiều kết quả thú vị. Các dãy này cũng được ứng dụng để nghiên cứu các môđun Cohen-Macaulay dãy và Cohen-Macaulay suy rộng dãy [18, 19]. Trong luận án này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các tính chất của hệ tham số đồng thời là dd-dãy cũng như sử dụng để nghiên cứu một số bất biến của môđun hữu hạn sinh trên một vành địa phương. Để thuận tiện chúng tôi gọi các hệ tham số đồng thời là dd-dãy là các hệ tham số *hầu p-chuẩn tắc*. Chúng tôi tập trung vào ba vấn đề nghiên cứu sau.

Vấn đề thứ nhất liên quan đến việc nghiên cứu, tính toán các hàm độ dài, các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul và các hệ số Hilbert của một môđun đối với một hệ tham số. Cụ thể hơn, cho một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ của môđun M và đặt $I = (x_1, \ldots, x_d)$. Với $0 \leq r \leq d$, kí hiệu $H_i(x_1, \ldots, x_r; M)$ là môđun đồng điều Koszul thứ i của M đối với dãy $x_1, \ldots, x_r$. Trong trường hợp các môđun $H_i(x_1, \ldots, x_r; M)$ có độ dài hữu hạn với mọi $k \leq r \leq d$ thì đặc trưng Euler-Poincaré bậc

k của phức Koszul tương ứng với dãy $x_1, \ldots, x_r$ được định nghĩa là

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) := \sum_{i=k}^{r} (-1)^{i-k} \ell(H_i(x_1, \ldots, x_r; M)).$$

Mặt khác, với mọi $n \gg 0$ ta có $\ell(M/I^{n+1}M) = P_{M,I}(n)$, trong đó

$$P_{M,I}(n) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i}(I; M) \binom{n+i}{i}$$

là đa thức Hilbert-Samuel của M đối với I. Các hệ số $e_i(I; M)$ hay $e_i(x_1, \ldots, x_d; M)$ được gọi là hệ số Hilbert của M đối với I (định nghĩa hệ số Hilbert này có thể sai khác dấu so với định nghĩa của một số tác giả khác).

Xét các hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$, đặc trưng Euler-Poincaré $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$, hệ số Hilbert $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ như là các hàm theo $n_1, \ldots, n_d > 0$. Trong trường hợp hệ tham số bất kỳ, không có nhiều liên hệ rõ ràng giữa các hàm số trên. Tuy nhiên khi hệ tham số đặc biệt hơn thì có thể có một số quan hệ thú vị. Ví dụ, nếu hệ tham số là d-dãy thì các tác giả Goto-Hong-Vasconcelos [30, Định lý 3.7] đã đưa ra công thức tính cho các hệ số Hilbert qua các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul như sau

$$e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) = \chi_1(x_1, \ldots, x_{i+1}; M) - \chi_1(x_1, \ldots, x_i; M),$$

với $i = 0, 1, \ldots, d$. Mặt khác, nếu $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thì hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ là một đa thức với các hệ số là các số bội của các môđun con thương như ta đã thấy ở trên. Bên cạnh đó, các tác giả N.T. Cường và Đ.T. Cường [17, Định lý 1.3] chứng minh rằng các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ của phức Koszul cũng là đa thức có dạng tương tự, với các hệ số là các số bội của các môđun con của các môđun đồng điều Koszul. Các kết quả của Goto-Hong-Vasconcelos và N.T. Cường-Đ.T. Cường thúc đẩy chúng tôi nghiên cứu sâu hơn mối liên hệ giữa các hàm hàm trên, đặt ra vấn đề nghiên cứu sau đây.

Vấn đề 1. Cho một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $x_1, \ldots, x_d$ của môđun M, tính toán các đa thức ứng với các hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$, đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul $\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ và các hệ số Hilbert $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$, qua đó so sánh các đa thức này.

Vấn đề thứ hai là tính đa thức của hàm độ dài của iđêan bão hoà của luỹ thừa một iđêan. Cụ thể hơn, với một iđêan I của vành R, ta xét

$$h_I^0(n) := \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(R/I^{n+1}))$$

như một hàm nhận giá trị nguyên và không âm theo $n \geq 0$. Nếu I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thì $h_I^0(n) = \ell(R/I^{n+1})$ là hàm Hilbert-Samuel của R đối với I. Do đó $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức, nghĩa là có một đa thức $P_I(n)$ sao cho $h_I^0(n) = P_I(n)$ với mọi $n \gg 0$.

Trong trường hợp iđêan I tuỳ ý, Ulrich và Validashti (xem [50]) chứng minh rằng giới hạn

$$\limsup_{n\to\infty} d!\frac{h_I^0(n)}{n^d}$$

tồn tại, trong đó $d = \dim(R)$. Giới hạn này được gọi là ϵ-bội của R đối với I, kí hiệu là $\epsilon(I)$. Số bội này được dùng hiệu quả trong nghiên cứu về đẳng kỳ dị (xem [38]). Nếu R là rẽ nhánh giải tích hoặc $\dim(R) = 0$ thì Cutkosky [27] chỉ ra rằng $\epsilon(I)$ là hữu hạn và thay cho lấy $\limsup$, ta chỉ cần lấy $\lim$ trong định nghĩa của $\epsilon(I)$. Nếu R là vành đa thức và I là một iđêan đơn thức thì Herzog-Puthenpurakal-Verma [33] chứng minh rằng $\epsilon(I)$ là một số hữu tỷ.

Nếu $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức thì $\epsilon(I)$ là một số hữu tỷ và việc nghiên cứu $\epsilon(I)$ nói chung sẽ khá thuận lợi. Tuy nhiên, không phải trường hợp nào $h_I^0(n)$ cũng là một hàm đa thức. Trong [28, Định lý 2.2], Cutkosky, Ha, Srinivasan và Theodorescu đưa ra ví dụ một vành chính quy, địa phương R có chiều 4 và một iđêan I sao cho $\epsilon(I)$ là một số vô tỷ. Do đó $h_I^0(n)$ không phải là một hàm đa thức. Tuy vậy, việc xét các trường hợp hàm $h_I^0(n)$ là hàm đa thức vẫn có nhiều ý nghĩa. Vì thế chúng tôi đặt ra vấn đề nghiên cứu sau.

Vấn đề 2. Phải chăng $h_I^0(n)$ là hàm đa thức nếu I sinh bởi một phần hệ tham số?

Vấn đề thứ ba là xây dựng các bậc đối đồng điều. Khái niệm *bậc đối đồng điều* (hay bậc mở rộng) được các tác giả Doering, Gunston và Vasconcelos [29] đưa ra vào năm 1998 như một thước đo độ phức tạp của cấu trúc đại số của vành và môđun. Trong trường hợp môđun bất kỳ, các bậc đối đồng điều dẫn đến chặn trên cho hàng loạt bất biến quan trọng của môđun như số phần tử sinh tối tiểu, hệ số Hilbert, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của vành phân bậc, số Betti, số Bass... Ví dụ đầu tiên của bậc đối đồng điều là *bậc đồng điều* hdeg được Vasconcelos nghiên cứu trước đó. Ngay sau đó, một học trò của ông là Gunston đã đưa ra trong luận án của mình ví dụ bậc đồng điều thứ hai bằng cách lấy giá trị nhỏ nhất của tất cả các bậc đối đồng điều, kí hiệu là bdeg (xem [32, 53]). Gần đây hai tác giả N.T. Cường và P.H. Quý [26] đã đưa ra một ví dụ bậc đối đồng điều khác là *bậc không trộn lẫn* udeg dựa trên các hệ tham số p-chuẩn tắc. Kết quả này dẫn chúng tôi đến vấn đề nghiên cứu sau.

Vấn đề 3. Sử dụng hệ tham số hầu p-chuẩn tắc để xây dựng các bậc đối đồng điều mới.

Luận án được chia làm 4 chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức cơ sở về đối đồng điều địa phương, hệ số Hilbert, đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao, hệ tham số p-chuẩn tắc và dd-dãy.

Chương 2 được dành để nghiên cứu các tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và áp dụng vào nghiên cứu Vấn đề 1. Trước tiên, chúng tôi đưa ra một điều kiện hữu hạn để kiểm tra một hệ tham số khi nào là hầu p-chuẩn tắc. Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Đặt $\underline{x}(\underline{n}) = (x_1^{n_1}, \ldots, x_n^{n_d})$ với $n_1, \ldots, n_d > 0$. Xét hàm số

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) =& \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - n_1 \ldots n_d e(x_1, \ldots, x_d; M)\\ &- \sum_{i=0}^{d-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2},\ldots,x_d)M})\end{aligned}$$

theo $n_1, \ldots, n_d > 0$. Khi đó ta có kết quả quan trọng sau.

Định lý 2.1.5 (ii). *Hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M khi và chỉ khi $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) = 0$ với mọi $1 \leq n_1, \ldots, n_d \leq 2$.*

Xét một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ của môđun M. Cố định $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ và đặt $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_r\}$, $x_\Lambda M = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})M$. Với $0 \leq i < i_1 - 1 \leq d$, đặt

$$U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}} := \begin{cases} (0 : x_{i+1})_{M/x_\Lambda M} & \text{nếu } i \leq d-1, \\ M/x_\Lambda M & \text{nếu i=d.} \end{cases}$$

Kí hiệu dãy $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ bởi $\underline{x}(\underline{n})$. Một kết quả quan trọng của chương này là mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2.2. *Các môđun $U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})}$ chỉ phụ thuộc vào i, Λ và không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và số mũ $n_1, \ldots, n_d > 1$.*

Lớp đẳng cấu của $U^{i,\Lambda}_{M,\underline{x}(\underline{n})}$ được kí hiệu là $U^{i,\Lambda}_M$. Nếu $\Lambda = \{i+2, \ldots, j\}$ với $0 \le i < j \le d$, ta kí hiệu gọn $U^{i,\Lambda}_M$ bởi U^{ij}_M. Các môđun con thương này là những bất biến đầu tiên thu được bằng cách sử dụng các hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Sử dụng các môđun này ta thu được công thức khá đẹp của hàm độ dài.

Định lý 2.2.7. *Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Khi đó ta có*

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; U^{id}_M),$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Hệ quả là ta có biểu diễn

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_{d_j} n_1 \ldots n_{d_j},$$

trong đó $\lambda_{d_0}, \ldots, \lambda_{d_r} \neq 0$ và các bậc không triệt tiêu $d_0, \ldots, d_r$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số.

Đối với các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao, sử dụng các môđun U^{ij}_M ta thu được kết quả như sau.

Định lý 2.3.5. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Với $0 < k \le r \le d$, ta có*

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) = \sum_{t=0}^{r-k} \sum_{j=t}^{r-k} \begin{pmatrix} r-j-2 \\ k-2 \end{pmatrix} e(x_1, \ldots, x_t; U^{t,j+1}_M).$$

Kí hiệu

$$N_{r,r-k,t} = \bigoplus_{i=0}^{r} (U^{t,j+1}_M)^{\oplus \begin{pmatrix} r-j-2 \\ k-2 \end{pmatrix}}$$

thì

$$\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M) = \sum_{t=0}^{r-k} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_t; N_{r,r-k,t}).$$

Trong trường hợp $x_1, \ldots, x_d$ là một d-dãy trên M, tác giả N.V. Trung [47, Định lý 4.1] đã đưa ra mối liên hệ giữa hệ số Hilbert với độ dài một số môđun đối đồng điều địa phương (cũng xem trong bài báo của Goto-Ozeki [31, Mệnh đề 3.4]). Mối liên hệ giữa độ dài của các môđun đối đồng điều địa phương đó với các môđun đồng điều Koszul được các tác giả N.T. Cường-N.Đ. Minh nghiên cứu trong [23, Bổ đề 3.1]. Trong trường hợp hệ tham số hầu p-chuẩn tắc, sử dụng các quan hệ trên, chúng tôi thu được công thức tính các hệ số Hilbert như sau.

Định lý 2.4.1. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và $I = (x_1, \ldots, x_d)$. Với mọi $n > 0$, ta có*

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{t=0}^{d} e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M)\binom{n+i}{i}.$$

Hơn nữa, với mọi $0 \leq i \leq d-1$ thì

$$e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) = \sum_{t=0}^{i} e(x_1, \ldots, x_t; U_M^{t,i+1}/U_M^{ti}).$$

Từ các kết quả trên ta thấy các hàm độ dài, các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và các hệ số Hilbert đều được tính qua số bội của các môđun U_M^{ij}. Do đó ta có thể sử dụng các tính chất của bội để nghiên cứu các đối tượng này. Một kết quả là chúng tôi đưa ra so sánh giữa hệ số của các đa thức ứng với hàm độ dài, đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul và hệ số Hilbert (xem Định lý 2.4.3).

Trong Chương 3 chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 2, cụ thể là về tính đa thức của hàm $h_I^0(n) := \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(R/I^{n+1}))$. Chúng tôi chỉ ra rằng $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức trong hai trường hợp:

(i) I là iđêan chính;

(ii) R là không trộn lẫn và I là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R.

Hơn nữa, trong trường hợp I là iđêan chính hoặc I là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số chuẩn tắc trên vành Cohen-Macaulay suy rộng, các hệ số của đa thức này được tính qua độ dài một số môđun đối đồng điều địa phương và số bội. Cụ thể chúng tôi thu được các kết quả sau.

Định lý 3.1.5. *Cho $I = aR$ là một iđêan chính của vành R. Khi đó, tồn tại đa thức $P_I(n)$ với $\deg(P_I(n)) \leq 1$ sao cho $P_I(n) = h^0_I(n)$, với mọi $n \gg 0$.*

Vì $\deg P_I(n) \leq 1$ nên ta có biểu diễn

$$P_I(n) = n e_0^{sat}(a; R) + e_1^{sat}(a; R),$$

trong đó $I = aR$ và các hệ số $e_0^{sat}(a; R), e_1^{sat}(a; R)$ là các số nguyên.

Định lý 3.1.7. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $I = aR$ là một iđêan chính của vành R. Khi đó, ta có*

$$e_0^{sat}(a; R) = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)_1 \setminus V(I)} \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})) e(a; R/\mathfrak{p}),$$

ở đây $\operatorname{Ass}(R)_1 = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R) : \dim(R/\mathfrak{p}) = 1\}$.

Trường hợp tiếp theo chúng tôi xét là khi I sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Khi đó chúng tôi thu được kết quả sau đây.

Định lý 3.2.5. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và là không trộn lẫn. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R. Đặt I là iđêan sinh bởi $x_{i+1}, \ldots, x_j$ với $0 \leq i < j \leq d$. Khi đó, tồn tại đa thức $P_I(n)$ sao cho $h^0_I(n) = P_I(n)$ với mọi $n \gg 0$. Hơn nữa, $\deg(P_I(n)) + 1$ là chiều của môđun phân bậc $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I_1^n / I^n$ trên đại số Rees $\mathcal{R}(I)$.*

Nếu giả sử thêm R là vành Cohen-Macaulay suy rộng thì các hệ số của đa thức này có thể tính được khá rõ ràng thông qua độ dài các môđun đối đồng điều địa phương (Định lý 3.2.8). Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ một vành địa phương R và một iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số nhưng hàm $h^0_I(n) := \ell(H^0_\mathfrak{m}(R/I^{n+1}))$ không là hàm đa thức, trả lời phủ định cho câu hỏi trong Vấn đề 2 (Ví dụ 3.2.10).

Vấn đề 3 được tìm hiểu trong Chương 4. Trước hết nhận xét rằng môđun M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $U_M^{ij} = 0$ với mọi $i < j$. Do đó các môđun con thương U_M^{ij} đóng vai trò là cản trở cho tính Cohen-Macaulay của M. Mặt khác, nếu Deg là một bậc đối đồng điều thì tính chất Cohen-Macaulay của M cũng được đặc trưng qua tính chất $\operatorname{Deg}(M) = e(M)$, hay sự triệt tiêu của hàm $\operatorname{Deg}(M) - e(M)$.

Trong trường hợp tổng quát thì $\operatorname{Deg}(M) - e(M) \geq 0$. Do đó $\operatorname{Deg}(M) - e(M)$ cũng là một cản trở cho tính chất Cohen-Macaulay của M. Trong Chương 4, chúng tôi liên hệ giữa hai cản trở tính chất Cohen-Macaulay này bằng cách sử dụng các môđun U_M^{ij} để xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều trên R.

Với một R-môđun hữu hạn sinh N và một số nguyên $i \geq \dim(N)$, kí hiệu $e(N)_i = e(N)$ nếu $i = \dim(N)$ và $e(N)_i = 0$ nếu $i \neq \dim(N)$. Kết quả chính của Chương 4 là định lý sau.

Định lý 4.3.4. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương với $\dim(R) = n$. Cho $\Lambda = \{\lambda_{ijk} \in \mathbb{R} : 0 \leq i < j \leq k \leq n\}$ là tập các số thực thỏa mãn $\lambda_{01k} = 1$, với $1 \leq k \leq n$,*

$$\lambda_{0jk} \leq \lambda_{0,j+1,k+1} \text{ và } \lambda_{ijk} \leq \lambda_{i+1,j+1,k+1}, \text{ for } 0 \leq i < j \leq k < n.$$

Định nghĩa hàm $\operatorname{Deg}_\Lambda : Mod_R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ bằng cách cho tương ứng mỗi môđun hữu hạn sinh M có chiều d với số thực

$$\operatorname{Deg}_\Lambda(M) := e(M) + \sum_{0 \leq i < j \leq d} \lambda_{ijd}\, e\left(\overline{U}_M^{ij}\right)_i.$$

Khi đó $\operatorname{Deg}_\Lambda$ là một bậc đối đồng điều.

Trong toàn bộ luận án này, $(R, \mathfrak{m}, k)$ luôn là một vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ và trường thặng dư vô hạn $k = R/\mathfrak{m}$.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cần dùng trong các chương sau. Các kết quả được chọn trình bày sẽ xoay quanh đối đồng điều địa phương, hệ tham số p-chuẩn tắc, d-dãy, dd-dãy, hệ số Hilbert và đặc trưng Euler-Poincaré của phức Koszul.

1.1 Môđun đối đồng điều địa phương và hệ tham số p-chuẩn tắc

Mục tiêu của tiết này là nhắc lại một số kết quả quan trọng về môđun đối đồng điều địa phương như tính triệt tiêu, tính Artin và khái niệm hệ tham số p-chuẩn tắc dùng cho chứng minh các kết quả ở các chương sau. Tài liệu tham khảo hữu hiệu cho tiết này là [1, 6, 20].

Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Kí hiệu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M đối với giá $\mathfrak{m}$. Định lý triệt tiêu là một trong những kết quả quan trọng và có nhiều ứng dụng của lý thuyết đối đồng điều địa phương (xem [6, 6.1.2, 6.1.4]).

Định lý 1.1.1. (Định lý triệt tiêu và không triệt tiêu của Grothendieck).

(i) Nếu $M \neq 0$ *thì* $\dim(M) = \max\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}$.

(ii) Nếu $M \neq 0$ *thì* $\operatorname{depth}(M) = \min\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}$.

Hệ quả là tính chất Cohen-Macaulay của một môđun M tương đương với sự triệt tiêu $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ với mọi $i \neq \dim(M)$.

Khó khăn khi nghiên cứu các môđun đối đồng điều địa phương là nhìn chung các môđun đó không là hữu hạn sinh. Tuy nhiên chúng vẫn có cấu trúc đại số tốt như trong định lý sau.

Định lý 1.1.2. [6, Định lý 7.1.3] *Giả sử M là một R-môđun hữu hạn sinh. Các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là các R-môđun Artin với mọi $i \geq 0$.*

Tiếp theo, ta nhắc lại một số kết quả về đối ngẫu Matlis và đối ngẫu địa phương. Kí hiệu E là bao nội xạ của R-môđun $R/\mathfrak{m}$ và $D(-)$ là hàm tử $\mathrm{Hom}(-, E)$. Với mỗi R-môđun M, môđun $D(M)$ được gọi là *đối ngẫu Matlis* của M. Trong trường hợp vành R là đầy đủ, đối ngẫu Matlis cho ta một tương đương khá đẹp giữa phạm trù các R-môđun Artin và phạm trù các R-môđun hữu hạn sinh.

Định lý 1.1.3. [6, Định lý 10.2.12] *Giả sử R là một vành đầy đủ. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(i) Nếu M là R-môđun hữu hạn sinh thì $D(M)$ là R-môđun Artin.

(ii) Nếu A là R-môđun Artin thì $D(A)$ là R-môđun hữu hạn sinh.

Hơn nữa, $D(D(M)) \simeq M$ và $D(D(A)) \simeq A$.

Nếu R không đầy đủ thì $\widehat{M} \simeq D(D(M))$ và $D(M)$ là R-môđun Artin, tuy nhiên $D(A)$ không nhất thiết là R-môđun hữu hạn sinh khi A là Artin.

Giả sử rằng $(R, \mathfrak{m})$ là vành thương của một vành Gorenstein địa phương $(S, \mathfrak{n})$ chiều r. Kí hiệu $K^i(M)$ là R-môđun $\mathrm{Ext}^{r-i}_S(M, S)$. Khi đó, $K^i(M)$ là R-môđun hữu hạn sinh và được P. Schenzel [44] gọi là *môđun khuyết thiếu thứ i* của M. Kết quả quan trọng sau cho mối liên hệ giữa các môđun khuyết thiếu $K^i(M)$ và môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$.

Định lý 1.1.4. (Định lý đối ngẫu địa phương) *Ta có đẳng cấu các R-môđun*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \simeq D(K^i(M)).$$

Đặt $\mathfrak{a}_i(M) := \operatorname{Ann}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$ và $\mathfrak{a}(M) := \mathfrak{a}_0(M)\ldots\mathfrak{a}_{d-1}(M)$. Ta có định nghĩa quan trọng sau đây.

Định nghĩa 1.1.5. Một hệ tham số $x_1,\ldots,x_d$ của một môđun M được gọi là *hệ tham số p-chuẩn tắc* nếu $x_d \in \mathfrak{a}(M), x_{d-1} \in \mathfrak{a}(M/x_dM),\ldots,$ $x_1 \in \mathfrak{a}(M/(x_2,\ldots,x_d)M)$.

Khái niệm hệ tham số p-chuẩn tắc được tác giả N.T. Cường đưa ra trong [16, 1] để nghiên cứu bài toán Macaulay hoá. Ngày nay khái niệm này có nhiều ứng dụng khác nhau trong việc nghiên cứu các vành và môđun không là Cohen-Macaulay. Một trong những tính chất quan trọng của hệ tham số p-chuẩn tắc thể hiện trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.6. [1, Định lý 7.3, 7.4] *Cho $x_1,\ldots,x_d$ là một hệ tham số p-chuẩn tắc của M. Kí hiệu $\underline{x}(\underline{n}) = x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d}$ với $n_1,\ldots,n_d > 0$. Khi đó*

$$\ell(M/(\underline{x}(\underline{n}))M) = \sum_{i=0}^{d} n_1\ldots n_i e(x_1,\ldots,x_i;(0:x_{i+1})_{M/(x_{i+2},\ldots,x_d)M)}),$$

với mọi $n_1,\ldots,n_d > 0$. Ngược lại, nếu đẳng thức là đúng thì $x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d}$ là hệ tham số p-chuẩn tắc của M, với mọi $n_i \geq i$.

Từ một kết quả của Schenzel [43], nếu R có phức đối ngẫu thì mọi môđun hữu hạn sinh đều có một hệ tham số p-chuẩn tắc. Đặc trưng tổng quát cho sự tồn tại của các hệ tham số như vậy được các tác giả N.T. Cường-Đ.T. Cường đưa ra gần đây như sau.

Định lý 1.1.7. [20, Định lý 1.2, 1.3] *Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh và thoả mãn $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Spec}(R)$. Các khẳng định sau là tương đương:*

(i) M có một hệ tham số p-chuẩn tắc;

(ii) R có một hệ tham số p-chuẩn tắc;

(iii) Mọi R-môđun hữu hạn sinh đều có một hệ tham số p-chuẩn tắc;

(iv) R là vành thương của một vành Cohen-Macaulay;

(v) R là catenary phổ dụng và mọi thớ hình thức của R là Cohen-Macaulay.

1.2 d-dãy và dd-dãy

Khái niệm d-dãy được Huneke [34] đưa ra và có nhiều ứng dụng trong các tình huống khác nhau, trong đó có lý thuyết vành và môđun Buchsbaum, Cohen-Macaulay suy rộng...

Định nghĩa 1.2.1. (i) Một dãy các phần tử $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ được gọi là *d-dãy* trên M nếu với mọi $1 \le i \le j \le r$, ta có

$$(x_1, \ldots, x_{i-1})M :_M x_j = (x_1, \ldots, x_{i-1})M :_M x_i x_j.$$

(ii) Một dãy các phần tử $x_1, \ldots, x_r$ được gọi là *d-dãy mạnh* trên M nếu $x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}$ là d-dãy trên M, với mọi $n_1, \ldots, n_r > 0$.

Sử dụng khái niệm d-dãy, hai tác giả N.T. Cường và Đ.T. Cường [17] đưa ra khái niệm dd-dãy để mở rộng khái niệm hệ tham số p-chuẩn tắc cho dãy phần tử.

Định nghĩa 1.2.2. Một dãy các phần tử $x_1, \ldots, x_r$ trong $\mathfrak{m}$ được gọi là một *dd-dãy* trên M nếu $x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}$ là d-dãy trên $M/(x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_r^{n_r})M$ với mọi $1 \le i \le r$ và mọi $n_1, \ldots, n_r > 0$.

Các dd-dãy có nhiều tính chất tốt, đặc biệt trong tính toán các bất biến của môđun. Chúng tôi liệt kê một số tính chất trong [19, Mệnh đề 3.4] và [18, Bổ đề 3.6] được dùng trong các chương sau.

Mệnh đề 1.2.3. *Các phát biểu sau là đúng.*

(i) Mọi dãy con của một dd-dãy cũng là dd-dãy (giữ nguyên thứ tự).

(ii) Nếu $x_1, \ldots, x_r$ là một dd-dãy trên M thì với mọi $1 \leq t < r$, ta có

$$0 :_M x_t \cap (x_{t+1}, \ldots, x_r)M = 0.$$

(iii) Nếu $x_1, \ldots, x_r$ là một dd-dãy trên M thì $x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_r$ là một dd-dãy trên M/x_iM, với mọi $i = 1, \ldots, r$.

(iv) Với $r \geq 3$, dãy $x_1, \ldots, x_r$ là một dd-dãy trên M nếu và chỉ nếu $x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_r$ là một dd-dãy trên $M/x_i^{n_i}M$ với mọi $i = 1, \ldots, r$ và mọi $n_i > 0$.

Các ứng dụng của dd-dãy chủ yếu do liên quan đến các hệ tham số p-chuẩn tắc nhờ Mệnh đề 1.1.6 và kết quả sau.

Định lý 1.2.4. [19, Định lý 1.2, Hệ quả 3.6)] *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $x_1, \ldots, x_d$ là một dd-dãy trên M;

(ii) Tồn tại các số nguyên $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sao cho

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} n_1 \ldots n_i a_i,$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$.

Trong trường hợp này, ta luôn có

$$a_i = e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M}).$$

Bổ đề tiếp theo là một tính chất quan trọng của hệ tham số đồng thời là dd-dãy.

Bổ đề 1.2.5. [18, Bổ đề 3.5, 3.6] *Cho $N \subseteq M$ là R-môđun hữu hạn sinh và $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số đồng thời là dd-dãy trên M. Đặt $d' =$* $\dim(N)$ *và giả sử $d' < d$. Khi đó $N \subseteq 0 :_M x_d$ và $N \cap (x_{d'+1}, \ldots, x_d)M =$* 0. *Nói riêng, $0 :_M x_d$ là môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d.*

Từ Định lý 1.2.4 và Mệnh đề 1.1.6 ta suy ra mọi hệ tham số p-chuẩn là một dd-dãy, do đó khái niệm dd-dãy là một mở rộng của hệ tham số p-chuẩn tắc.

1.3 Đa thức Hilbert

Đa thức Hilbert là một khái niệm cổ điển trong đại số giao hoán, từ đa thức Hilbert người ta định nghĩa được một số bất biến quan trọng khác. Trong tiết này chúng tôi nhắc lại một số kết quả về đa thức Hilbert của các môđun hữu hạn sinh và một khái niệm mở rộng là đa thức Rees của một cặp iđêan.

Đối với một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ I, xét hàm số $H_I(n) = \ell(M/I^{n+1}M)$ là một hàm theo n và nhận giá trị nguyên dương. Khi đó, Samuel đã chỉ ra rằng tồn tại một đa thức $P_I(n)$ bậc $d = \dim(M)$ với hệ số hữu tỉ sao cho $H_I(n) = P_I(n)$ với n đủ lớn (kí hiệu $n \gg 0$). Đa thức $P_I(n)$ được gọi là *đa thức Hilbert-Samuel* và hàm số $H_I(n) = \ell(M/I^{n+1}M)$ được gọi là *hàm Hilbert-Samuel* của M đối với iđêan I. Do $P_I(n)$ là đa thức nhận giá trị nguyên nên tồn tại những số nguyên $e_i(I, M)$ sao cho

$$P_I(n) = \sum_{i=0}^{d} e_i(I, M) \binom{n+d-i}{d-i}.$$

Định nghĩa 1.3.1. (i) Với mỗi i, số nguyên $e_i(I; M)$ được gọi là *hệ số Hilbert thứ i* của M đối với iđêan I.
(ii) Số nguyên $e_0(I; M)$ được gọi là *bội* của M đối với iđêan I, cũng kí hiệu đơn giản là $e(I, M)$. Nếu $I = \mathfrak{m}$ thì ta kí hiệu $e(M) := e(\mathfrak{m}, M)$.

Các hệ số Hilbert phản ánh sự phức tạp về cấu trúc của môđun M. Do đó, người ta thường mong muốn có thể tính toán hoặc tìm các chặn trên, dưới sát cho các hệ số này. Trong trường hợp tổng quát điều này nói chung là rất khó. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt điều này vẫn khả thi. Kết quả sau của tác giả N.V. Trung đóng vai trò quan trọng trong Chương 2.

Định lý 1.3.2. [47, Định lý 4.1] *Cho một hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M và $I = (x_1, \dots, x_d)$. Giả sử $x_1, \dots, x_d$ là một d-dãy trên M. Khi đó*

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i}(I, M) \binom{n+i}{i}$$

với mọi $n \geq 0$. Hơn nữa $e_d(I, M) = \ell((0 : x_1)/(0 : x_1) \cap IM)$ và

$$\begin{aligned} e_{d-i}(I, M) = \ell((x_1, \dots, x_i)M : x_{i+1}/((x_1, \dots, x_i)M : x_{i+1}) \cap IM) \\ - \ell((x_1, \dots, x_{i-1})M : x_i/((x_1, \dots, x_{i-1})M : x_i) \cap IM), \end{aligned}$$

với $1 \leq i \leq d - 1$.

Một mở rộng của các đa thức Hilbert là khái niệm đa thức Rees của một cặp iđêan. Trước tiên là một kết quả quan trọng của J.O. Amao.

Định lý 1.3.3. [4, Định lý 3.2] *Cho $I \subseteq J$ là các iđêan hữu hạn sinh của một vành giao hoán R và M là một R-môđun Noether. Giả sử $\ell(JM/IM) < \infty$. Khi đó, $\ell(J^nM/I^nM) < \infty$ với mọi số nguyên $n > 0$. Hơn nữa, tồn tại đa thức $P_{J,I}(n)$ sao cho $\ell(J^nM/I^nM) = P_{J,I}(n)$ là một đa thức theo n với $n \gg 0$.*

Trong trường hợp $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương Noether, hàm $\ell(J^n/I^n)$ và đa thức $P_{J,I}(n)$ trong Định lý 1.3.3 được các tác giả Herzog-Puthenpurakal-Verma [33] gọi lần lượt là *hàm Rees* và *đa thức Rees* của cặp iđêan (I, J).

Nhắc lại rằng iđêan I được gọi là một *rút gọn* của iđêan J nếu tồn tại một số nguyên dương n sao cho $J^{n+1} = IJ^n$. Kết quả sau của Herzog-Puthenpurakal-Verma cho ta thông tin về bậc của đa thức Rees đối với cặp iđêan (I, J), được dùng trong Chương 3.

Bổ đề 1.3.4. [33, Hệ quả 4.7] *Cho I là một rút gọn của iđêan J sao cho $\ell(J/I) < \infty$. Khi đó,* $\deg(P_{J,I}(n)) + 1$ *là chiều của môđun phân bậc* $\bigoplus_{n=1}^{\infty} J^n/I^n$ *trên đại số Rees* $\mathcal{R}(I)$.

1.4 Đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao

Trong tiết cuối của chương này, chúng tôi trình bày lại một số kết quả đã biết về các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Với $1 \leq r \leq d$, xét phức Koszul của M tương ứng với dãy $x_1, \ldots, x_r$ kí hiệu là $K(x_1, \ldots, x_r; M)$. Kí hiệu $H_k(x_1, \ldots, x_r; M)$ là môđun đồng điều Koszul thứ k. Trong tiết này ta quan tâm đến các môđun $H_k(x_1, \ldots, x_r; M)$ trong hai trường hợp sau:

(i) $0 \leq k \leq r = d$;

(ii) $0 < k \leq r \leq d$, $x_1, \ldots, x_d$ là một dd-dãy.

Trong trường hợp thứ nhất, $H_k(x_1, \ldots, x_d; M)$ luôn có độ dài hữu hạn với mọi k. Trong trường hợp thứ hai, với mọi $k > 0$, môđun $H_k(x_1, \ldots, x_r; M)$ có độ dài hữu hạn theo [23, Bổ đề 3.1]. Khi đó đặc trưng Euler-Poincaré bậc k của phức $K(x_1, \ldots, x_r; M)$ được định nghĩa là

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) = \sum_{i=k}^{r} (-1)^{i-k} \ell(H_i(x_1, \ldots, x_r; M)).$$

Ta có $\chi_0(x_1, \ldots, x_d; M) = e(x_1, \ldots, x_d; M)$ là bội của M đối với hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ và

$$\chi_1(x_1, \ldots, x_d; M) = \ell(M/(x_1, \ldots, x_d)M) - e(x_1, \ldots, x_d; M).$$

Kết quả sau của hai tác giả N.T. Cường và V.T. Khôi (xem [22, Mệnh đề 2.2]) liên hệ các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao $\chi_k(\underline{x}; M)$ với số bội của các môđun đồng điều Koszul đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu về tính đa thức của hàm $\chi_k(\underline{x}(\underline{n}); M)$ sau này.

Mệnh đề 1.4.1. [22, Mệnh đề 2.2] *Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Khi đó*

$$\chi_k(\underline{x}; M) = \sum_{i=0}^{d-k} e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{H_{k-1}(x_{i+2}, \ldots, x_d;\ M)}).$$

Mệnh đề 1.4.1 là một mở rộng của công thức Auslander-Buchsbaum (xem [5, Hệ quả 4.2]) cho bởi

$$I_{M,\ \underline{x}} = \chi_1(\underline{x}; M) = \sum_{i=0}^{d-1} e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M}). \quad (1.1)$$

Xét $\chi_k(\underline{x}(\underline{n}); M)$ là hàm theo $n_1, \ldots, n_d > 0$. Trong trường hợp tổng quát, $\chi_k(\underline{x}(\underline{n}); M)$ không là đa thức với $n_1, \ldots, n_d \gg 0$. Tuy nhiên, khi $x_1, \ldots, x_d$ là dd-dãy thì theo Định lý 1.2.4,

$$\chi_1(\underline{x}(\underline{n}); M) = \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - n_1 \ldots n_d e(x_1, \ldots, x_d; M)$$

là đa thức theo $n_1, \ldots, n_{d-1}$.

Tương tự, với $k > 1$, hai tác giả N.T. Cường và Đ.T. Cường cũng chỉ ra tính chất đa thức của $\chi_k(\underline{x}(\underline{n}); M)$ và đưa ra dạng của các đa thức này như sau.

Định lý 1.4.2. [17, Định lý 1.3] *Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một dd-dãy trên M. Khi đó*

$$\chi_k(\underline{x}(\underline{n}); M) = \sum_{i=0}^{d-k} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{H_{k-1}(x_{i+2}, \ldots, x_d; M)})$$

là một đa thức với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$.

Chương 2

Hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của hệ tham số là dd-dãy mà trong luận án này chúng tôi gọi là hệ tham số *hầu p-chuẩn tắc*. Từ một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của môđun M như vậy, chúng tôi định nghĩa một họ các môđun con thương $U_M^{i,\Lambda}$, trong đó $i = 0, 1, \ldots, d-1$ và $\Lambda \subseteq \{i+1, \ldots, d\}$.

Sử dụng số bội của các môđun $U_M^{i,\Lambda}$, chúng tôi đưa ra các công thức tính cho các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và các hệ số Hilbert đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Chúng tôi cũng đưa ra một so sánh giữa hệ số của các đa thức ứng với hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$, các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul và các hệ số Hilbert đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Các kết quả trong chương này được viết dựa theo tài liệu [10].

2.1 Hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Mục tiêu của tiết này là nghiên cứu một số tính chất của hệ tham số là dd-dãy mà ở đây chúng tôi gọi là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Kết quả chính của tiết này là một điều kiện hữu hạn để kiểm tra khi nào một hệ tham số là hầu p-chuẩn tắc.

Định nghĩa 2.1.1. Một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ của một môđun M được gọi là một *hệ tham số hầu p-chuẩn tắc* nếu tồn tại các số nguyên

$\lambda_0, \ldots, \lambda_d$ sao cho

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i,$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$.

Theo Định lý 1.2.4, một hệ tham số là hầu p-chuẩn tắc khi và chỉ khi là dd-dãy và do đó một hệ tham số p-chuẩn tắc luôn là hầu p-chuẩn tắc. Điều ngược lại nói chung không đúng. Ví dụ, xét R là một vành Buchsbaum có chiều lớn hơn 1 sao cho $H^i_{\mathfrak{m}}(R) \neq 0$, $H^j_{\mathfrak{m}}(R) \neq 0$ với $0 \leq i < j < \dim(R)$ nào đó. Do $\mathfrak{a}(R) \subseteq \mathfrak{m}^2$ nên có những hệ tham số của R không là p-chuẩn tắc, trong khi do tính chất Buchsbaum nên mọi hệ tham số của R đều là chuẩn tắc, nói riêng là hầu p-chuẩn tắc. Một ví dụ khác được đưa ra trong [17, Ví dụ 3.11], trong đó tác giả xét vành các chuỗi lũy thừa hình thức $R = k[[X_1, \ldots, X_{d+1}]], (d > 1)$. Đặt $I = (X_{d+1}^{d+1}, X_1 X_{d+1}^{d}, X_2 X_{d+1}^{d-1}, \ldots, X_d X_{d+1})$. Môđun $M = R/I$ có chiều $\dim(M) = d$ và một hệ tham số $X_1, \ldots, X_d$ thỏa mãn

$$\ell(M/(X_1^{n_1}, \ldots, X_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} n_1 \ldots n_i,$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$, trong đó $n_1 \ldots n_i = 1$ nếu $i = 0$. Do đó $X_1, \ldots, X_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Mặt khác, vì

$$H^0_{\mathfrak{m}}(M) \simeq (X_{d+1}^{d}, X_2 X_{d+1}^{d-1}, \ldots, X_d X_{d+1})/I,$$

nên $\mathfrak{a}_0(M) = \operatorname{Ann}(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = \mathfrak{m}$. Hơn nữa, vì $\dim(R/\mathfrak{a}(M)) = d - 1$ nên tồn tại $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ sao cho $\mathfrak{a}_i(M) \subseteq \mathfrak{m}$. Do đó $\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{a}_0(M)\mathfrak{a}_i(M) \subseteq \mathfrak{m}^2$. Vì $X_d \notin \mathfrak{a}(M)$ nên $X_1, \ldots, X_d$ không là hệ tham số p-chuẩn tắc của M.

Từ tính chất của dd-dãy (xem Mệnh đề 1.1.6, Mệnh đề 1.2.3, Định lý 1.2.4) ta có một số tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

Mệnh đề 2.1.2. *Các phát biểu sau là đúng.*

(i) Giả sử $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M với

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i.$$

Khi đó, $\lambda_i = e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M)})$, với $i = 0, \ldots, d-1$ và $\lambda_d = e(x_1, \ldots, x_d; M)$.

(ii) Mọi hệ tham số p-chuẩn tắc đều là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

(iii) Nếu $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M thì $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ là hệ tham số p-chuẩn tắc của M, với mọi $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, \ldots, n_d \geq d$.

(iv) Nếu $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M thì $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d$ cũng là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $M/x_i^{n_i}M$, với $0 \leq i \leq d$ và với mọi số nguyên dương n_i.

Vì hệ tham số p-chuẩn tắc là hầu p-chuẩn tắc nên từ Định lý 1.1.7 về sự tồn tại của hệ tham số p-chuẩn tắc ta có kết quả sau.

Định lý 2.1.3. *Cho M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) M có một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc;

(ii) $R/\mathrm{Ann}(M)$ có hệ tham số hầu p-chuẩn tắc;

(iii) $R/\mathrm{Ann}(M)$ là vành thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương.

Tiếp theo chúng tôi đưa ra một điều kiện hữu hạn để kiểm tra một hệ tham số khi nào là hầu p-chuẩn tắc. Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Đặt $\underline{x}(\underline{n}) = (x_1^{n_1}, \ldots, x_n^{n_d})$ với $n_1, \ldots, n_d > 0$. Xét hàm số

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) =& \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - n_1 \ldots n_d e(x_1, \ldots, x_d; M) \\ &- \sum_{i=0}^{d-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M})\end{aligned}$$

theo $n_1, \ldots, n_d$. Rõ ràng hàm số trên phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số. Theo Mệnh đề 2.1.2 (i) thì $\underline{x}$ là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc khi và chỉ khi $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) = 0$ với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Ngoài ra, theo công thức (1.1) (trang 19) của Auslander-Buchsbaum thì $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(1, 1, \ldots, 1) = 0$. Tiếp theo ta có tính chất quan trọng của hàm số $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n})$.

Mệnh đề 2.1.4. *Cho $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là một hệ tham số của M. Khi đó, hàm số $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n})$ là hàm không âm và không giảm theo $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$.*

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh tính không âm bằng quy nạp theo chiều của M. Nếu $d = 0$ thì $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = 0$ với mọi $\underline{n}$. Giả sử rằng $d > 0$. Áp dụng công thức (1.1) cho dãy $x_d^{n_d}, x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}}$ ta có

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) =& \sum_{i=0}^{d-1} n_d n_1 ... n_i e(x_d, x_1, ..., x_i; (0 : x_{i+1}^{n_{i+1}})_{M/(x_{i+2}^{n_{i+2}}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}})M}) \\ &+ \ell((0 : x_d^{n_d})_{M/(x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}})M}) \\ &- \sum_{i=0}^{d-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, ..., x_{d-1})M}) \\ =& n_d a(n_1, \ldots, n_{d-1}) + \ell((0 : x_d^{n_d})_{M/(x_1^{n_1}, ..., x_{d-1}^{n_{d-1}})M}) \\ &+ b(n_1, \ldots, n_{d-1}).\end{aligned}$$

Ở đây, a, b là hai hàm không phụ thuộc vào cách chọn n_d, hơn nữa $a \geq 0$. Do đó cố định $n_1, ..., n_{d-1}$ thì $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n})$ là một hàm không giảm theo n_d. Khi đó, $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) \geq \tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(n_1, ..., n_{d-1}, 1)$. Ngoài ra,

$$\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(n_1, \ldots, n_{d-1}, 1) = \tilde{I}_{M/x_dM,\, x_1, ..., x_{d-1}}(n_1, \ldots, n_{d-1}).$$

Theo giả thiết quy nạp các hàm theo $n_1, \ldots, n_{d-1}$ là không âm. Do đó $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) \geq \tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(1, 1, \ldots, 1) = 0$.

Tiếp theo ta chứng minh tính không giảm của hàm số $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n})$ bằng cách chứng minh hàm $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n})$ là không giảm theo mỗi n_j khi cố định các biến còn lại với $j = 1, 2, \ldots d$. Thật vậy, sử dụng công thức (1.1) (trang 19) cho hệ tham số $x_j^{n_j}, x_1^{n_1}, \ldots, x_{j-1}^{n_{j-1}}, x_{j+1}^{n_{j+1}}, \ldots, x_d^{n_d}$ ta có

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) =& n_j \sum_{i=0}^{d-1} n_1 \ldots \widehat{n_j} \ldots n_i e(x_j, x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1}^{n_{i+1}})_{M/(x_{i+2}^{n_{i+2}}, \ldots, x_d^{n_d})M})\\
&+ \ell((0 : x_j^{n_j})_{M/(x_1^{n_1}, \ldots \widehat{x_j^{n_j}} \ldots, x_d^{n_d})M})\\
&- n_j \sum_{i=j}^{d-1} n_1 \ldots \widehat{n_j} \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M})\\
&- \sum_{i=0}^{j-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}, \ldots, x_d)M})\\
&= n_j g(n_1, , \ldots \widehat{n_j}, \ldots, n_d) + \ell_R((0 : x_j^{n_j})_{M/(x_1^{n_1}, \ldots \widehat{x_j^{n_j}} \ldots, x_d^{n_d})M})\\
&+ h(n_1, , \ldots \widehat{n_j}, \ldots, n_d).
\end{aligned}
$$

Ở đây g, h là các hàm không phụ thuộc vào cách chọn n_j. Vì $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) \geq 0$ nên với n_j đủ lớn thì $g \geq 0$. Cố định n_i với mọi $i \neq j$, thì

$$\ell((0 : x_j^{n_j})_{M/(x_1^{n_1}, \ldots \widehat{x_j^{n_j}} \ldots, x_d^{n_d})M})$$

là hàm không giảm và bị chặn do tính chất Noether. Do đó $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n})$ là hàm không giảm theo n_j với mọi $j = 1, \ldots, d$. □

Áp dụng Mệnh đề 2.1.4 chúng tôi đưa ra một điều kiện hữu hạn để kiểm tra khi nào một hệ tham số là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

Định lý 2.1.5. *Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(i) Cố định $n_1, \ldots, n_d > 0$ và giả sử

$$\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(n_1 + 1, \ldots, n_d + 1).$$

Khi đó, ta có $\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{m})$, với mọi bộ số nguyên dương $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_d)$ thỏa mãn $m_1 \geq n_1, \ldots, m_d \geq n_d$. Trong trường hợp này $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M.

(ii) Hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M khi và chỉ khi $\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{n}) = 0$ với mọi $1 \leq n_1, \ldots, n_d \leq 2$.

Chứng minh. (i) Trước tiên ta chứng minh với $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ nếu

$$\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_d) = \tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j + 1, n_{j+1}, \ldots, n_d)$$

thì

$$\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(n_1, ..., n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, ..., n_d) = \tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(n_1, ..., n_{j-1}, n'_j, n_{j+1}, ..., n_d),$$

với mọi $n'_j \geq n_j$.

Thật vậy, đặt $\underline{m} = (n_1, \ldots, n_{j-1}, n'_j, n_{j+1}, \ldots, n_d)$. Theo Mệnh đề 2.1.4 ta có

$$\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{m}) = n_j g + \ell((0 : x_j^{n'_j})_{M/(x_1^{n_1}, \ldots, \widehat{x_j^{n_j}}, \ldots, x_d^{n_d})M)} + h,$$

trong đó g, h là các hàm theo $n_1 \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_d$ và $g \geq 0$. Theo giả thiết hàm là không tăng theo n_j nên $g = 0$ và

$$(0 : x_j^{n_j})_{M/(x_1^{n_1}, \ldots, \widehat{x_j^{n_j}}, \ldots, x_d^{n_d})M} = (0 : x_j^{n'_j})_{M/(x_1^{n_1}, \ldots, \widehat{x_j^{n_j}}, \ldots, x_d^{n_d})M}.$$

Do đó $\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{m})$ với mọi $n'_j \geq n_j$.

Tiếp theo ta chứng minh với mọi $m_1, \ldots, m_d$ thỏa mãn

$$\begin{cases} n_i \leq m_i \leq n_i + 1 & \text{nếu } i < j, \\ n_i \leq m_i & \text{nếu } i \geq j \end{cases}$$

thì $\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{m})$ bằng quy nạp lùi theo $j = d, d-1, \ldots, 1$. Thật vậy, nếu $j = d$ thì theo giả thiết ta có

$$\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{m}), \quad \text{với mọi } n_i \leq m_i \leq n_i + 1, i = 1, \ldots, d.$$

Cố định $m_1, \ldots, m_{d-1}$, theo chứng minh trên

$$\tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\underline{x}}(m_1, \ldots, m_{d-1}, n_d + 1) = \tilde{I}_{M,\, \underline{x}}(\underline{m}),$$

với mọi $m_d \geq n_d$. Do đó khẳng định (i) là đúng với trường hợp $j = d$.

Giả sử $j < d$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{m}),$$

với mọi

$$\begin{cases} n_i \leq m_i \leq n_i + 1 & \text{nếu } i < j \text{ hoặc } i = j, \\ n_i \leq m_i & \text{nếu } i \geq j + 1. \end{cases}$$

Theo chứng minh trên suy ra

$$\tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\,\underline{x}}(\underline{m}),$$

với mọi

$$\begin{cases} n_i \leq m_i \leq n_i + 1 & \text{nếu } i < j, \\ n_i \leq m_i & \text{nếu } i \geq j. \end{cases}$$

Theo quy nạp lùi, với $j = 1$ ta suy ra $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{m})$, với $n_i \leq m_i$, $i = 1, \ldots, d$.

Khi đó $\ell(M/\underline{x}(\underline{n}))$ là một đa thức với mọi $m_i \geq n_i, i = 1, \ldots, d$. Do đó $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M.

(ii) Nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M thì theo Mệnh đề 2.1.2 (i), ta có $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = 0$, với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Điều ngược lại là trường hợp riêng của (i). □

Định lý 2.1.5 có vai trò rất quan trọng trong việc kiểm tra một hệ tham số có là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc hay không. Sử dụng định lý ta có ví dụ sau.

Ví dụ 2.1.6. Cho $R = k[[X, Y, Z]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k và $I = (Z^3, XZ^2, YZ), J = (X, Y, Z)^5$ là hai iđêan của vành R. Đặt $M = R/(I \cap J)$ thì $\dim(M) = 2$ và X, Y là một hệ tham số của M. Bằng tính toán ta có

$$\tilde{I}_{M;X,Y}(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = n = 1, \\ 2 & \text{nếu } m = 2, n = 1, \\ 3 & \text{nếu } m = 1, n = 2, \\ 3 & \text{nếu } m \geq 3, n = 1, \\ 5 & \text{nếu } m = 1, n = 3, \\ 7 & \text{nếu } m = n = 2, \\ 6 & \text{nếu } m = 1, n \geq 4, \\ 9 & \text{nếu } m \geq 3, n = 2, \\ 10 & \text{nếu } m = 2, n = 3, \\ 12 & \text{nếu } m \geq 3, n = 3, \\ 11 & \text{nếu } m = 2, n \geq 4, \\ 13 & \text{nếu } m \in \{3,\ 4\}, n \in \{4,\ 5\}. \end{cases}$$

Theo Định lý 2.1.5, suy ra $\tilde{I}_{M;X,Y}(m,n) = 13$, với mọi $m \geq 3$, $n \geq 4$. Do đó X^m, Y^n là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M nếu và chỉ nếu $m \geq 3, n \geq 4$.

Chú ý 2.1.7. Các nghiên cứu hàm $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ trong luận án này tiếp nối việc nghiên cứu hàm độ dài $\ell(M/\underline{x}(\underline{n})M)$ của một số tác giả trước đây. Việc xét hiệu giữa hàm độ dài và bội được bắt đầu bởi các tác giả St$\ddot{u}$ckrad-Vogel (xem trong [46]). Sau này tác giả N.T. Cường (xem trong [14, 15, 16]) đã xét hàm $I_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \ell(M/(\underline{x}(\underline{n}))M) - e(\underline{x}(\underline{n}); M)$ theo $n_1, \ldots, n_d > 0$ và đưa ra nhiều tính chất quan trọng của hàm đó. Hơn nữa tác giả N.T. Cường và nhóm nghiên cứu (xem trong [18, 19, 21]) định nghĩa một hàm tương tự là $I_{\mathfrak{F},M,\underline{x}}(\underline{n})$ liên kết với một lọc các môđun con thỏa mãn điều kiện chiều $\mathfrak{F}$. Hàm này có nhiều tính chất tương tự như hàm $I_{M,\underline{x}}(\underline{n})$. Trong khi sự triệt tiêu của $I_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ đặc trưng tính Cohen-Macaulay của M và tính chất dãy chính quy của $\underline{x}$ thì sự triệt tiêu của $I_{\mathfrak{F},M,\underline{x}}(\underline{n})$ đặc trưng tính chất Cohen-Macaulay dãy. Như ta thấy, sự triệt tiêu của $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ đặc trưng tính chất hầu p-chuẩn tắc của $\underline{x}$, mở rộng hai tính chất trên. Việc tiếp tục nghiên cứu hàm $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ hứa hẹn nhiều ứng dụng thú vị để tìm hiểu cấu trúc của môđun.

Mệnh đề tiếp theo cho ta cách xây dựng hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của tổng trực tiếp của một họ các môđun.

Mệnh đề 2.1.8. *Cho $M_1, \dots, M_r$ là các R-môđun hữu hạn sinh có chiều lần lượt là $d_1, \dots, d_r$. Đặt $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots\dots \oplus M_r$ và $d :=$ $\dim(M)$. Khi đó $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M khi và chỉ khi $x_1, \dots, x_{d_i}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M_i và $x_{d_i+1}, \dots, x_d \in \mathrm{Ann}(M_i)$, với mọi $i = 1, \dots, r$.*

Chứng minh. Ta có

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{r} \ell(M_i/(x_1^{n_1}, \dots, x_{d_i}^{n_{d_i}})M_i).$$

Vì $x_1, \dots, x_{d_i}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M_i, với mọi i nên

$$\begin{aligned}\ell(M/(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) &= \sum_{i=0}^{r} \ell(M_i/(x_1^{n_1}, \dots, x_{d_i}^{n_{d_i}})M_i) \\ &= \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{d_i} \lambda_j n_1 \dots n_j.\end{aligned}$$

Do đó theo Định nghĩa 2.1.1, $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M.

Ngược lại, nếu $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M thì theo Bổ đề 1.2.5, ta có $x_{d_i+1}, \dots, x_d \in \mathrm{Ann}(M_i)$, với $i = 1, \dots, r$. Từ tính chất cộng tính của bội và độ dài của tổng trực tiếp, ta suy ra tính chất cộng tính của hàm $\tilde{I}$, cụ thể là

$$\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{r} \tilde{I}_{M_i;x_1,\dots,x_{d_i}}(n_1, \dots, n_{d_i}),$$

với mọi $n_1, \dots, n_d > 0$. Vì các hàm $\tilde{I}_{M_i;x_1,\dots,x_{d_i}}(n_1, \dots, n_{d_i})$ là không âm theo Mệnh đề 2.1.4. Do đó $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = 0$ khi và chỉ khi

$$\tilde{I}_{M_i;x_1,\dots,x_{d_i}}(n_1, \dots, n_{d_i}) = 0,$$

với mọi $n_1, \dots, n_d > 0$. Vì vậy $x_1, \dots, x_{d_i}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M_i với mọi $i = 1, \dots, r$. □

2.2 Bậc không triệt tiêu của hàm độ dài

Mục tiêu của tiết này là chỉ ra các bậc tương ứng với hệ số khác không của hàm đa thức $\ell(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})M)$ khi $\underline{x} = x_1,\ldots,x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc, không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số. Để chứng minh khẳng định đó, chúng tôi sẽ xây dựng một số môđun con thương đặc biệt của M bằng cách sử dụng các hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

Trong suốt tiết này luôn giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay và M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Khi đó, theo Định lý 2.1.3 mọi R-môđun hữu hạn sinh đều có một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Trước khi phát biểu các kết quả chính ta cần một số bổ đề quan trọng sau.

Bổ đề 2.2.1. *Giả sử M có chiều $d \geq 2$. Cho $x_1,\ldots,x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Cho $y \in \mathfrak{m}$ là một phần tử tham số của $M/x_{d-1}M$. Khi đó ta có đẳng cấu*

$$(0 : x_{d-1})_{M/x_d^2M} \simeq (0 : x_{d-1})_{M/yx_d^2M}.$$

Chứng minh. Vì $x_1,\ldots,x_d$ là d-dãy trên M nên ta có

$$x_d^2M :_M x_{d-1} = x_d(x_dM :_M x_{d-1}) \oplus (0 :_M x_{d-1}),$$

và

$$x_d^2yM :_M x_{d-1} = x_d(x_dyM :_M x_{d-1}) \oplus (0 :_M x_{d-1}).$$

Từ hai đẳng thức trên ta có các đẳng cấu

$$(0 :_M x_{d-1})_{M/x_d^2M} \simeq x_d(x_dM :_M x_{d-1})/x_d^2M \oplus (0 :_M x_{d-1}),$$

$$(0 :_M x_{d-1})_{M/x_d^2yM} \simeq x_d(x_dyM :_M x_{d-1})/x_d^2yM \oplus (0 :_M x_{d-1}).$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh đồng cấu

$$\varphi : x_d(x_dM :_M x_{d-1})/x_d^2M \longrightarrow x_d(x_dyM :_M x_{d-1})/x_d^2yM$$

cho bởi $x_d\bar{a} \mapsto x_d y\bar{a}$ là một đẳng cấu. Thật vậy, cho

$$x_d\bar{a} \in \mathrm{Ker}(\varphi), a \in x_dM :_M x_{d-1}$$

thì $x_dya \in x_d^2yM$. Khi đó tồn tại $b \in M$ sao cho $x_dya = x_d^2yb$. Do đó $a \in x_dM + 0 :_M yx_d$. Vì $\dim(0 :_M y) < d$ nên theo Bổ đề 1.2.5 ta có $0 :_M y \subseteq 0 :_M x_d$, do đó

$$0 :_M yx_d = (0 :_M y) :_M x_d \subseteq (0 :_M x_d) :_M x_d = 0 :_M x_d.$$

Suy ra $x_da \in x_d^2M$, nghĩa là $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$. Vậy φ là đơn ánh.

Tiếp theo, ta chứng minh φ là toàn ánh. Cho

$$x_d\bar{a} \in x_d(x_dyM :_M x_{d-1})/x_d^2yM,$$

trong đó $a \in x_dyM :_M x_{d-1}$. Khi đó tồn tại $c \in M$ sao cho $x_{d-1}a = x_dyc$. Trong trường hợp này $\bar{c} \in 0 :_{M'} x_dy$, với $M' = M/x_{d-1}M$. Mặt khác từ Mệnh đề 2.1.2 (iv) môđun M' có hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $x_1, \ldots, x_{d-2}, x_d$. Vì y là phần tử tham số nên $\dim(0 :_{M'} y) < d-1$, áp dụng Bổ đề 1.2.5 ta có

$$0 :_{M'} x_dy = (0 :_{M'} y) :_{M'} x_d \subseteq (0 :_{M'} x_d) :_{M'} x_d = 0 :_{M'} x_d.$$

Do đó $x_dc \in x_{d-1}M$. Khi đó tồn tại $c' \in x_dM :_M x_{d-1}$ sao cho $x_dc = x_{d-1}c'$. Suy ra $x_{d-1}a = x_{d-1}yc' \in x_{d-1}y(x_dM :_M x_{d-1})$. Trong trường hợp này,

$$a \in y(x_dM :_M x_{d-1}) + 0 :_M x_{d-1} \subseteq y(x_dM :_M x_{d-1}) + 0 :_M x_d.$$

Vì thế $x_da \in x_dy(x_dM :_M x_{d-1})$ và $x_d\bar{a} \in \mathrm{Im}(\varphi)$, hay φ là toàn ánh. Vậy φ là song ánh. $\square$

Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Cố định $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ và đặt $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Kí hiệu

$$x_\Lambda M = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})M.$$

Với $0 \leq i \leq d$ và $i+1 \notin \Lambda$, đặt

$$U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}} := \begin{cases} (0 : x_{i+1})_{M/x_\Lambda M} & \text{nếu } i \leq d-1, \\ M/x_\Lambda M & \text{nếu i=d.} \end{cases}$$

Đặc biệt, khi $\Lambda = \{i+2, \ldots, j\}$, kí hiệu $U^{i,\Lambda}_{M,\underline{x}} = U^{ij}_{M,\underline{x}}$. Khi đó $U^{dd}_{M,\underline{x}} = M$ và $U^{d-1,d}_{M,\underline{x}} = 0 :_M x_d = \mathrm{U}_M(0)$ là môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d bởi Bổ đề 1.2.5. Do đó các môđun này không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Tương tự, ta có thể đặt câu hỏi: phải chăng các môđun $U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}}$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc? Trả lời câu hỏi này, ta có mệnh đề quan trọng sau.

Mệnh đề 2.2.2. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và $n_1, \ldots, n_d \geq 2$. Cho $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ và $\Lambda \subseteq \{i+2, \ldots, d\}$. Khi đó các môđun $U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})}$ chỉ phụ thuộc vào i, Λ và không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và số mũ $n_1, \ldots, n_d$. Cụ thể, nếu $\underline{y}$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc khác của M thì ta có*

$$U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})} \simeq U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{y}(\underline{m})},$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d, m_1, \ldots, m_d \geq 2$.

Chứng minh. Chứng minh mệnh đề được chia làm 4 bước.
Bước 1. Ta chứng minh

$$U^{id}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})} \simeq U^{id}_{M,\,\underline{x}(\underline{m})},$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d, m_1, \ldots, m_d \geq 2$.

Lưu ý rằng bằng cách quy nạp, ta chỉ cần chứng minh đẳng cấu trong trường hợp $m_s = n_s$ với mọi $s \neq j$ và $m_j = n_j + 1$, với $j > i+1$ tùy ý. Đặt

$$M' = M/(x_{i+2}^{n_{i+2}}, \ldots, \widehat{x_j^{n_j}}, \ldots, x_d^{n_d})M.$$

Khi đó cần chỉ ra $U^{id}_{M',\,{x_j}^{n_j}}$ và $U^{id}_{M',\,{x_j}^{n_j+1}}$ là đẳng cấu với mọi $n_j \geq 2$. Vì $x_1, \ldots, x_{i+1}, x_j$ là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M' nên điều cần chứng minh được suy ra từ Bổ đề 2.2.1.

Bước 2. Ta chứng minh

$$U^{id}_{M,\ \underline{x}(\underline{n})} \simeq U^{id}_{M,\ \underline{y}(\underline{n})},$$

với $n_1, \ldots, n_d \gg 0$. Thật vậy, vì $\underline{x}(\underline{n})$ và $\underline{y}(\underline{n})$ là hệ tham số p-chuẩn tắc của M, bởi Mệnh đề 2.1.2 (iii) nên ta có thể xét $n_i \geq i$ với mọi $i = 1, \ldots, d$. Chú ý rằng R là ảnh đồng cấu của vành Cohen-Macaulay nên mọi môđun hữu hạn sinh đều có hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Theo Mệnh đề 2.1.8, hai môđun $M/x_d^{n_d}M$, $M/y_d^{n_d}M$ có chung một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc, kí hiệu là $z_1, \ldots, z_{d-1}$. Theo Mệnh đề 2.1.2 (iii) ta có thể giả thiết chúng là hệ tham số p-chuẩn tắc và $x_d^{n_d}, y_d^{n_d} \in \mathfrak{a}(M)$. Vì $z_1, \ldots, z_{d-1}, x_d^{n_d}$ và $z_1, \ldots, z_{d-1}, y_d^{n_d}$ là hai hệ tham số p-chuẩn tắc của M nên hai hệ tham số này đều là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

Ta sẽ chứng minh đẳng cấu bằng quy nạp theo chiều của M. Thật vậy, trường hợp $d = 1$ là hiển nhiên. Cho $d \geq 2$. Khi đó cần chỉ ra khẳng định là đúng cho trường hợp $i \leq d - 2$. Theo quy nạp ta có các đẳng cấu

$$U^{id}_{M,\ \underline{x}(\underline{n})} \simeq U^{id}_{M/x_d^{n_d}M;\ x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}}} \simeq U^{id}_{M/x_d^{n_d}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-1}^{n_{d-1}}}$$

và

$$U^{id}_{M,\ \underline{y}(\underline{n})} \simeq U^{id}_{M/y_d^{n_d}M;\ y_1^{n_1},\ldots,y_{d-1}^{n_{d-1}}} \simeq U^{id}_{M/y_d^{n_d}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-1}^{n_{d-1}}}.$$

Nếu $i < d - 2$ thì

$$U^{id}_{M/x_d^{n_d}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-1}^{n_{d-1}}} \simeq U^{id}_{M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{n_d}} \simeq U^{id}_{M/z_{d-1}^{n_{d-1}}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-2}^{n_{d-2}},x_d^{n_d}}.$$

Tương tự,

$$U^{id}_{M/y_d^{n_d}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-1}^{n_{d-1}}} \simeq U^{id}_{M/z_{d-1}^{n_{d-1}}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-2}^{n_{d-2}},y_d^{n_d}}.$$

Theo quy nạp

$$U^{id}_{M/z_{d-1}^{n_{d-1}}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-2}^{n_{d-2}},x_d^{n_d}} \simeq U^{id}_{M/z_{d-1}^{n_{d-1}}M;\ z_1^{n_1},\ldots,z_{d-2}^{n_{d-2}},y_d^{n_d}}.$$

Do đó $U^{id}_{M,\ \underline{x}(\underline{n})} \simeq U^{id}_{M,\ \underline{y}(\underline{n})}$.

Với $i = d-2$ thì $(0 : z_{d-1})_{M/x_d^{n_d}M} \simeq (0 : z_{d-1})_{M/y_d^{n_d}M}$. Theo Bổ đề 2.2.1 ta có

$$(0 : z_{d-1})_{M/x_d^{n_d}M} \simeq (0 : z_{d-1})_{M/x_d^{n_d}y_d^{n_d}M} \simeq (0 : z_{d-1})_{M/y_d^{n_d}M}.$$

Bước 3. Cho $\underline{x}, \underline{y}$ là hai hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và cho $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_r\}$, với $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Ta cần chứng minh

$$U^{i,\Lambda}_{M,\ \underline{x}(\underline{n})} \simeq U^{i,\Lambda}_{M,\ \underline{y}(\underline{m})},$$

với $i+1 < i_1$ và với mọi $n_1, \ldots, n_d, m_1, \ldots, m_d \geq 2$.

Thật vậy, đặt $\Lambda_0 = \{i+2, \ldots, d\}$. Cố định n_j, m_j với $j \in \Lambda$ và cho $n_j = m_j$ tương ứng với $j \in \Lambda_0 \backslash \Lambda$. Xét $n'_j > n_j$ với $j \in \Lambda_0 \backslash \Lambda$ và $n'_j = n_j$ với $j \in \Lambda$. Khi đó phép chiếu tự nhiên $M/x_{\Lambda_0}(\underline{n}')M \longrightarrow M/x_{\Lambda_0}(\underline{n})M$, cảm sinh một đồng cấu

$$\rho^{\underline{x}}_{\underline{n}',\underline{n}} : (0 : x_{i+1})_{M/x_{\Lambda_0}(\underline{n}')M} \longrightarrow (0 : x_{i+1})_{M/x_{\Lambda_0}(\underline{n})M}.$$

Từ Bước 1 và Bước 2 ta có đẳng cấu

$$(0 : x_{i+1})_{M/x_{\Lambda_0}(\underline{n})M} \simeq (0 : y_{i+1})_{M/y_{\Lambda_0}(\underline{m})M}$$

và biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc}
(0 : x_{i+1})_{M/x_{\Lambda_0}(\underline{n})M} & \xleftarrow{\rho^{\underline{x}}_{\underline{n}',\underline{n}}} & (0 : x_{i+1})_{M/x_{\Lambda_0}(\underline{n}')M} \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
(0 : y_{i+1})_{M/y_{\Lambda_0}(\underline{m})M} & \xleftarrow[\rho^{\underline{y}}_{\underline{m}',\underline{m}}]{} & (0 : y_{i+1})_{M/y_{\Lambda_0}(\underline{m}')M}
\end{array}$$

Từ biểu đồ giao hoán suy ra tồn tại đẳng cấu của giới hạn ngược

$$\varprojlim_{n_j, j \notin \Lambda} (0 : x_{i+1})_{M/x_\Lambda(\underline{n})M} \simeq \varprojlim_{m_j, j \notin \Lambda} (0 : y_{i+1})_{M/y_\Lambda(\underline{n})M}.$$

Bước 4. Ta chứng minh

$$U^{i,\Lambda}_{M,\ \underline{x}(\underline{n})} \simeq \varprojlim_{n_j, j \notin \Lambda} (0 : x_{i+1})_{M/x_\Lambda(\underline{n})M}$$

và

$$U^{i,\Lambda}_{M,\ \underline{y}(\underline{m})} \simeq \varprojlim_{m_j, j\notin\Lambda}(0 : y_{i+1})_{M/y_\Lambda(\underline{n})M}.$$

Cho $j_1 = j+1$ và $\Lambda_0 \setminus \Lambda = \{j_2 < j_3 < \cdots < j_r\}$. Kí hiệu $z_s = x_{j_s}$ với $s = 1, \ldots, r$. Đặt $N = M/x_\Lambda(\underline{n})M$. Vì $x_1, \ldots, x_d$ là dd-dãy trên M nên dãy con $z_1, \ldots, z_r$ cũng là dd-dãy trên M. Khi đó $U^{i,\Lambda}_{M,\ \underline{x}(\underline{n})} \simeq 0 :_N z_1$ và

$$(0 : x_{i+1})_{M/x_{\Lambda_0}(\underline{n})M} \simeq (0 : z_1)_{(z_2^{n_{j_2}}, \ldots, z_r^{n_{j_r}})M}.$$

Cuối cùng ta cần chỉ ra tồn tại đẳng cấu

$$0 :_N z_1 \simeq \varprojlim_{n_2,\ldots,n_r}(0 : z_1)_{N/(z_2^{n_2},\ldots,z_r^{n_r})N}.$$

Đẳng cấu này sẽ được chứng minh ở bổ đề tiếp theo. □

Bổ đề 2.2.3. *Cho N là một $R-$môđun hữu hạn sinh và $z_1, \ldots, z_r \in \mathfrak{m}$ là một dd$-$dãy trên N. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(i) Với các số nguyên $n_1 \geq 1, n_2, \ldots, n_r > 1$, ta có đẳng cấu

$$(0 : z_1^{n_1})_{N/(z_2^{n_2},\ldots,z_r^{n_r})N} \simeq (0 :_N z_1) \oplus \frac{N'}{(z_2^{n_2}, \ldots, z_r^{n_r})N},$$

ở đây

$$N' = \sum_{\substack{t=1,\ldots,r-1 \\ 2\leq i_1<\ldots<i_t\leq r}} z_{i_1}^{n_{i_1}-1} \ldots z_{i_t}^{n_{i_t}-1}((z_{i_1}, \ldots, z_{i_t})N :_N z_1).$$

(ii) Giới hạn của hệ ngược $\{(0 : z_1)_{N/(z_2^{n_2},\ldots,z_r^{n_r})N}, \rho_{\underline{m},\underline{n}}\}$ là

$$\varprojlim_{n_2,\ldots,n_r}(0 : z_1)_{N/(z_2^{n_2},\ldots,z_r^{n_r})N} \simeq 0 :_N z_1.$$

Chứng minh. (i) Trước tiên, ta chứng minh quy nạp theo r rằng

$$(z_2^{n_2}, \ldots, z_r^{n_r})N :_N z_1 = 0 :_N z_1 + N',$$

với mọi $n_2, \ldots, n_r > 0$. Thật vậy, vì $z_1, \ldots, z_r$ là d-dãy trên N nên trường hợp $r = 1, 2$ là hiển nhiên. Giả sử $r > 2$. Khi đó $z_1, z_3, \ldots, z_r$ là dd-dãy trên $N/x_2^{n_2}N$. Áp dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned}(z_2^{n_2},\dots,z_r^{n_r})N :_N z_1 = z_2^{n_2}N :_N z_1 \\ + \sum_{\substack{t=1,\dots,r-2\\ 3\le i_1<\dots<i_t\le r}} z_{i_1}^{n_{i_1}-1}\dots z_{i_t}^{n_{i_t}-1}((z_2^{n_2},z_{i_1},\dots,z_{i_t})N :_N z_1).\end{aligned}$$

Theo [17, Hệ quả 3.4] thì $z_1,z_2,z_{i_1},\dots,z_{i_t}$ là dd-dãy trên N và z_1,z_2 là d-dãy trên $N/(z_{i_1},\dots,z_{i_t})N$. Khi đó theo giả thiết quy nạp

$$\begin{aligned}(z_2^{n_2},z_{i_1},\dots,z_{i_t})N :_N z_1 = (z_{i_1},\dots,z_{i_t})N :_N z_1 \\ + z_2^{n_2-1}((z_2,z_{i_1},\dots,z_{i_t})N :_N z_1).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(z_2^{n_2},\dots,z_r^{n_r})N :_N z_1 &= 0 :_N z_1 + z_2^{n_2-1}(z_2N :_N z_1) \\ &+ \sum_{\substack{t=1,\dots,r-2\\ 3\le i_1<\dots<i_t\le r}} z_{i_1}^{n_{i_1}-1}\dots z_{i_t}^{n_{i_t}-1}((z_2^{n_2},z_{i_1},\dots,z_{i_t})N :_N z_1) \\ &= 0 :_N z_1 \\ &+ \sum_{\substack{t=1,\dots,r-1\\ 2\le i_1<\dots<i_t\le r}} z_{i_1}^{n_{i_1}-1}\dots z_{i_t}^{n_{i_t}-1}(z_{i_1},\dots,z_{i_t})N :_N z_1).\end{aligned}$$

Hơn nữa, theo Mệnh đề 1.2.3 (ii) thì $(0 :_N z_1)\cap(z_2,\dots,z_r)N = 0$. Vì $n_1,\dots,n_r > 1$ nên $N' \subset (z_2,\dots,z_r)N$. Do đó $(0 :_N z_1)\cap N' = 0$. Khẳng định trong (i) được chứng minh.

(ii) Cho $m_2 > n_2,\dots,m_r > n_r$. Từ đẳng cấu trong (i), ta có ánh xạ cảm sinh

$$\rho'_{\underline{m},\underline{n}} : (0 :_N z_1) \oplus \frac{N'(\underline{m})}{(z_2^{m_2},\dots,z_r^{m_r})N} \longrightarrow (0 :_N z_1) \oplus \frac{N'(\underline{n})}{(z_2^{n_2},\dots,z_r^{n_r})N},$$

ở đây các môđun $N'(\underline{m})$ và $N'(\underline{n})$ đóng vai trò như môđun N' trong (i). Vì $m_2 > n_2,\dots,m_r > n_r$ nên

$$N'(\underline{m}) \subset (z_2^{m_2-1},\dots,z_r^{m_r-1})N \subset (z_2^{n_2},\dots,z_r^{n_r})N.$$

Do đó ánh xạ $\rho'_{\underline{m},\underline{n}}$ là phép chiếu xuống thành phần $0 :_N z_1$, nghĩa là $\rho'_{\underline{m},\underline{n}}((u \oplus v)) = u$ với mọi $u \in 0 :_N z_1$ và $v \in \frac{N'(\underline{m})}{(z_2^{m_2},\ldots,z_r^{m_r})N}$. Vì vậy

$$\varprojlim_{n_2,\ldots,n_r}(0 : z_1)_{N/(z_2^{n_2},\ldots,z_r^{n_r})N} \simeq 0 :_N z_1.$$

□

Định nghĩa 2.2.4. Lớp đẳng cấu của các môđun con thương $U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})}$ và $U^{ij}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})}$ được kí hiệu tương ứng là $U^{i,\Lambda}_M$ và U^{ij}_M, trong đó $0 \le i < j \le d$ và $\Lambda \subseteq \{i+2,\ldots,d\}$.

Chú ý 2.2.5. (i) Đối với Mệnh đề 2.2.2, ban đầu chúng tôi chứng minh số bội $e(U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})})$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $\underline{x}$. Một cách độc lập, các tác giả N.T. Cường và P.H. Quý [3, 26] chứng minh các môđun con thương $U^{id}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})}$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số p-chuẩn tắc $\underline{x}$ và $n_1,\ldots,n_d \gg 0$. Sau đó, bằng cách chỉnh lại chứng minh ban đầu cho số bội chúng tôi thu được Mệnh đề 2.2.2 cho các môđun con thương tổng quát $U^{i,\Lambda}_{M,\,\underline{x}(\underline{n})}$.

(ii) $\dim(U^{id}_M) \le i$, với mọi $0 \le i < d$.

(iii) Các môđun thương $U^{i,\Lambda}_M$ chứa nhiều thông tin quan trọng về cấu trúc môđun M. Đơn giản nhất là trường hợp

$$U^{d-1,d}_M = 0 :_M x_d^2 = 0 :_M x_d = \mathrm{U}_M(0).$$

Đây là môđun con lớn nhất của M có chiều nhỏ hơn d. Ngoài ra, $U^{01} = 0 :_M x_1 = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun con lớn nhất của M có độ dài hữu hạn. Dễ thấy M là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $U^{i,\Lambda}_M = 0$, với mọi Λ và $i < d$.

Trong phần sau ta sẽ tìm hiểu một số ứng dụng của các môđun $U^{i,\Lambda}_M$, một số ứng dụng khác có thể xem trong [3, 26]. Ta có mối quan hệ quan trọng giữa các môđun con thương này trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2.6. *Giả sử M có hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Các phát biểu sau là đúng.*

(i) Cho $i = 1, \ldots, d$ và $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \{i+2, \ldots, d\}$. Khi đó tồn tại đơn cấu

$$\varphi : U_M^{i,\Lambda} \hookrightarrow U_M^{i,\Lambda'},$$

sao cho $\mathrm{Im}(\varphi)$ *là một hạng tử trực tiếp của* $U_M^{i,\Lambda'}$.

(ii) Nếu $\Lambda = \{i+2, \ldots, j-1\}$ và $\Lambda' = \{i+2, \ldots, j\}$, kí hiệu $\mathrm{Coker}(\varphi)$ *là* $\overline{U}_M^{ij}$. *Khi đó ta có phân tích*

$$U_M^{ij} \simeq \overline{U}_M^{ij} \oplus \overline{U}_M^{i,j-1} \oplus \ldots \oplus \overline{U}_M^{i,i+2} \oplus U_M^{i,i+1}.$$

Chứng minh. (i) Giả sử $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_t\}$ với $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$. Kí hiệu $\Lambda_0 = \Lambda' \setminus \Lambda$. Chọn một hệ tham số hầu $p-$chuẩn tắc $x_1, \ldots, x_d$ của M. Kí hiệu $N = M/(x_{i_1}^2, \ldots, x_{i_t}^2)M$. Ta có các đẳng cấu $U_M^{i,\Lambda} \simeq U_N^{i,\emptyset}$ và $U_M^{i,\Lambda'} \simeq U_N^{i,\Lambda_0}$. Do đó ta đưa về chứng minh cho trường hợp $\Lambda = \emptyset$, nghĩa là ta cần chứng minh tồn tại đơn cấu

$$\varphi : (0 :_M x_{i+1}) \hookrightarrow U_M^{i,\Lambda'}.$$

Giả sử $\Lambda' = \{j_1, \ldots, j_t\}$, với $i+1 < j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leq d$. Bằng cách thay hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ bởi $x_1^2, \ldots, x_d^2$ nếu cần, ta có thể giả sử

$$U_M^{i,\Lambda'} \simeq (0 : x_{i+1})_{M/(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})M} = \frac{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})M :_M x_{i+1}}{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})M}.$$

Vì hệ tham số hầu p-chuẩn tắc là d-dãy và $i+1 < j_1, \ldots, j_t$ nên ta có

$$(0 :_M x_{i+1}) \cap (x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})M = 0.$$

Từ đó suy ra

$$(0 :_M x_{i+1}) \simeq \frac{(0 :_M x_{i+1}) \oplus (x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})M}{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})M}.$$

Vậy tồn tại đồng cấu nhúng

$$\varphi : (0 :_M x_{i+1}) \hookrightarrow U_M^{i,\Lambda'}.$$

(ii) Theo (i) ta có các đơn cấu $\varphi : U_M^{i,j-1} \hookrightarrow U_M^{ij}$, với $0 \leq i < j \leq d$. Do đó

$$\begin{aligned} U_M^{ij} &\simeq \overline{U}_M^{ij} \oplus U_M^{i,j-1} \\ &\simeq \overline{U}_M^{ij} \oplus \overline{U}_M^{i,j-1} \oplus U_M^{i,j-2} \\ &\dots \\ &\simeq \overline{U}_M^{ij} \oplus \overline{U}_M^{i,j-1} \oplus \ldots \oplus \overline{U}_M^{i,i+2} \oplus U_M^{i,i+1}. \end{aligned}$$

□

Để thuận tiện cho việc trình bày, ta kí hiệu $\overline{U}_M^{i,i+1} := U_M^{i,i+1}$, với $0 \leq i < d$. Tiếp theo chúng tôi xét các ứng dụng của họ các môđun con thương này. Trong ứng dụng đầu tiên chúng tôi nghiên cứu hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ và thu được kết quả sau.

Định lý 2.2.7. *Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Khi đó ta có*

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{id}),$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Hệ quả là ta có biểu diễn

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_{d_j} n_1 \ldots n_{d_j},$$

trong đó $\lambda_{d_0}, \ldots, \lambda_{d_r} \neq 0$ và các bậc không triệt tiêu $d_0, \ldots, d_r$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số.

Chứng minh. Vì $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M nên

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i n_1 \ldots n_i,$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$, với các hệ số λ_i. Mặt khác, với $n_1, \ldots, n_d > 1$, sử dụng công thức (1.1) (trang 19) của Auslander-Buchsbaunm ta có

$$\begin{aligned}\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) &= \sum_{i=0}^{d} n_1...n_i e(x_1, ..., x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}^{n_{i+2}}, ..., x_d^{n_d})M}) \\ &= \sum_{i=0}^{d} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{id}).\end{aligned}$$

Do đó $\lambda_i = e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{id})$, với $i = 0, 1, \ldots, d$. Nói riêng, $\lambda_i \neq 0$ khi và chỉ khi $\dim(U_M^{id}) = i$, do đó không phụ thuộc vào việc chọn $\underline{x}$. □

Chú ý 2.2.8. (i) Định lý 2.2.7 cũng được chứng minh độc lập bởi các tác giả N.T. Cường và P.H. Quý ([3, Mệnh đề 3.2.13], [26, Mệnh đề 4.8]).

(ii) Định lý 2.2.7 cho ta một dãy các bậc $d_0 < d_1 < \ldots < d_r$, trong đó, $d_r = d$ là chiều của M, d_{r-1} là bậc của đa thức

$$I_{M, \underline{x}}(\underline{n}) = \ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) - e(\underline{x}(\underline{n}); M)$$

và là kiểu đa thức của của M theo định nghĩa của tác giả N.T. Cường (xem [15, Định lý 2.3]). Chúng tôi tin rằng các bậc $d_0, \ldots, d_{r-2}$ đều mang thông tin quan trọng về cấu trúc của môđun M và tính chất hình học của tập giá $\mathrm{Supp}(M)$.

2.3 Đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao của phức Koszul đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Đối với các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao, theo Định lý 1.4.2, ta có

$$\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{i=0}^{d-k} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{H_{k-1}(x_{i+2}, \ldots, x_d; M)})$$

là một đa thức theo $n_1, \ldots, n_d > 0$, với các hệ số là bội của các môđun đồng điều Koszul. Trong tiết này ta sẽ tính các hệ số đó qua các môđun

$U_M^{i,\Lambda}$, từ đó dẫn đến việc so sánh các hệ số này với hệ số của đa thức ứng với hàm độ dài $\ell(M/(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M)$.

Đầu tiên ta phát biểu lại Mệnh đề 1.4.1 cho các dãy phần tử mà môđun đồng điều Koszul có độ dài hữu hạn (các hệ tham số thỏa mãn điều kiện này). Chứng minh của mệnh đề không thay đổi.

Bổ đề 2.3.1. *Cho $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m}$ sao cho $H_k(x_1, \dots, x_r; M)$ là môđun có độ dài hữu hạn với $k > 0$. Khi đó ta có*

$$\chi_k(x_1, \dots, x_r; M) = \sum_{i=0}^{r-k} e(x_1, \dots, x_i; (0 : x_{i+1})_{H_{k-1}(x_{i+2},\dots,x_r;\, M)}),$$

với mọi $k = 1, 2, \dots, r$.

Từ Bổ đề 2.3.1 chúng tôi có hệ quả sau.

Hệ quả 2.3.2. *Cho $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và $0 < r \le d$. Khi đó, các phát biểu sau là đúng.*

(i) $$\begin{aligned}\chi_1(x_1, \dots, x_r; M) &= \sum_{i=1}^{r} e(x_1, \dots, x_{i-1}; (0 : x_i)_{M/(x_{i+1},\dots,x_r)M}) \\ &= \chi_1(x_1, \dots, x_{r-1}; M/x_rM) + e(x_1, \dots, x_{r-1}; 0 :_M x_r).\end{aligned}$$

(ii) $\chi_1(x_1, \dots, x_r; M) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1, \dots, x_{r-1})M))$.

Chứng minh. (i) Ta có $(0 : x_i)_{M/(x_{i+1},\dots,x_r)M} = (0 : x_i)_{H_0(x_{i+1},\dots,x_r;\, M)}$. Do đó (i) là trường hợp đặc biệt của Bổ đề 2.3.1 với $k = 1$.
(ii) Áp dụng công thức trong (i) cho dãy $x_r, \dots, x_2, x_1$ ta có

$$\chi_1(x_1, \dots, x_r; M) = \sum_{i=1}^{r} e(x_r, x_{r-1}, \dots, x_{i+1}; (0 : x_i)_{M/(x_{i-1},\dots,x_1)M}).$$

Vì $x_1, \dots, x_d$ là một d-dãy trên M nên x_r nằm trong linh hóa tử của môđun $(0 : x_i)_{M/(x_{i-1},\dots,x_1)M}$ với mọi $i < r$. Hơn nữa

$$\begin{aligned}(0 : x_r)_{M/(x_1,\dots,x_{r-1})M} &= (0 : (x_r, \dots, x_d))_{M/(x_1,\dots,x_{r-1})M} \\ &= (0 : (x_1, \dots, x_d))_{M/(x_1,\dots,x_{r-1})M} \\ &= H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1, \dots, x_{r-1})M).\end{aligned}$$

Do đó $\chi_1(x_1, \ldots, x_r; M) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M))$. $\square$

Hệ quả 2.3.2 cho ta một công thức thú vị của đặc trưng Euler-Poincaré bậc 1 như sau.

Mệnh đề 2.3.3. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Với mỗi $0 < r \leq d$, ta có*

$$\chi_1(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M) = \sum_{i=0}^{r-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{ir}),$$

với mọi $n_1, ..., n_r > 0$.

Chứng minh. Để chứng minh khẳng định trong mệnh đề ta chứng minh

$$\chi_1(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M) = \sum_{i=0}^{r-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}^2, \ldots, x_r^2)M})$$

bằng quy nạp theo chiều của môđun M. Rõ ràng đẳng thức là đúng nếu $\dim(M) = 1$. Giả sử rằng $\dim(M) > 1$. Theo Hệ quả 2.3.2 (ii) thì

$$\chi_1(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(x_1^{n_1}, \ldots, x_{r-1}^{n_{r-1}}; M)),$$

không phụ thuộc vào $n_r > 0$. Từ đó áp dụng Hệ quả 2.3.2 (i) ta được

$$\begin{aligned}\chi_1(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M) &= \chi_1(x_1^{n_1}, \ldots, x_{r-1}^{n_{r-1}}, x_r^2; M) \\ &= \chi_1(x_1^{n_1}, \ldots, x_{r-1}^{n_{r-1}}; M/x_r^2 M) \\ &\quad + n_1 \ldots n_{r-1} e(x_1, \ldots, x_{r-1}; 0 :_M x_r^2).\end{aligned}$$

Chú ý rằng $x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1} \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của môđun $M/x_r^2 M$ (theo Mệnh đề 1.2.3 (iv)). Áp dụng giả thiết quy nạp cho môđun $M/x_r^2 M$ ta có

$$\begin{aligned}\chi_1(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M) &= \sum_{i=0}^{r-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2}^2, \ldots, x_r^2)M}) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{ir}).\end{aligned}$$

$\square$

Từ Hệ quả 2.3.2 (ii) và Mệnh đề 2.3.3 ta có kết quả sau, trong đó chúng tôi chỉ ra rằng độ dài của môđun đối đồng điều địa phương có thể tính qua bội của các môđun con thương U_M^{ij}.

Hệ quả 2.3.4. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của môđun M. Với mọi $r = 0, 1, \ldots, d-1$ ta có*

$$\ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r})M) = \sum_{i=0}^{r} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{i,r+1})$$

với mọi $n_1, \ldots, n_r > 0$.

Định lý sau là kết quả chính của tiết này. Trong định lý này chúng tôi đưa ra công thức tính các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thông qua số bội của các môđun con thương U_M^{ij}.

Định lý 2.3.5. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Với $0 < k \leq r \leq d$, ta có*

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) = \sum_{t=0}^{r-k} \sum_{j=t}^{r-k} \begin{pmatrix} r-j-2 \\ k-2 \end{pmatrix} e(x_1, \ldots, x_t; U_M^{t,j+1}).$$

Kí hiệu

$$N_{r,r-k,t} = \bigoplus_{i=0}^{r} (U_M^{t,j+1})^{\oplus \begin{pmatrix} r-j-2 \\ k-2 \end{pmatrix}}.$$

Khi đó, $\chi_k(x_1, \ldots, x_r; M) = \sum\limits_{t=0}^{r-k} e(x_1, \ldots, x_t; N_{r,r-k,t})$.

Chứng minh. Vì hệ tham số hầu p-chuẩn tắc là d-dãy mạnh nên theo [23, Bổ đề 3.1], ta có

$$\ell(H_i(x_1, \ldots, x_r; M)) = \sum_{j=0}^{r-i} \begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1, \ldots, x_j)M)).$$

Áp dụng Hệ quả 2.3.4 ta được

$$\begin{aligned}
\ell(H_i(x_1,\ldots,x_r;M)) &= \sum_{j=0}^{r-i}\begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}\sum_{t=0}^{j} e(x_1,\ldots,x_t;U_M^{t,j+1}) \\
&= \sum_{t=0}^{r-i}\sum_{j=t}^{r-i}\begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} e(x_1,\ldots,x_t;U_M^{t,j+1}).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\chi_k(x_1,\ldots,x_r;M) &= \sum_{i=k}^{r}(-1)^{i-k}\ell(H_i(x_1,\ldots,x_r;M)) \\
&= \sum_{i=k}^{r}(-1)^{i-k}\sum_{t=0}^{r-i}\sum_{j=t}^{r-i}\begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} e(x_1,\ldots,x_t;U_M^{t,j+1}) \\
&= \sum_{t=0}^{r-k}\sum_{i=k}^{r-t}\sum_{j=t}^{r-i}(-1)^{i-k}\begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} e(x_1,\ldots,x_t;U_M^{t,j+1}) \\
&= \sum_{t=0}^{r-k}\sum_{j=t}^{r-t}\sum_{i=k}^{r-i}(-1)^{i-k}\begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} e(x_1,\ldots,x_t;U_M^{t,j+1}).
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức

$$\begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-j-2 \\ i-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r-j-2 \\ i-2 \end{pmatrix},$$

ta có

$$\sum_{i=k}^{r-j}(-1)^{i-k}\begin{pmatrix} r-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-j-2 \\ k-2 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$\chi_k(x_1,\ldots,x_r;M) = \sum_{t=0}^{r-k}\sum_{j=t}^{r-k}\begin{pmatrix} r-j-2 \\ k-2 \end{pmatrix} e(x_1,\ldots,x_t;U_M^{t,j+1}).$$

Khẳng định còn lại được suy ra từ đẳng thức trên và tính chất cộng tính của bội. $\square$

Chứng minh của Định lý 2.3.5 cho ta ngay hệ quả sau.

Hệ quả 2.3.6. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(i) Với mỗi $0 < i \leq k \leq d$, ta có

$$\ell(H_i(x_1, \ldots, x_r; M)) = \sum_{t=0}^{r-i} \sum_{j=t}^{r-i} \binom{r-j-1}{i-1} e(x_1, \ldots, x_t; U_M^{t,j+1}).$$

(ii) Với mỗi $0 < k \leq r \leq d$, ta có

$$\chi_k(x_1^{n_1}, \ldots, x_r^{n_r}; M) = \sum_{t=0}^{r-k} n_1 \ldots n_t e(x_1, \ldots, x_t; N_{r,r-k,t})$$

là một đa thức với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$.

2.4 Hệ số Hilbert đối với iđêan sinh bởi hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M và $I = (x_1, \ldots, x_d)$ là iđêan tham số sinh bởi $x_1, \ldots, x_d$. Để thuận tiện cho việc trình bày ta kí hiệu các hệ số Hilbert $e_i(I; M)$ bởi $e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M)$, với mọi $i = 0, \ldots, d$.

Thay hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ bởi hệ tham số $x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ thì các hàm $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ phụ thuộc $n_1, \ldots, n_d$, với $i = 0, \ldots, d$.

Theo tính chất của bội ta có

$$e_0(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = n_1 \ldots n_d e(x_1, \ldots, x_d; M)$$

là một đa thức theo $n_1, \ldots, n_d$ có bậc d. Trong trường hợp hệ tham số đủ tốt ta có thể hi vọng các hàm $e_i(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ cũng là đa thức theo $n_1, \ldots, n_d$.

Trong kết quả đầu tiên của tiết này, chúng tôi đưa ra một công thức tính cho các hệ số Hilbert của M đối với iđêan tham số sinh bởi hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thông qua bội của các môđun con thương U_M^{ij}.

Định lý 2.4.1. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và I là iđêan sinh bởi $x_1, \ldots, x_d$. Khi đó với mọi $n > 0$, ta có*

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) \begin{pmatrix} n+i \\ i \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, $e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) = \sum\limits_{t=0}^{i} e(x_1, \ldots, x_t; \overline{U}_M^{t,i+1})$, với mọi $0 \leq i \leq d-1$.

Chứng minh. Do $x_1, \ldots, x_d$ là d-dãy nên theo Định lý 1.3.2 ta có

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) \begin{pmatrix} n+i \\ i \end{pmatrix}$$

với mọi $n \geq 0$, ở đây $e_d(x_1, \ldots, x_d; M) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$, và

$$\begin{aligned} e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1, \ldots, x_i)M)) \\ - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)), \end{aligned}$$

với $i > 0$. Từ đó áp dụng Hệ quả 2.3.4 ta được

$$\begin{aligned} e_{d-i}(x_1, \ldots, x_d; M) &= e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{i,i+1}) \\ &\quad + \sum_{t=0}^{i-1} (e(x_1, \ldots, x_t; U_M^{t,i+1}) - e(x_1, \ldots, x_t; U_M^{ti})) \\ &= \sum_{t=0}^{i} e(x_1, \ldots, x_t; \overline{U}_M^{t,i+1}). \end{aligned}$$

□

Kết quả trong Định lý 2.4.1 dẫn đến việc có thể dùng các tính chất của bội để nghiên cứu các hệ số Hilbert. Một ví dụ là kết quả sau.

Hệ quả 2.4.2. *Với giả thiết và kí hiệu như trong Định lý 2.4.1. Khi đó,*

$$e_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{t=0}^{i} n_1 \ldots n_t e(x_1, \ldots, x_t; \overline{U}_M^{t,i+1})$$

là một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng i, với mọi $0 \leq i \leq d-1$.

Trong định lý thứ hai của tiết này chúng tôi đưa ra một quan hệ đặc biệt giữa hàm độ dài, đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và các hệ số Hilbert đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Trước đây, việc so sánh này hầu như là bất khả thi. Tuy nhiên với việc tính toán các hệ số của các đa thức này thông qua bội của các môđun U_M^{ij}, ta thu được quan hệ rất thú vị giữa chúng.

Định lý 2.4.3. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M với*

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_{d_j} n_1 \ldots n_{d_j},$$

ở đây $d_0 < d_1 < \ldots < d_r$ là các bậc ứng với $\lambda_{d_j} \neq 0$. Khi đó, với $0 \leq i < d$, ta có

$$e_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{d_j \leq i} \mu_{d_j} n_1 \ldots n_{d_j},$$

$$\chi_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{d_j \leq i} \lambda_{i,d_j} n_1 \ldots n_{d_j},$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Ở đây các hệ số $\lambda_{i,d_j}, \mu_{d_j}$ thỏa mãn

$$0 \leq \mu_{d_j} \leq \lambda_{i,d_j} \leq (\lambda_{d_j})^{\binom{d-d_j-1}{d-i-1}}.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và các định lý 2.3.5 và 2.4.1 ta có

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = \sum_{t=0}^{d} \lambda_t n_1 \ldots n_t,$$

$$e_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{t=0}^{i} \mu_t n_1 \ldots n_t,$$

$$\chi_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{t=0}^{i} \lambda_{i,t} n_1 \ldots n_t.$$

Các hệ số $\lambda_t, \lambda_{i,t}, \mu_t$ được cho bởi các công thức sau

$$\lambda_t = e(x_1, \ldots, x_t; U_M^{td}),$$
$$\lambda_{i,t} = e(x_1, \ldots, x_t; N_{i,t}),$$
$$\mu_t = e(x_1, \ldots, x_t; \overline{U}_M^{t,i+1}),$$

với

$$N_{i,t} = U_M^{t,i+1} \bigoplus (U_M^{ti})^{\oplus \binom{d-i-1}{d-i-2}} \bigoplus \ldots \bigoplus (U_M^{t,t+1})^{\oplus \binom{d-i-1}{d-i-2}}.$$

Do đó $\mu_t \leq \lambda_{i,t}$. Theo Hệ quả 2.2.6 các môđun con thương

$$U_M^{t,i+1}, U_M^{ti}, \ldots, U_M^{t,t+1}$$

đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của U_M^{td}. Do đó ta có các đồng cấu nhúng

$$N_{i,t} \hookrightarrow (U_M^{td})^{\oplus \sum_{j=i}^{t} \binom{d-j-1}{d-i-2}} = (U_M^{td})^{\oplus \binom{d-t-1}{d-i-1}}.$$

Từ các đồng cấu nhúng ta suy ra bất đẳng thức

$$0 \leq \mu_t \leq \lambda_{i,t} \leq (\lambda_t)^{\binom{d-t-1}{d-i-1}}.$$

Trong trường hợp này, nếu $\lambda_t = 0$ thì $\lambda_{i,t} = \mu_t = 0$. Điều đó suy ra rằng

$$e_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{d_j \leq i} \mu_{d_j} n_1 \ldots n_{d_j},$$

$$\chi_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M) = \sum_{d_j \leq i} \lambda_{i,d_j} n_1 \ldots n_{d_j}.$$

□

Với một hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ bất kỳ, các tác giả N.T. Cường và V.T. Khôi ([22, Định lý 4. 2]) chứng minh rằng bậc nhỏ nhất của các đa thức chặn trên hàm $\chi_{d-i}(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}; M)$ không phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ và được kí hiệu là $p_{d-i}(M)$. Hơn nữa,

$$p_{d-i}(M) = \dim(R/\mathfrak{b}_i(M)),$$

trong đó $\mathfrak{b}_i(M) = \mathrm{Ann}(H^0_{\mathfrak{m}}(M))\ldots\mathrm{Ann}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$.

Từ Định lý 2.4.3 ta suy ra mối quan hệ giữa các số $p_i(M)$ và bậc triệt tiêu của hàm độ dài như sau.

Hệ quả 2.4.4. *Giả sử M có một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Khi đó ta có $\{p_0(M),\ldots,p_d(M)\} \subseteq \{d_0,\ldots,d_r\}$, trong đó $d_0 < \ldots < d_r$ là các bậc không triệt tiêu của hàm độ dài trong Định lý 2.2.7.*

Một hệ quả khác của Định lý 2.3.5 và Định lý 2.4.3 cho ta mối liên hệ giữa hệ số Hilbert và đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc như sau.

Hệ quả 2.4.5. *Cho $x_1,\ldots,x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và $0 \le i \le j \le d$. Khi đó, các phát biểu sau là đúng.*

(i) $e_{d-i}(x_1,\ldots,x_d;M) = \sum_{t=0}^{i}(-1)^{i-t}\binom{d-t-1}{d-i-1}\chi_{j-t}(x_1,\ldots,x_j;M)$.

(ii) $\chi_{j-i}(x_1,\ldots,x_j;M) = \sum_{t=0}^{i}\binom{d-t-1}{d-i-1}e_{d-t}(x_1,\ldots,x_d;M)$.

Phần cuối của tiết này chúng tôi xét một số ví dụ minh họa cho Định lý 2.4.1.

Ví dụ 2.4.6. Cho $R = \mathbb{K}[[x,y,z]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức 3 biến trên trường $\mathbb{K}$. Đặt $M = (x^2,y,z)R$. Khi đó, M là R- môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều 3 và không là R-môđun Buchsbaum. Hơn nữa, $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = H^2_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ và $H^1_{\mathfrak{m}}(M) \simeq R/(x^2,y,z)$. Xét hệ tham số $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ của M và đặt $I = (x,y,z)$. Lưu ý rằng hệ tham số này không là hệ tham số chuẩn tắc. Khi đó đa thức Hilbert của M đối với I là

$$P_I(n) = \binom{n+3}{3} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1}.$$

Do đó $e_3(I;M) = 0$ và $e_0(I;M) = e_1(I;M) = e_2(I;M) = 1$.

Mặt khác, $y_1 = x^2, y_2 = y, y_3 = z$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Đặt $J = (y_1,y_2,y_3)$. Khi đó đa thức Hilbert của M đối với iđêan tham số J là

$$P_J(n) = 2\binom{n+3}{3} + 2\binom{n+2}{2} + 2\binom{n+1}{1}.$$

Do đó $e_0(J;M) = e_1(I;M) = e_2(I;M) = 2$ và $e_3(J;M) = 0$. Như vậy, $e_1(I;M) < e_1(J;M)$, $e_2(I;M) < e_2(J;M)$ và công thức trong Định lý 2.4.1 là không đúng với iđêan I.

Ví dụ 2.4.7. Cho $R = \mathbb{K}[[x,y]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức 2 biến trên trường $\mathbb{K}$. Đặt $M = (x^2, xy, y^2)R$. Khi đó, M là R-môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều 2 và không là R-môđun Buchsbaum. Hơn nữa, $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ và $H^1_{\mathfrak{m}}(M) \simeq R/(x^2, xy, y^2)$. Hệ tham số $x_1 = x, x_2 = y^2$ là một d-dãy mạnh trên M nhưng không là hệ tham số chuẩn tắc của M. Đặt $I = (x, y^2)$. Khi đó

$$P_I(n) = 2\binom{n+2}{2} + 2\binom{n+1}{1}.$$

Do đó $e_2(I;M) = 0$ và $e_0(I;M) = e_1(I;M) = 2$. Mặt khác, x^2, y^2 là một hệ tham số chuẩn tắc của M. Đặt $J = (x^2, y^2)$. Khi đó,

$$P_J(n) = 4\binom{n+2}{2} + 3\binom{n+1}{1},$$

với mọi $n \geq 0$. Do đó $e_1(J;M) = 3 > e_1(I;M)$. Như vậy ngay cả khi iđêan tham số sinh bởi một d-dãy mạnh nhưng không sinh bởi một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thì công thức trong Định lý 2.4.1 nói chung là không đúng.

Chương 3

Hàm độ dài của iđêan bão hòa của lũy thừa iđêan

Mục đích của chương này là đưa ra một số điều kiện đủ để hàm $h_I^0(n) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(R/I^{n+1}))$ là một hàm đa thức, nghĩa là, tồn tại đa thức $P_I(n)$ sao cho $h_I^0(n) = P_I(n)$ với mọi $n \gg 0$. Vì $H_{\mathfrak{m}}^0(R/I^n) = \bigcup_{s>0}(I^n :_R \mathfrak{m}^s)/I^n$ nên chúng tôi gọi $h_I^0(n)$ là *hàm độ dài của iđêan bão hòa* của lũy thừa iđêan I. Trong các kết quả chính của chương này, chúng tôi chỉ ra rằng $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức trong hai trường hợp:

(a) I là iđêan chính;

(b) R là không trộn lẫn và I là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R.

Các kết quả trong chương này được viết dựa theo tài liệu [11].

3.1 Trường hợp iđêan chính

Trong tiết này, chúng tôi xét I là một iđêan chính và chỉ ra hàm $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức bằng cách xét mối quan hệ giữa hàm $h_I^0(n)$ với hàm Hilbert của môđun Artin $H_{\mathfrak{m}}^1(R)$. Hơn nữa, chúng tôi chỉ ra rằng hệ số đầu tiên của đa thức tương ứng được tính qua số bội và độ dài các môđun đối đồng điều địa phương. Trước tiên ta nhắc lại một số kết quả về đa thức Hilbert, bội của môđun Artin của các tác giả Kirby [37], N.T. Cường-L.T. Nhàn [24] và Brodmann-Sharp [7].

Mệnh đề 3.1.1. [37, Mệnh đề 2] *Cho A là một R-môđun Artin và I là một iđêan của R. Giả sử môđun $0 :_A I$ có độ dài hữu hạn. Khi đó, với mọi $n \geq 0$, môđun $0 :_A I^{n+1}$ có độ dài hữu hạn. Hơn nữa, tồn tại đa thức $P_{A,I}(n)$ sao cho $P_{A,I}(n) = \ell(0 :_A I^{n+1})$ với mọi $n \gg 0$. Bậc của đa thức $P_{A,I}(n)$ bị chặn trên bởi số phần tử sinh tối thiểu của I.*

Định nghĩa 3.1.2. Hàm $\ell(0 :_A I^{n+1})$ và đa thức $P_{A,I}(n)$ trong Mệnh đề 3.1.1 lần lượt được gọi là *hàm Hilbert* và *đa thức Hilbert* của R-môđun A đối với iđêan I.

Giả sử $P_{A,I}(n)$ có bậc d' và hệ số bậc cao nhất λ. Số $e'(I, A) = d'!\lambda$ được gọi là số bội của môđun Artin A đối với I.

Các tác giả N.T. Cường-L.T. Nhàn đã chỉ ra số bội $e'(I, A)$ có nhiều tính chất tương tự với số bội Hilbert-Samuel của môđun hữu hạn sinh. Một trong các tính chất đó là tính chất cộng tính đối với dãy khớp ngắn.

Bổ đề 3.1.3. [24, Bổ đề 3.2] *Cho dãy khớp ngắn các R-môđun Artin*

$$0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0.$$

Khi đó $e'(I, A) = \delta_{d'd_1} e'(I, A_1) + \delta_{d'd_2} e'(I, A_2)$, trong đó d_i là bậc của đa thức $P_{I,A_i}(n)$ và $\delta_{d'd_i}$ là kí hiệu Kronecker, $i = 1, 2$.

Theo Định lý 1.1.2, các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với giá cực đại luôn là R-môđun Artin. Kết quả tiếp theo của Brodmann-Sharp là một công thức kết hợp cho số bội của môđun Artin. Nhắc lại rằng tập giả giá thứ i của R là

$$\mathrm{Psupp}^i(R) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Đặc biệt,

$$\mathrm{Psupp}^1(R) = \{\mathfrak{m}\} \cup \{\mathfrak{p} : \dim(R/\mathfrak{p}) = 1 \text{ và } H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Đặt $\operatorname{psd}^i(R) = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i(R)\}$.

Mệnh đề 3.1.4. [7, Định lý 2.4] *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó*

$$e'(I; H^i_{\mathfrak{m}}(R)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^i(R) \\ \dim(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{psd}^i(R)}} \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}))e(I, R/\mathfrak{p}).$$

Định lý sau là kết quả chính đầu tiên của mục này.

Định lý 3.1.5. *Cho $I = aR$ là một iđêan chính của vành R. Khi đó, tồn tại đa thức $P_I(n)$ với $\deg(P_I(n)) \leq 1$ sao cho $P_I(n) = h^0_I(n)$ với mọi $n \gg 0$.*

Chứng minh. Do tính Noether của vành R nên tồn tại số nguyên $t > 0$ sao cho $0 :_R a^t = 0 :_R a^{n+t+1}$ với mọi $n \geq 0$. Dãy khớp ngắn các R-môđun

$$0 \longrightarrow R/0 :_R a^t \xrightarrow{*a^{n+t+1}} R \longrightarrow R/a^{n+t+1}R \longrightarrow 0,$$

cảm sinh dãy khớp dài các môđun đối đồng điều địa phương

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t) \xrightarrow{*a^{n+t+1}} H^0_{\mathfrak{m}}(R) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(R/a^{n+t+1}R) \\ \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t) \xrightarrow{\psi_{n+t+1}} H^1_{\mathfrak{m}}(R) \longrightarrow \ldots, \end{aligned}$$

ở đây đồng cấu ψ_{n+t+1} được cảm sinh từ phép nhân a^{n+t+1} trong R. Vì a là phần tử chính quy của $R/0 :_R a^t$ nên $H^0_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t) = 0$. Do đó, ta có

$$h^0_I(n+t) = \ell(\operatorname{Ker} \psi_{n+t+1}) + \ell_R(H^0_{\mathfrak{m}}(R)).$$

Biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd} R/0 :_R a^t \arrow[rr, "*a^{n+t+1}"] \arrow[dr, "*a^{n+1}"'] & & R \\ & R/0 :_R a^t \arrow[ur, "*a^t"'] & \end{tikzcd}$$

cho ta biểu đồ giao hoán các môđun đối đồng điều địa phương

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\mathfrak{m}}(R/0:_R a^t) \arrow[rr, "\psi_{n+t+1}"] \arrow[dr, "*a^{n+1}"'] & & H^1_{\mathfrak{m}}(R). \\
& H^1_{\mathfrak{m}}(R/0:_R a^t) \arrow[ur, "\psi_t"'] &
\end{tikzcd}$$

Từ đó suy ra $\operatorname{Ker}(\psi_{n+t+1}) = \operatorname{Ker}(\psi_t) :_A a^{n+1}$, ở đây $A = H^1_{\mathfrak{m}}(R/0:_R a^t)$ là một R-môđun Artin. Đặt $\bar{A} = A/\operatorname{Ker}(\psi_t)$. Khi đó

$$h^0_I(n+t) = \ell(0:_{\bar{A}} a^{n+1}) + \ell(\operatorname{Ker}\psi_t) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R)),$$

với mọi $n \geq 0$. Vì $\bar{A}$ là môđun Artin, theo Mệnh đề 3.1.1 ta suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Cho I là một iđêan chính và $P_I(n)$ là đa thức thỏa mãn $P_I(n) = h^0_I(n)$ với mọi $n \gg 0$. Theo Định lý 3.1.5 thì $\deg P_I(n) \leq 1$. Do đó nếu $\dim(R) > 1$ thì

$$\lim_n d!\frac{P_I(n)}{n^d} = 0.$$

Vì vậy ϵ-bội của vành có chiều lớn hơn 1 đối với iđêan chính là bằng không. Tuy nhiên nghiên cứu các hệ số khác của $P_I(n)$ là một bài toán thú vị. Ta đặt

$$P_I(n) = ne_0^{sat}(a;R) + e_1^{sat}(a;R),$$

trong đó $I = aR$ và các hệ số $e_0^{sat}(a;R), e_1^{sat}(a;R)$ là các số nguyên. Trong kết quả tiếp theo của tiết này, chúng tôi đưa ra công thức tính hệ số $e_0^{sat}(a;R)$ thông qua số bội và độ dài của các môđun đối đồng điều địa phương.

Bổ đề 3.1.6. *Kí hiệu* $\operatorname{Ass}(R)_1 = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R) : \dim(R/\mathfrak{p}) = 1\}$. *Khi đó, ta có*

$$\operatorname{Ass}(R)_1 = \operatorname{Psupp}^1(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}.$$

Chứng minh. Cho $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố sao cho $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Khi đó, $H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \neq 0$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ là một iđêan nguyên tố liên kết của $R_{\mathfrak{p}}$. Khẳng định này tương đương với $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố liên kết của R. $\square$

Định lý sau là kết quả chính tiếp theo của mục này. Vì chứng minh dùng kết quả trong Mệnh đề 3.1.4 nên ta cần giả thiết R là ảnh đồng cấu của vành Cohen-Macaulay địa phương.

Định lý 3.1.7. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $I = aR$ là một iđêan chính của vành R. Khi đó, ta có*

$$e_0^{sat}(a; R) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)_1 \setminus V(I)} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}))e(a; R/\mathfrak{p}).$$

Chứng minh. Theo chứng minh của Định lý 3.1.5, ta có

$$h^0_I(n+t) = \ell(0 :_{\bar{A}} a^{n+1}) + \ell(\mathrm{Ker}\,\psi_t) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R)),$$

trong đó $A = H^1_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t)$ và $\bar{A} = A/\mathrm{Ker}(\psi_t)$. Theo Mệnh đề 3.1.1 thì

$$e_0^{sat}(a; R) = e'(a; \bar{A}) = e'(a; H^1_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t)/\mathrm{Ker}(\psi_t)),$$

trong đó vế phải là bội của môđun Artin. Vì $\mathrm{Ker}(\psi_t)$ là ảnh của đồng cấu nối $H^0_{\mathfrak{m}}(R/a^tR) \to H^1_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t)$ nên $\mathrm{Ker}(\psi_t)$ là môđun có độ dài hữu hạn. Do đó từ tính chất cộng tính của số bội của môđun Artin (Bổ đề 3.1.3), ta được

$$e_0^{sat}(a; R) = e'(a; H^1_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t)).$$

Mặt khác, công thức bội liên kết cho môđun Artin của Brodmann-Sharp (Mệnh đề 3.1.4) cho ta

$$e'(a, H^1_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^1(R/0:_R a^t) \\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}}} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}/(0 :_R a^t)_{\mathfrak{p}}))e(a; R/\mathfrak{p}).$$

Bây giờ ta tìm hiểu tập $\mathrm{Psupp}^1(R/0 :_R a^t)$. Vì $R/0 :_R a^t \xrightarrow{*a^t} R$ là đơn cấu, ta có

$$\mathrm{Psupp}^1(R/0 :_R a^t) \subseteq \mathrm{Psupp}^1(R).$$

Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^1(R)$ là một iđêan nguyên tố sao cho $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Nếu $a \notin \mathfrak{p}$ thì $(0 :_R a^t)_\mathfrak{p} = 0$ và $R_\mathfrak{p} \simeq (R/0 :_R a^t)_\mathfrak{p}$. Do đó

$$H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) \simeq H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}((R/0 :_R a^t)_\mathfrak{p}).$$

Từ đó suy ra

$$\operatorname{Psupp}^1(R) \setminus V(I) = \operatorname{Psupp}^1(R/0 :_R a^t) \setminus V(I).$$

Mặt khác, nếu $a \in \mathfrak{p}$ thì a là phần tử chính quy của $R/0 :_R a^t$. Suy ra $\frac{a}{1}$ là phần tử chính quy của $(R/0 :_R a^t)_\mathfrak{p}$ nên $H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}((R/0 :_R a^t)_\mathfrak{p}) = 0$. Do đó

$$\operatorname{Psupp}^1(R/0 :_R a^t) \setminus V(I) = \operatorname{Psupp}^1(R/0 :_R a^t) \setminus \{\mathfrak{m}\}.$$

Kết hợp với các kết quả ở trên, ta được

$$\begin{aligned}
e_0^{sat}(a; R) &= \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^1(R/0:_R a^t) \\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}}} \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/(0 :_R a^t)_\mathfrak{p}))e(a; R/\mathfrak{p}) \\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^1(R/0:_R a^t) \\ \mathfrak{p} \notin V(I)}} \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/(0 :_R a^t)_\mathfrak{p}))e(a; R/\mathfrak{p}) \\
&= \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Psupp}^1(R) \setminus V(I)} \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}))e(a; R/\mathfrak{p}) \\
&= \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)_1 \setminus V(I)} \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}))e(a; R/\mathfrak{p}),
\end{aligned}$$

trong đó đẳng thức cuối cùng được suy ra từ Bổ đề 3.1.6. □

Chú ý 3.1.8. Từ Định lý 3.1.7 ta thấy rằng đa thức $P_I(n)$ có bậc 1 nếu và chỉ nếu $\operatorname{Ass}(R)_1 \setminus V(I) \neq \emptyset$. Khẳng định này tương đương với a là một phần tử nằm trong một iđêan nguyên tố liên kết $\mathfrak{p}$ với $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$.

Tiếp theo, chúng tôi xét hai trường hợp đặc biệt: $\operatorname{Ass}(R)_1 \setminus V(I) = \emptyset$ và $\operatorname{Ass}(R)_1 \setminus V(I) = \operatorname{Ass}(R)_1$. Từ Định lý 3.1.7 ta có một số hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.9. *Cho $a \in \mathfrak{m}, I = aR$ và $t > 0$ là một số nguyên dương sao cho $0 :_R a^{n+t+1} = 0 :_R a^t$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(i) Nếu a là một phần tử lọc chính quy của R, nghĩa là $a \notin \mathfrak{p}$ với mọi iđêan nguyên tố liên kết $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ thì

$$e_0^{sat}(a; R) = e'(I; H^1_{\mathfrak{m}}(R)).$$

(ii) Phần tử $a \in \sqrt{\mathrm{Ann}(H^1_{\mathfrak{m}}(R))}$ nếu và chỉ nếu $e_0^{sat}(a; R) = 0$. Trong trường hợp này,

$$P_I(n) = \ell(H^1_{\mathfrak{m}}(R/0 :_R a^t)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R))$$

là một hằng số.

Chứng minh. (i) Vì a là phần tử lọc chính quy của R nên $0 :_{H^1_{\mathfrak{m}}(R)} a$ là môđun có độ dài hữu hạn. Do đó $e'(I; H^1_{\mathfrak{m}}(R))$ là xác định.

Mặt khác, vì a là phần tử lọc chính quy của R nên $a \notin \mathfrak{p}$ với mọi iđêan nguyên tố liên kết $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Vì thế $\mathrm{Ass}(R)_1 \setminus V(I) = \mathrm{Ass}(R)_1$. Từ Định lý 3.1.7 và công thức bội liên kết ta có

$$e_0^{sat}(a; R) = e'(I; H^1_{\mathfrak{m}}(R)).$$

(ii) Theo Định lý 3.1.7, hệ số cao nhất $e_0^{sat}(a; R)$ là triệt tiêu khi và chỉ khi $\mathrm{Ass}(R)_1 \subseteq V(I)$. Không mất tổng quát, ta có thể xét $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)_1$. Khi đó từ đơn cấu $\psi : R/\mathfrak{p} \hookrightarrow R$ cảm sinh dãy khớp các môđun đối đồng điều địa phương

$$H^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Coker}\psi) \to H^1_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{p}) \to H^1_{\mathfrak{m}}(R).$$

Vì a nằm trong căn của iđêan $\mathrm{Ann}(H^1_{\mathfrak{m}}(R))$ nên từ dãy khớp trên suy ra $a^s H^1(R/\mathfrak{p}) = 0$ với $s \gg 0$. Điều này dẫn đến $a \in \mathfrak{p}$ vì $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Do đó $\mathrm{Ass}(R)_1 \subseteq V(I)$.

Ngược lại, giả sử $\mathrm{Ass}(R)_1 \subseteq V(I)$. Vì R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên từ [7, Mệnh đề 2.5], ta có

$$V(\mathrm{Ann}(H^1_{\mathfrak{m}}(R))) = \bigcup_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(R)\\ \dim(R/\mathfrak{p})\leq 1}} V(\mathfrak{p}) \subseteq V(I).$$

Vì thế $I \subseteq \sqrt{\mathrm{Ann}(H^1_{\mathfrak{m}}(R))}$. □

Trong kết quả cuối cùng của tiết này chúng tôi chỉ ra rằng nếu R là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein địa phương $(S, \mathfrak{n})$ thì $e_0^{sat}(a; R)$ chính là bội của môđun khuyết thiếu $K^1(R) = \mathrm{Ext}_S^{r-1}(R, S)$, trong đó $r = \dim(S)$. Chú ý rằng $K^1(R)$ là một R-môđun hữu hạn sinh và đối ngẫu với môđun $H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ theo định lý đối ngẫu địa phương.

Hệ quả 3.1.10. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein địa phương và $I = aR$ là một iđêan chính. Khi đó*

$$e_0^{sat}(a; R) = e(a; K^1(R)).$$

Chứng minh. Từ [7, Mệnh đề 1.2], ta có $\mathrm{Psupp}^1(R) = \mathrm{Supp}(K^1(R))$ là một tập con đóng của $\mathrm{Spec}(R)$ có chiều nhỏ hơn hoặc bằng 1. Xét

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^1(R)_1 = \mathrm{Supp}(K^1(R))_1 = \mathrm{Ass}(K^1(R))_1.$$

Khi đó $\ell_{R_{\mathfrak{p}}}(H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}})) = \ell_{R_{\mathfrak{p}}}(K^1(R)_{\mathfrak{p}})$. Do đó theo Định lý 3.1.7 ta có điều cần chứng minh. □

3.2 Trường hợp iđêan sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc

Trong tiết này, chúng tôi xét các iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số và nghiên cứu khi nào hàm $h^0_I(n)$ là một hàm đa thức. Đầu tiên, chúng tôi xét iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi trong Vấn đề 2. Trước tiên ta có kết quả kỹ thuật sau.

Mệnh đề 3.2.1. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Với $0 \leq i < j \leq d$, cho I là iđêan sinh bởi các phần tử $x_{i+1}, \ldots, x_j$. Khi đó $x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}^2, \ldots, x_d^2$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $M/I^{n+1}M$, với mọi số nguyên $n \geq 0$.*

Chứng minh. Cho $n_1, \ldots, n_d$ là các số nguyên dương. Theo Mệnh đề 2.1.2, $x_{i+1}, \ldots, x_j$ là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của

$$M_1 = M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}, x_{j+1}^{n_{j+1}}, \ldots, x_d^{n_d})M.$$

Do đó $x_{i+1}, \ldots, x_j$ là d-dãy mạnh của M_1. Theo Định lý 1.3.2, ta có

$$\ell(M_1/I^{n+1}M_1) = \sum_{t=0}^{j-i} f_{j-i-t}(I; M_1)\binom{n+t}{t},$$

trong đó $f_{j-i}(I; M_1) = h^0(M_1)$. Hơn nữa, với $t > 0$ thì

$$\begin{aligned} f_{j-i-t}(I; M_1) &= h^0(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+t+1}, x_{j+1}^{n_{j+1}}, \ldots, x_d^{n_d})M) \\ &\quad - h^0(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+t}, x_{j+1}^{n_{j+1}}, \ldots, x_d^{n_d})M). \end{aligned}$$

Kí hiệu $M_2 = M/(x_{j+1}^{n_{j+1}}, \ldots, x_d^{n_d})M$. Theo Hệ quả 2.3.4, ta có

$$\begin{aligned} h^0(M/(x_1^{n_1}, \ldots, &x_i^{n_i}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+t}, x_{j+1}^{n_{j+1}}, \ldots, x_d^{n_d})M) \\ &= h^0(M_2/((x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+t})M_2) \\ &= \sum_{v=0}^{i} n_1 \ldots n_v e(x_1, \ldots, x_v; (0 : x_{v+1})_{M_2/(x_{v+2}, \ldots, x_{i+t})M_2}) \\ &\quad + n_1 \ldots n_i \sum_{v=i+1}^{i+t} e(x_1, \ldots, x_v; (0 : x_{v+1})_{M_2/(x_{v+2}, \ldots, x_{i+t})M_2}). \end{aligned}$$

Như vậy hàm này không phụ thuộc vào $n_{j+1}, \ldots, n_d \geq 2$ bởi Mệnh đề 2.2.2.

Mặt khác, sử dụng công thức Lech và định nghĩa của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc ta có

$$\begin{aligned}
f_0(I; M_1) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^{j-i}}\ell(M_1/(x_{i+1}^m, \ldots, x_j^m)M_1) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^{j-i}}\ell(M/(x_1^{n_1}, ..., x_i^{n_i}, x_{i+1}^m, ..., x_j^m, x_{j+1}^{n_{j+1}}, ..., x_d^{n_d})M) \\
&= n_1 \ldots n_i \sum_{v=j}^{d} n_{j+1} \ldots n_v e(x_1, \ldots, x_v; (0 : x_{v+1})_{M/(x_{v+2}, \ldots, x_d)M}).
\end{aligned}$$

Thay $n_{j+1}, \ldots, n_d$ bởi $2n_{j+1}, \ldots, 2n_d$ nếu cần. Khi đó, tồn tại các số nguyên $\lambda_0, \ldots, \lambda_i$, $\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_d$ sao cho

$$\begin{aligned}
\ell\left(\frac{M/I^{n+1}M}{(x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i}, x_{j+1}^{n_{j+1}}, \ldots, x_d^{n_d})M/I^{n+1}M}\right) &= \sum_{v=0}^{i} n_1 \ldots n_v \lambda_v \\
&+ n_1 \ldots n_i \sum_{v=j+1}^{d} n_{j+1} \ldots n_v \lambda_v,
\end{aligned}$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d \geq 1$. Vì vậy, $x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}^2, \ldots, x_d^2$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $M/I^{n+1}M$ với mọi $n \geq 0$. □

Nếu R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng thì các khái niệm hệ tham số hầu p-chuẩn tắc và hệ tham số chuẩn tắc là trùng nhau. Từ Mệnh đề 3.2.1 ta có hệ quả sau.

Hệ quả 3.2.2. *Giả sử R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng địa phương. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số chuẩn tắc của R. Với $0 < i < d$, đặt $I = (x_1, \ldots, x_i)$. Khi đó R/I^{n+1} là vành Cohen-Macaulay suy rộng và $x_{i+1}, \ldots, x_d$ là một hệ tham số chuẩn tắc của R/I^{n+1}, với mọi $n \geq 0$.*

Đặc biệt, nếu R là một vành Cohen-Macaulay địa phương thì R/I^n là vành Cohen-Macaulay và $h_I^0(n) = 0$.

Lưu ý rằng tính Cohen-Macaulay suy rộng của R/I^{n+1} được chứng minh đầu tiên bởi các tác giả C.H. Linh-N.V. Trung [39, Định lý 1.2].

Bổ đề tiếp theo đóng vai trò quan trọng trong chứng minh của kết quả chính của tiết này.

Bổ đề 3.2.3. *Cho $x_1, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R. Với $0 \le i \le j \le d$, gọi I là iđêan sinh bởi dãy $x_{i+1}, \dots, x_j$ (nếu $i = j$ ta đặt $I = (0)$). Cho $t \in \{1, \dots, i\} \cup \{j+1, \dots, d\}$. Khi đó*

$$I^{n+1} :_R x_t = I^n(I :_R x_t) + 0 :_R x_t.$$

Chứng minh. Khẳng định của bổ đề được chứng minh bằng quy nạp theo $j - i$. Khẳng định là đúng nếu $n = 0$ hoặc $j - i = 0$. Giả sử $j - i > 0$. Khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$I^{n+1} :_R x_t \subseteq I(I^n :_R x_t) + 0 :_R x_t,$$

với mọi $n > 0$. Ta có

$$I^{n+1} = x_{i+1}^2 I^{n-1} + x_{i+1} J^n + J^{n+1},$$

trong đó $J = (x_{i+2}, \dots, x_j)$. Cho $a \in I^{n+1} :_R x_t$ là một phần tử tùy ý thì tồn tại $a_1 \in I^{n-1}$, $a_2 \in J^n$ và $a_3 \in J^{n+1}$ sao cho

$$x_t a = x_{i+1}^2 a_1 + x_{i+1} a_2 + a_3.$$

Suy ra

$$a_1 \in (x_t, J^n) :_R x_{i+1}^2.$$

Lưu ý rằng $x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M/x_tM bởi Mệnh đề 2.1.2 (iv). Mặt khác, theo Mệnh đề 3.2.1, dãy $x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{j+1}^2, \dots, x_d^2$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $R/(x_t, J^n)$. Từ tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc ta có

$$a_1 \in (x_t, J^n) :_R x_{i+1}^2 = (x_t, J^n) :_R x_{i+1}.$$

Khi đó, tồn tại $b_2 \in J^n$ sao cho $x_{i+1} a_1 = x_t b + b_2$. Trong trường hợp này, $b \in (x_{i+1} I^{n-1} + J^n) :_R x_t = I^n :_R x_t$ vì $a_1 \in I^{n-1}$. Suy ra

$$x_t(a - x_{i+1} b) = x_{i+1} a_2' + a_3,$$

trong đó $a'_2 = a_2 + b_2 \in J^n$. Lưu ý rằng $x_{i+1}b \in I(I^n :_R x_t)$. Do đó ta chỉ cần chỉ ra $a - x_{i+1}b \in I(I^n :_R x_t) + 0 :_R x_t$. Nói cách khác, không mất tổng quát chúng ta có thể giả sử $a_1 = 0$, nghĩa là

$$x_t a = x_{i+1}a_2 + a_3.$$

Rõ ràng $a_2 \in [(x_t, J^{n+1}) :_R x_{i+1}] \cap J^n$. Áp dụng quy nạp cho vành R/x_tR và iđêan $J = (x_{i+2}, \ldots, x_j)$ ta có

$$(x_t, J^{n+1}) :_R x_{i+1} = J^n((x_t, J) :_R x_{i+1}) + x_tR :_R x_{i+1}.$$

Suy ra

$$a_2 \in [(x_t, J^{n+1}) :_R x_{i+1}] \cap J^n = J^n((x_t, J) :_R x_{i+1}) + (x_tR :_R x_{i+1}) \cap J^n.$$

Khi đó, tồn tại $\lambda_k \in J^n$, $u_k \in (x_t, J) :_R x_{i+1}$ và $u \in (x_tR :_R x_{i+1}) \cap J^n$ sao cho

$$a_2 = \sum_k \lambda_k u_k + u.$$

Mặt khác $x_{i+1}u_k = x_t v_k + w_k$ với $w_k \in J$ và $v_k \in (x_{i+1}, J) : x_t = I :_R x_t$. Vì thế

$$x_{i+1}a_2 = x_t \sum_k \lambda_k v_k + \sum_k \lambda_k w_k + x_{i+1}u.$$

Đặt $v = \sum_k \lambda_k v_k \in J^n(I :_R x_t)$ và $w = \sum_k \lambda_k w_k \in J^{n+1}$ thì

$$x_t a = x_t v + x_{i+1}u + w + a_3.$$

Vì $x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t+1}, \ldots, x_d$ là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R/x_tR nên ta có $(0 :_{R/x_tR} x_{i+1}) \cap J^n(R/x_tR) = 0$, bởi Mệnh đề 1.2.3 (ii). Khẳng định này tương đương với

$$(x_tR :_R x_{i+1}) \cap (x_t, J^n) = x_tR.$$

Suy ra

$$u \in (x_tR :_R x_{i+1}) \cap J^n = x_tR \cap J^n.$$

Cho $u = x_t u'$, thì $u' \in J^n :_R x_t$. Dẫn đến $x_{i+1}u = x_t x_{i+1} u'$, trong đó

$$x_{i+1}u' \in x_{i+1}(J^n :_R x_t) \subseteq I(I^n :_R x_t).$$

Tóm lại $x_t a = x_{i+1}a_2 + a_3 = x_t v + x_t x_{i+1} u' + (w + a_3)$. Áp dụng quy nạp cho $J = (x_{i+2}, \ldots, x_j)$ ta có

$$a - v - x_{i+1}u' \in J^{n+1} :_R x_t = J(J^n :_R x_t) + 0 :_R x_t.$$

Vì vậy $a \in I(I^n :_R x_t) + 0 :_R x_t$ và

$$I^{n+1} :_R x_t \subseteq I(I^n :_R x_t) + 0 :_R x_t.$$

□

Bổ đề trên cho ta hệ quả sau.

Hệ quả 3.2.4. *Với giả thiết và kí hiệu như trong Bổ đề 3.2.3. Cho $t = 1$ nếu $i \geq 1$ hoặc $t = j + 1$ nếu $i = 0$. Khi đó, với mỗi $n \geq 0$, ta có*

$$\bigcup_{s>0} I^{n+1} :_R \mathfrak{m}^s = I^{n+1} :_R x_t = I^n(I :_R x_t) + 0 :_R x_t.$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.2.1 dãy $x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}^2, \ldots, x_d^2$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R/I^{n+1}. Do đó hệ tham số này là d-dãy trên R/I^{n+1}. Vì thế

$$\bigcup_{s>0} I^{n+1} :_R \mathfrak{m}^s = \begin{cases} I^{n+1} :_R x_1 & \text{nếu } i \geq 1; \\ I^{n+1} :_R x_{j+1}^2 & \text{nếu } i = 0. \end{cases}$$

Theo Bổ đề 3.2.3, ta có

$$\begin{aligned} I^{n+1} :_R x_{j+1}^2 &= I^n(I :_R x_{j+1}^2) + 0 :_R x_{j+1}^2 \\ &= I^n(I :_R x_{j+1}) + 0 :_R x_{j+1} \\ &= I^{n+1} :_R x_{j+1}. \end{aligned}$$

□

Định lý sau đây là kết quả chính của tiết này. Trước tiên với $0 \leq i < j \leq d$, gọi t là số nguyên dương sao cho $t = 1$ nếu $i \geq 1$ và $t = j + 1$ nếu $i = 0$. Đặt $I_n = I^n :_R x_t$. Với $n = 1$ thì $I_1 = I :_R x_t$.

Định lý 3.2.5. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương và R là không trộn lẫn. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R. Với $0 \leq i < j \leq d$, cho I là iđêan sinh bởi $x_{i+1}, \ldots, x_j$. Khi đó, tồn tại đa thức $P_I(n)$ sao cho $h_I^0(n) = P_I(n)$ với mọi $n \gg 0$. Hơn nữa, $\deg(P_I(n)) + 1$ là chiều của môđun phân bậc $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I_1^n/I^n$ trên đại số Rees $\mathcal{R}(I)$.*

Chứng minh. Theo giả thiết R là *không trộn lẫn*, nghĩa là, $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R)$ với mọi iđêan nguyên tố liên kết $\mathfrak{p}$ của R, nên x_t là phần tử chính quy của R. Suy ra $I_1^2 = I_2$ và I là một rút gọn của I_1. Hơn nữa, từ Bổ đề 3.2.3, ta có $I_n I_m = I_{n+m}$ với mọi $n, m > 0$. Do đó, theo Hệ quả 3.2.4, ta có $I_n = I_1^n$ với mọi $n \geq 0$ và

$$h_I^0(n) = \ell(I_1^{n+1}/I^{n+1}).$$

Vì vậy $h_I^0(n)$ là hàm Rees của cặp iđêan (I, I_1). Theo Định lý 1.3.3 và Bổ đề 1.3.4 ta có điều cần chứng minh. □

Chú ý 3.2.6. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R. Với $0 \leq i < j \leq d$, cho I là iđêan sinh bởi $x_{i+1}, \ldots, x_j$. Giả sử $\mathrm{Ass}(R) \subseteq \mathrm{Assh}(R) \cup \{\mathfrak{m}\}$, trong đó $\mathrm{Assh}(R) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(R) : \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R)\}$. Khi đó, ta có $0 :_R x_t = H_{\mathfrak{m}}^0(R)$ với mọi $t \geq 1$. Đặt $R_1 = R/H_{\mathfrak{m}}^0(R)$ và $I_1 = IR_1$. Lưu ý rằng ảnh của hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ trong R_1 cũng là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của R_1. Vì R_1 là không trộn lẫn và $h_{I,R}^0(n) = h_{I_1,R_1}^0(n) + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(R))$, với mọi $n \geq 1$ nên $h_{I,R}^0(n)$ là một đa thức. Chúng tôi cho rằng $h_{I,R}^0(n)$ là đa thức trong trường hợp vành bất kỳ. Tuy nhiên, việc chứng minh khẳng định đó có thể rất phức tạp.

Tương tự như trong trường hợp iđêan chính, một câu hỏi là tính các hệ số của đa thức $P_I(n)$ trong Định lý 3.2.5 như thế nào? Để tính các hệ số của đa thức này, chúng tôi phải hạn chế xuống trường hợp đặc biệt hơn. Cụ thể, chúng tôi xét R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng và iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số chuẩn tắc. Khi đó, chúng tôi đưa ra công thức tính cho các hệ số của đa thức Hilbert bão hòa thông qua độ dài các môđun đối đồng điều địa phương. Trước tiên ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.7. *Cho R là vành Cohen-Macaulay suy rộng địa phương và $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số chuẩn tắc của R. Với $0 \leq i \leq d$, đặt $I = (x_1, \ldots, x_i)$. Khi đó*

$$I^{n+1} :_R x_1 = I^n + 0 :_R x_1,$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $I^{n+1} :_R x_1 \subseteq I^n + 0 :_R x_1$. Ta có $I^{n+1} = x_1 I^n + J^{n+1}$ trong đó $J = (x_2, \ldots, x_i)$. Cho $a \in R$ sao cho $ax_1 \in I^{n+1}$ thì $ax_1 = x_1 b + c$ với $b \in I^n$, $c \in J^{n+1}$. Suy ra $a - b \in J^{n+1} :_R x_1$. Áp dụng Bổ đề 3.2.3, ta được

$$a - b \in J^n + 0 :_R x_1.$$

Do đó $a \in I^n + 0 :_R x_1$. □

Định lý 3.2.8. *Giả sử R là vành Cohen-Macaulay suy rộng, địa phương. Cho I là iđêan của R sinh bởi một phần hệ tham số chuẩn tắc của R gồm i phần tử, $i < d$. Khi đó*

$$h_I^0(n) = h^0(R) + \sum_{t=0}^{i-1} \Big(\sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} h^{j+1}(R) \Big) \binom{n+t}{t},$$

với mọi $n \geq 0$. Ở đây $h^j(R) = \ell(H^j_{\mathfrak{m}}(R))$. Đặc biệt, $h_I^0(n) = 0$ nếu $i < \operatorname{depth}(R)$ và $\deg(h_I^0(n)) = i - 1$ nếu $\operatorname{depth}(R) \leq i < d$.

Chứng minh. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số chuẩn tắc của R và gọi I là iđêan sinh bởi $x_1, \ldots, x_i$. Kí hiệu $R_1 = R/x_1R$ và $I_1 = (x_2, \ldots, x_i)R_1$. Khi đó, vành R_1 cũng là Cohen-Macaulay suy rộng. Kí hiệu $h^j(R) = \ell(H^j_{\mathfrak{m}}(R))$ với $j \neq \dim(R)$ và $h^0_{I,R}(n) := h^0_I(n) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+1}))$. Trước tiên ta chứng minh khẳng định sau

$$h^0_{I,R}(n) - h^0_{I,R}(n-1) = h^0_{I_1,R_1}(n) - h^0(R) - h^1(R),$$

với mọi $n \geq 1$.

Thật vậy, ánh xạ $R/I^{n+1} \xrightarrow{x_1} R/I^{n+1}$ cảm sinh dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow R/(I^n + 0 :_R x_1) \xrightarrow{x_1} R/I^{n+1} \longrightarrow R_1/I_1^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R/(I^n + 0 : x_1) & \xrightarrow{x_1} & R/I^{n+1} & \longrightarrow & R_1/I_1^{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle x_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle x_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle x_{i+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & R/(I^n + 0 : x_1) & \xrightarrow{x_1} & R/I^{n+1} & \longrightarrow & R_1/I_1^{n+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

cho ta dãy khớp

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow ((I^n + 0 : x_1) : x_{i+1})/(I^n + 0 : x_1) &\longrightarrow (I^{n+1} : x_{i+1})/I^{n+1} \\
&\longrightarrow (I_1^{n+1}R_1 : x_{i+1})/I_1^{n+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

trong đó f là đồng cấu nhân

$$R/(x_{i+1}R + I^n + 0 : x_1) \xrightarrow{x_1} R/(x_{i+1}R + I^{n+1}).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\ell((I^{n+1} : x_{i+1})/I^{n+1}) &= \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+1})), \\
\ell((I_1^{n+1}R_1 : x_{i+1})/I_1^{n+1}) &= \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R_1/I_1^{n+1})), \\
\ell(((I^n + 0 : x_1) : x_{i+1})/(I^n + 0 : x_1)) &= \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n + 0 : x_1)) \\
&= \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n)) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R)),
\end{aligned}$$

trong đó $H^0_{\mathfrak{m}}(R) = 0 :_R x_1$. Hơn nữa,

$$(x_{i+1}R + I^{n+1}) : x_1 = I^n + x_{i+1}R : x_1.$$

Áp dụng Hệ quả 3.2.7 cho vành $R/x_{i+1}R$ và dãy $x_1, \ldots, x_i$, suy ra

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= ((x_{i+1}R + I^{n+1}) : x_1)/(x_{i+1}R + I^n + 0 :_R x_1)\\ &\simeq (I^n + x_{i+1}R : x_1)/(I^n + x_{i+1}R + 0 :_R x_1)\\ &\simeq x_{i+1}R : x_1/(x_{i+1}R + 0 :_R x_1)\\ &\simeq H^0_{\mathfrak{m}}(R/(x_{i+1}R + 0 :_R x_1)).\end{aligned}$$

Do đó $\ell(\mathrm{Ker}(f)) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R/x_{i+1}R)) - \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(R)) = \ell(H^1_{\mathfrak{m}}(R))$. Vì thế

$$h^0_{I,R}(n) - h^0_{I,R}(n-1) = h^0_{I_1,R_1}(n) - h^0(R) - h^1(R),$$

với mọi $n \geq 1$.

Bây giờ ta chứng minh khẳng định trong định lý bằng quy nạp theo i. Nếu $i = 1$, thì $h^0_I(n) - h^0_I(n-1) = h^0(R/x_1R) - h^1(R) - h^0(R) = 0$. Suy ra

$$h^0_I(n) = h^0_I(n-1) = h^0_I(0) = h^0(R) + h^1(R).$$

Giả sử $i > 1$. Kết hợp với giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}h^0_I(n) - h^0_I(n-1) =& h^0(R/x_1R) - h^0(R) - h^1(R)\\ &+ \sum_{t=0}^{i-2}\Big(\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}h^{j+1}(R/x_1R)\Big)\binom{n+t}{t}.\end{aligned}$$

Vì R là một vành Cohen-Macaulay suy rộng nên

$$h^j(R/x_1R) = h^j(R) + h^{j+1}(R).$$

Do đó

$$h^0_I(n) = h^0(R) + \sum_{t=0}^{i-1}\Big(\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}h^{j+1}(R)\Big)\binom{n+t}{t}.$$

$\square$

Chú ý 3.2.9. Gần đây các tác giả Đ.H. Long-Montano [40] nghiên cứu một số bài toán đối với các hàm $h_I^i(n) = \ell(H_\mathfrak{m}^i(R/I^{n+1}))$ trong trường hợp các hàm này xác định. Gợi ý bởi các nghiên cứu này, ta có thể đặt ra vấn đề mở rộng các kết quả của chương này cho các hàm $h_I^i(n), i \geq 1$.

Trong trường hợp tổng quát mà iđêan I sinh bởi một phần hệ tham số bất kỳ, chúng tôi hi vọng khẳng định của Định lý 3.2.5 là đúng. Tuy nhiên, ví dụ sau đây chỉ ra Định lý 3.2.5 không thể mở rộng cho trường hợp tổng quát như vậy.

Ví dụ 3.2.10. Theo Cutkosky, Ha, Srinivasan và Theodorescu [28, Định lý 2.2], tồn tại một vành chính quy $(A, \mathfrak{n})$ có chiều 4 và một iđêan I sao cho $h_I^0(n)$ không là một đa thức với $n \gg 0$. Chọn một hệ sinh của I là $a_1, ..., a_r$. Cho $S = A[T_1, ..., T_r]_{(T_1,...,T_r)+\mathfrak{n}}$ thì $\dim(S) = \dim(A) + r$. Đặt $J = (T_1 + a_1, ..., T_r + a_r)$. Khi đó, $S/J \cong A$. Do đó J là iđêan sinh bởi một phần hệ tham số của S. Vì S là chính quy nên S/J^n là Cohen-Macaulay với mọi n.

Xét A là S-môđun thì $\mathrm{Ann}_S(A) = (T_1, ..., T_r)$. Do đó $A/J^nA = A/I^n$. Đặt $\mathfrak{n}' = (T_1, ..., T_r) + \mathfrak{n}S$ thì $H_{\mathfrak{n}'}^0(S/J^n) = 0$ và $H_{\mathfrak{n}'}^0(A/J^nA) \cong H_\mathfrak{n}^0(A/I^n)$.

Cho $R = S \ltimes A$ là vành iđêan hóa. Đặt $\mathfrak{q} = ((T_1 + a_1, 0), \ldots, (T_r + a_r, 0))$. Lưu ý rằng, $\mathfrak{q}$ là iđêan trong vành địa phương R sinh bởi một phần hệ tham số và

$$R/\mathfrak{q}^n \simeq S/J^n \ltimes A/I^n,$$

với mọi n. Gọi $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại của R. Khi đó,

$$\ell(H_\mathfrak{m}^0(R/\mathfrak{q}^n)) = \ell(H_\mathfrak{n}^0(A/I^n)),$$

không là đa thức theo n.

Chương 4

Một họ các bậc đối đồng điều

Trong các bất biến bằng số của một R-môđun hữu hạn sinh M thì số bội (hay bậc) $e(M)$ nằm trong những bất biến quan trọng nhất. Nếu M là Cohen-Macaulay thì nhiều bất biến khác của M có chặn trên hoặc dưới là những hàm theo số bội. Tuy nhiên, trong trường hợp môđun M không là Cohen-Macaulay thì số bội thường là không đủ để chặn các bất biến đó. Để khắc phục điều này, Doering-Gunston-Vasconcelos (xem [29]) đưa ra khái niệm *bậc đối đồng điều* (cũng gọi là bậc mở rộng) và sử dụng bậc đối đồng điều để chặn trên các bất biến quan trọng của môđun như số phần tử sinh tối thiểu, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, số Betti, số Bass...(xem [29, 51, 53]). Hai ví dụ đầu tiên về bậc đối đồng điều là hdeg do Vasconcelos đưa ra [51] và bdeg do Gunston đưa ra [32] từ năm 1998. Gần đây N.T. Cường-P.H. Quý [26] đưa ra ví dụ thứ ba là bậc không trộn lẫn udeg. Trong chương này chúng tôi sử dụng bội của các môđun $\overline{U}_M^{ij}$ và các tính chất của hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thu được trong Chương 2 để xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều mới. Chúng tôi cũng so sánh các bậc đối đồng điều này với bậc đồng điều hdeg trong một số trường hợp đặc biệt.

Các kết quả trong chương này được viết dựa theo tài liệu [12].

4.1 Bậc đối đồng điều trên vành địa phương

Kí hiệu Mod_R là phạm trù các môđun hữu hạn sinh trên vành R. Ta nhắc lại định nghĩa "khái niệm tổng quát" của Doering, Gunston và Vasconcelos ([29], [53]).

Định nghĩa 4.1.1. Một *khái niệm tổng quát* (notion of genericity) trên Mod_R là một ánh xạ

$$\mathrm{U} : \mathrm{Mod}_R \to \{\text{tập con không rỗng của } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\},$$

thỏa mãn các điều kiện sau với mỗi $M \in \mathrm{Mod}_R$:

(i) Nếu $h - g \in \mathfrak{m}^2$ thì $h \in \mathrm{U}(M)$ khi và chỉ khi $g \in \mathrm{U}(M)$;

(ii) Ảnh của tập $\mathrm{U}(M)$ chứa một tập con mở không rỗng trong k-không gian affin $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ đối với tôpô Zariski;

(iii) Nếu $\operatorname{depth}(M) > 0$ và $h \in \mathrm{U}(M)$ thì h là một phần tử M-chính quy.

Cố định một khái niệm tổng quát $\mathrm{U}(-)$. Khi đó với mỗi $M \in \mathrm{Mod}_R$, phần tử $h \in \mathrm{U}(M)$ được gọi là một *phần tử tổng quát* đối với M.

Định nghĩa 4.1.2. Một *bậc đối đồng điều* (hoặc bậc mở rộng) là một hàm

$$\mathrm{Deg} : \mathrm{Mod}_R \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

thỏa mãn các điều kiện sau với mỗi môđun $M \in \mathrm{Mod}_R$:

(i) $\mathrm{Deg}(M) = \mathrm{Deg}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$;

(ii) Có một khái niệm tổng quát U sao cho nếu $\operatorname{depth}(M) > 0$ và $h \in \mathrm{U}(M)$ thì

$$\mathrm{Deg}(M) \geq \mathrm{Deg}(M/hM);$$

(iii) Nếu M là một R-môđun Cohen-Macaulay thì $\mathrm{Deg}(M) = e(M)$ là số bội của môđun M (đối với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$).

Trong Định nghĩa 4.1.2, điều kiện (ii) được gọi là quy tắc Bertini và điều kiện (iii) được gọi là quy tắc hiệu chuẩn (calibration rule). Với một bậc đối đồng điều Deg, ta luôn có $\mathrm{Deg}(M) \geq e(M)$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là Cohen-Macaulay.

Chú ý 4.1.3. Cho Deg là một bậc đối đồng điều trên R và M là một R-môđun hữu hạn sinh có chiều d.

(i) Nếu $d = 0$ thì M là Cohen-Macaulay, do đó $\mathrm{Deg}(M) = e(M)$.

(ii) Nếu $d = 1$ thì ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Deg}(M) &= \mathrm{Deg}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))\\ &= e(M) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).\end{aligned}$$

Đẳng thức thứ hai do $M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là Cohen-Macaulay, dẫn đến

$$\mathrm{Deg}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = e(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = e(M).$$

Như vậy nếu $\dim(R) \leq 1$ thì bậc đối đồng điều là duy nhất.

Ví dụ đầu tiên về bậc đối đồng điều là bậc đồng điều hdeg được Vasconcelos [51] đưa ra vào năm 1998.

Định nghĩa 4.1.4. Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein địa phương S với $\dim(S) = r$. *Bậc đồng điều* của một R-môđun M có chiều $\dim(M) = d$, kí hiệu $\mathrm{hdeg}(M)$, được định nghĩa bằng quy nạp theo chiều như sau

$$\mathrm{hdeg}(M) = \begin{cases} \ell(M), & \text{nếu } d = 0,\\ e(M) + \sum\limits_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \mathrm{hdeg}(\mathrm{Ext}_S^{r-d+1+i}(M,S)), & \text{nếu } d > 0.\end{cases}$$

Ta có $\dim \mathrm{Ext}_S^{r-d+1+i}(M,S) \leq d - i - 1 < d$ với mọi $0 \leq i < d$. Do đó giả thiết quy nạp trong định nghĩa trên luôn thoả mãn.

Chú ý 4.1.5. (i) Nếu $r = d$ thì

$$\operatorname{hdeg}(M) = e(M) + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \operatorname{hdeg}(\operatorname{Ext}_S^{j+1}(M, S)).$$

(ii) Giả sử R là một vành đầy đủ. Kí hiệu $E = E_R(k)$ là bao nội xạ của k. Khi đó theo Định lý Đối ngẫu địa phương (Định lý 1.1.4), ta có

$$\operatorname{hdeg}(M) = e(M) + \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \operatorname{hdeg}(\operatorname{Ext}_S^{r-d+j+1}(H_{\mathfrak{m}}^d(M), E)).$$

(iii) Nếu M là một R-môđun Cohen-Macaulay suy rộng thì theo Định lý Đối ngẫu địa phương (Định lý 1.1.4), $\ell(\operatorname{Ext}_S^{r-i}(M, S)) = \ell(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$, với mọi $i = 0, \ldots, d-1$. Do đó

$$\operatorname{hdeg}(M) = e(M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = e(M) + \mathrm{I}(M).$$

(iv) Đặc biệt, Vasconcelos [51, Định lý 2.13] chứng minh rằng hdeg là một bậc đối đồng điều.

Ví dụ thứ hai về bậc đối đồng điều được Gunston [32] đưa ra trong luận án tiến sỹ của mình cũng vào năm 1998.

Định nghĩa 4.1.6. Đặt $\operatorname{bdeg}(M) = \inf\{\operatorname{Deg}(M)\}$ trong đó Deg chạy khắp tất cả các bậc đối đồng điều của môđun trên R.

Các tính chất cơ bản của bdeg được Gunston nghiên cứu trong [32], trong đó tác giả chứng minh rằng bdeg cũng là một bậc đối đồng điều.

Gần đây hai tác giả N.T. Cường và P.H. Quý [26] đưa ra khái niệm bậc không trộn lẫn. Trước hết, với N là một R-môđun hữu hạn sinh và i là một số nguyên không âm thỏa mãn $i \geq \dim(N)$, kí hiệu $e(N)_i = e(N)$ nếu $\dim(N) = i$ và $e(N)_i = 0$ nếu $\dim(N) \neq i$.

Định nghĩa 4.1.7. *Bậc không trộn lẫn* của một R-môđun M với chiều $\dim(M) = d$, kí hiệu là $\mathrm{udeg}(M)$, được định nghĩa là

$$\mathrm{udeg}(M) = e(M) + \sum_{i=0}^{d-1} e(U_M^{id})_i.$$

Lưu ý rằng ta luôn có $\dim(U_M^{id}) \leq i$ (xem Chú ý 2.2.5 (ii)). Rõ ràng, nếu M là một R-môđun Cohen-Macaulay thì $U_M^{id} = 0$, với mọi $0 \leq i < d$. Do đó $\mathrm{udeg}(M) = e(M)$. Tổng quát hơn, các tác giả N.T. Cường và P.H. Quý [26, Định lý 5.18] chứng minh rằng udeg cũng là một bậc đối đồng điều.

Nếu M là Cohen-Macaulay thì $\mathrm{udeg}(M) = e(M) = \mathrm{hdeg}(M)$. Có một số ví dụ môđun M sao cho $\mathrm{hdeg}(M) > \mathrm{udeg}(M)$ (xem trong [26, Ví dụ 5.20]). Các tác giả N.T. Cường và P.H. Quý đưa ra giả thuyết: phải chăng $\mathrm{udeg}(M) \leq \mathrm{hdeg}(M)$ với mọi môđun hữu hạn sinh M? Đến thời điểm này đây vẫn là một câu hỏi mở.

4.2 Các cản trở Cohen-Macaulay

Mục đích chính của tiết này là sử dụng các môđun con thương đã xây dựng trong Chương 2 để đặc trưng tính chất Cohen-Macaulay và một số tính chất mở rộng. Để thuận tiện cho việc trình bày, ta quy ước môđun 0 có chiều là -1. Trước hết ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.2.1. *Cho M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Các phát biểu sau là tương đương:*

(i) M là môđun Cohen-Macaulay;

(ii) $U_M^{id} = 0$, với mọi $i = 0, 1, \ldots, d-1$;

(iii) $\dim(U_M^{id}) < i$ với mọi $i = 0, \ldots, d-1$.

Chứng minh. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Vì M là môđun Cohen-Macaulay nên mọi hệ tham số $x_1, \ldots, x_d$ là dãy chính quy của M. Do đó $U_M^{id} = 0$ với mọi

$i = 0, 1, \ldots, d-1$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Khẳng định là hiển nhiên.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Theo Định lý 2.2.7 ta có

$$\ell(M/\underline{x}M) = \sum_{i=0}^{d} e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{id}) = e(x_1, \ldots, x_d; M).$$

Do đó M là môđun Cohen-Macaulay. □

Như vậy họ các môđun U_M^{id}, do đó các môđun $U_M^{i,\Lambda}$ trong Mệnh đề 2.2.2, là một cản trở đối với tính chất Cohen-Macaulay của M. Lưu ý rằng nếu Deg là một bậc đối đồng điều thì $\mathrm{Deg}(M) - e(M)$ cũng là một cản trở cho tính chất Cohen-Macaulay. Do đó có thể dự đoán có những liên hệ qua lại giữa các đối tượng này. Trong tiết sau ta sẽ thấy điều này rõ hơn.

Phát biểu sau đây cho các môđun Cohen-Macaulay suy rộng tương tự như Mệnh đề 4.2.1.

Mệnh đề 4.2.2. *Cho M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Các phát biểu sau là tương đương:*

(i) M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng;

(ii) $\ell(U_M^{id}) < \infty$, với mọi $i = 1 \ldots, d-1$;

(iii) $\dim(U_M^{id}) < i$, với mọi $i = 1, \ldots, d-1$.

Chứng minh. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Do tính Cohen-Macaulay suy rộng của M, mọi hệ tham số hầu p-chuẩn tắc là hệ tham số chuẩn tắc. Hơn nữa, mọi hoán vị của hệ tham số chuẩn tắc cũng là hệ tham số chuẩn tắc nên $U_M^{id} \simeq U_M^{0,d-i}$, với mọi $0 \leq i \leq d$. Ta sẽ chứng minh

$$U_M^{0j} \simeq \bigoplus_{t=0}^{j-1} H_{\mathfrak{m}}^t(M)^{\oplus \binom{j-1}{t}},$$

với $j > 0$.

Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Khi đó, $x_1, \ldots, x_d$ là một d-dãy trên M. Nếu $j = 1$, thì

$$U_M^{01} = 0 :_M x_1^2 = 0 :_M (x_1, \ldots, x_d) = H_{\mathfrak{m}}^0(M).$$

Cho $j > 1$, ta kí hiệu $N = M/x_j^5 M$. Bằng quy nạp theo j, ta có

$$U_M^{0j} \simeq U_N^{0,j-1} \simeq \bigoplus_{t=0}^{j-2} H_{\mathfrak{m}}^t(N)^{\oplus\binom{j-2}{t}}.$$

Sử dụng tính chẻ ra của môđun đối đồng điều địa phương trong [9, Hệ quả 2.8], ta có

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{m}}^t(N) &\simeq H_{\mathfrak{m}}^t(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{t+1}(M/0 :_M x_j^5) \\ &\simeq H_{\mathfrak{m}}^t(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{t+1}(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)) \\ &\simeq H_{\mathfrak{m}}^t(M) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{t+1}(M). \end{aligned}$$

Do đó

$$U_M^{0j} \simeq \bigoplus_{t=0}^{j-1} H_{\mathfrak{m}}^t(M)^{\oplus\binom{j-1}{t}}.$$

Từ đây suy ra $\ell(U_M^{id}) < \infty$, với mọi $i = 0, \ldots, d-1$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Khẳng định là hiển nhiên.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Theo Định lý 2.2.7 ta có

$$\ell(M/\underline{x}M) = \sum_{i=0}^{d} e(x_1, \ldots, x_i; U_M^{id}) = e(x_1, \ldots, x_d; M) + \ell(U_M^{0d}).$$

Do đó M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. □

Từ chứng minh của mệnh đề này, ta có hệ quả sau liên hệ các môđun U_M^{ij} với các môđun đối đồng điều địa phương trong trường hợp môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

Hệ quả 4.2.3. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Ta có*

$$U_M^{i,i+j} \simeq \bigoplus_{t=0}^{j-1} H_{\mathfrak{m}}^t(M)^{\oplus\binom{j-1}{t}},$$

với mọi $0 \leq i < \dim(M)$ và $j > 0$.

Tiếp theo ta tìm hiểu các đặc trưng cho tính chất Cohen-Macaulay dãy và Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Trước tiên ta nhắc lại khái niệm lọc chiều.

Định nghĩa 4.2.4. Một lọc các môđun con của M

$$D_0 \subset D_1 \ldots \subset D_t = M$$

được gọi là *lọc chiều* của M nếu D_{i-1} là môđun con lớn nhất của D_i có chiều nhỏ hơn $\dim(D_i)$, với $i = t, t-1, \ldots, 1$, và $D_0 = H_{\mathfrak{m}}^0(M)$.

Vì R là một vành địa phương Noether nên lọc chiều của M luôn tồn tại và duy nhất. Trong chương này ta thường kí hiệu lọc chiều của M là $D_0 \subset D_1 \ldots \subset D_t = M$, với $\dim(D_i) = d_i, i = 0, \ldots, t$.

Định nghĩa 4.2.5. Môđun M được gọi là Cohen-Macaulay dãy (tương ứng Cohen-Macaulay suy rộng dãy) nếu trong lọc chiều của M, các môđun thương D_i/D_{i-1} là Cohen-Macaulay (tương ứng, Cohen-Macaulay suy rộng) với $i = 1, 2, \ldots, t$.

Khái niệm môđun Cohen-Macaulay dãy được Stanley [45] định nghĩa cho trường hợp phân bậc và Schenzel [44] định nghĩa cho trường hợp địa phương. Sau đó, các tác giả N.T. Cường-L.T. Nhàn [25] mở rộng ra khái niệm môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Đặc trưng tham số của hai lớp môđun này thông qua các dd-dãy được các tác giả N.T. Cường-Đ.T. Cường đưa ra trong [18].

Cho $x_1, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Theo Bổ đề 1.2.5, với mọi $1 \leq i \leq t$, ta có

$$D_i \cap (x_{d_i+1}, \ldots, x_d)M = 0.$$

Do đó tồn tại đồng cấu nhúng tự nhiên $\tau_i : D_i \hookrightarrow U_M^{d_i,d}$, với $i = 1, 2, \ldots, t$ và $d_i = \dim(D_i)$. Khi đó

$$e(x_1, \ldots, x_{d_i}; D_i) = e(x_1, \ldots, x_{d_i}; U_M^{d_i,d})$$

nếu và chỉ nếu $\dim(\mathrm{Coker}(\tau_i)) < d_i$. Từ nhận xét này ta có đặc trưng tính chất Cohen-Macaulay dãy thông qua các ánh xạ τ_i như sau.

Mệnh đề 4.2.6. *Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Các phát biểu sau là tương đương:*

(i) M là môđun Cohen-Maucaulay dãy;

(ii) $U_M^{jd} = 0$ với mọi $j \neq d_0, \ldots, d_{t-1}$ và τ_i là đẳng cấu với mọi $i = 0, \ldots, t-1$;

(iii) $\dim(U_M^{jd}) < j$ với mọi $j \neq d_0, \ldots, d_{t-1}$ và $\dim(\mathrm{Coker}(\tau_i)) < d_i$ với mọi $i = 0, \ldots, t-1$.

Chứng minh. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Nếu M là Cohen-Macaulay dãy thì τ_i là đẳng cấu theo [18, Định lý 3.9 (iii)].

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Khẳng định là hiển nhiên.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Theo giả thiết ta có

$$e(x_1, \ldots, x_j; U_M^{jd}) = 0$$

nếu $j \neq d_0, d_1, \ldots, d_t$, và

$$\begin{aligned} e(x_1, \ldots, x_{d_i}; U_M^{d_i,d}) =& e(x_1, \ldots, x_{d_i}; D_i) + e(x_1, \ldots, x_{d_i}; \mathrm{Coker}(\tau_i)) \\ =& e(x_1, \ldots, x_{d_i}; D_i), \end{aligned}$$

với $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Áp dụng Định lý 2.2.7 suy ra

$$\begin{aligned}\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) &= \sum_{j=0}^{d} n_1 \ldots n_j e(x_1, \ldots, x_j; U_M^{jd}) \\ &= \sum_{i=0}^{t} n_1 \ldots n_{d_i} e(x_1, \ldots, x_{d_i}; D_i)\end{aligned}$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d > 0$. Vì vậy M là Cohen-Macaulay dãy theo [18, Định lý 4.2]. $\square$

Bằng chứng minh tương tự, ta thu được mệnh đề sau cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Mệnh đề 4.2.7. *Cho M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Các phát biểu sau là tương đương:*

(i) M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy;

(ii) $\ell(U_M^{jd}) < \infty$, với $j \neq d_0, \ldots, d_{t-1}$, và $\ell(\mathrm{Coker}(\tau_i)) < \infty$, với $i = 0, \ldots, t-1$;

(iii) $\dim(U_M^{jd}) < j$, với mọi $j \neq d_0, \ldots, d_{t-1}$, và $\dim(\mathrm{Coker}(\tau_i)) < d_i$, với mọi $i = 1, \ldots, t-1$.

Từ các mệnh đề trên, để nhận được các cản trở Cohen-Macaulay bằng số, ta chỉ đơn giản xét các số bội của các môđun U_M^{ij}. Ví dụ ta có hệ quả sau của Mệnh đề 4.2.1.

Hệ quả 4.2.8. *Cho M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d$. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) M là Cohen-Macaulay;

(ii) $e(U_M^{ij})_i = 0$, với mọi $0 \leq i < j \leq d$;

(iii) $e(\overline{U}_M^{ij})_i = 0$, với mọi $0 \leq i < j \leq d$;

(iv) $e(U_M^{id})_i = 0$, với mọi $0 \leq i < d$.

Chứng minh. Rõ ràng $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$ theo Mệnh đề 4.2.1.
$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Theo Hệ quả 2.2.6 với mọi $0 \leq i < d$, ta có phân tích

$$U_M^{id} \simeq \overline{U}_M^{id} \oplus \overline{U}_M^{i,d-1} \oplus \ldots \oplus \overline{U}_M^{i,i+2} \oplus U_M^{i,i+1}.$$

Do đó $e(U_M^{id})_i = 0$, với mọi $0 \leq i < d$.
$(iv) \Longrightarrow (i)$. Chọn một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $x_1, \ldots, x_d$ của M sao cho $U_M^{ij} \simeq (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M}$. Theo giả thiết trong (iv) ta có $\dim(U_M^{ij}) < i$, với mọi $0 \leq i < j \leq d$. Do đó

$$\begin{aligned}\ell(M/(x_1,\ldots,x_d)M) &= e(x_1,\ldots,x_d;M) + \sum_{i=1}^{d-1} e(x_1,\ldots,x_i;U_M^{id})\\ &= e(x_1,\ldots,x_d;M).\end{aligned}$$

Vậy M là môđun Cohen-Macaulay. $\square$

4.3 Một họ vô hạn các bậc đối đồng điều

Cho Deg là một bậc đối đồng điều. Khi đó $\operatorname{Deg}(M) \geq e(M)$ và M là một môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $\operatorname{Deg}(M) = e(M)$. Do đó $\operatorname{Deg}(M) - e(M)$ là một cản trở đối với tính chất Cohen-Macaulay của M. Trong trường hợp M không là Cohen-Macaulay, một số tác giả đã dùng một số các cản trở khác nhau để xây dựng các bậc đối đồng điều như bậc đồng điều của Vasconcelos hay bậc không trộn lẫn udeg của các tác giả N.T. Cường-P.H. Quý. Xuất phát từ cách xây dựng bậc không trộn lẫn udeg, trong tiết này chúng tôi sử dụng các cản trở $e(\overline{U}_M^{ij})_i$ trong tiết trước để xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều.

Trước tiên là một số kết quả đóng vai trò quan trọng trong việc kiểm tra tiêu chuẩn Bertini.

Mệnh đề 4.3.1. *Cho M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Kí hiệu H_M là tập tất cả các phần tử $h \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ sao cho tồn tại $x_2, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ và số nguyên dương $t \gg 0$ thỏa mãn $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số* *hầu p-chuẩn tắc của M. Khi đó tập $(H_M + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$ là một tập mở khác rỗng trong $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ đối với tôpô Zariski.*

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh tập $(H_M + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$ là một tập khác rỗng. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số p-chuẩn tắc của M, nghĩa là $x_i \in \mathfrak{a}(M/(x_{i+1}, \ldots, x_d)M)$, với $i = d, d-1, \ldots, 1$. Vì

$$\dim(M/(x_2, \ldots, x_d)M) = 1$$

nên ta có thể chọn phần tử $h \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ là phần tử tham số của $M/(x_2, \ldots, x_d)M$. Ngoài ra, do $\dim(R/\mathfrak{a}(M/(x_2, \ldots, x_d)M)) = 0$ nên iđêan $\mathfrak{a}(M/(x_2, \ldots, x_d)M)$ là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Do đó tồn tại $t > 0$ sao cho $h^t \in \mathfrak{a}(M/(x_2, \ldots, x_d)M)$, nghĩa là $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Vậy $(H_M + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$ là một tập khác rỗng.

Tiếp theo ta chứng minh tính mở của $(H_M + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$. Cho $h \in H_M$ là một phần tử tùy ý. Khi đó tồn tại $t > 0$ và $x_2, \ldots, x_d$ sao cho $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M. Không mất tổng quát ta có thể giả sử $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số p-chuẩn tắc của M, nghĩa là $x_i \in \mathfrak{a}(M/(x_{i+1}, \ldots, x_d)M), i = 2, \ldots, d$. Gọi $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ là tất cả các iđêan nguyên tố liên kết tối thiểu của $M/(x_2, \ldots, x_d)M$. Đặt

$$U := \{g \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2 : g \notin \cup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i\}.$$

Khi đó $h \in U$ và $U \subseteq H_M$. Thật vậy, với mỗi $g \in U$ tồn tại số nguyên dương $s > 0$ sao cho $g^s \in \mathfrak{a}(M/(x_2, \ldots, x_d)M)$, nghĩa là $g^s, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số p-chuẩn tắc của M. Do đó $g^s, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M, nghĩa là $g \in H_M$. Suy ra $U \subseteq H_M$. Vì vậy $(U + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$ là lân cận mở của $\overline{h}$ trong $(H_M + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$. □

Bổ đề 4.3.2. *Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d và $h \in H_M$ là một phần tử tổng quát. Khi đó tồn tại $x_2, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ sao cho $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M với $t > 0$ nào đó và $x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M/hM.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh khẳng định sau: Cho $x_2, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ và $h \in H_M$ thỏa mãn $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M với $t > 0$ nào đó. Khi đó $x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M/hM.

Thay $h^t, x_2, \ldots, x_d$ bởi $h^{2t}, x_2^2, \ldots, x_d^2$ nếu cần, ta có thể giả sử

$$U_M^{id} \simeq (0 : x_{i+1}^{n_{i+1}})_{M/(x_{i+2}^{n_{i+2}}, \ldots, x_d^{n_d})M},$$

$$U_M^{0d} \simeq (0 : h^t)_{M/(x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d})M},$$

với mọi $i > 0$ và $n_2, \ldots, n_d > 0$. Đặc biệt,

$$(0 : h)_{M/(x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d})M} = (0 : h)_{H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d})M)} \simeq (0 : h)_{U_M^{0d}}.$$

Kí hiệu $N = M/hM$. Theo công thức (1.1) (trang 19) và các đẳng cấu với $n_2, \ldots, n_d > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\ell(N/(x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d})N) = \ell(M/(h, x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d})M) \\
&= e(h, x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d}; M) + e(h, x_2^{n_2}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}}; 0 :_M x_d^{n_d}) + \ldots \\
&\quad + e(h, x_2^{n_2}; (0 : x_3^{n_3})_{M/(x_4^{n_4}, \ldots, x_d^{n_d})M}) \\
&\quad + e(h; (0 : x_2^{n_2})_{M/(x_3^{n_3}, \ldots, x_d^{n_d})M}) + \ell((0 : h)_{M/(x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d})M}) \\
&= n_2 \ldots n_d e(h, x_2, \ldots, x_d; M) \\
&\quad + n_2 \ldots n_{d-1} e(h, x_2, \ldots, x_{d-1}; U_M^{d-1,d}) + \ldots \\
&\quad + n_2 e(h, x_2; U_M^{2d}) + e(h; U_M^{1d}) + \ell((0 : h)_{U_M^{0d}}).
\end{aligned}$$

Do đó, theo định nghĩa $x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $N = M/hM$. □

Mệnh đề tiếp theo đóng vai trò quan trọng trong việc kiểm tra quy tắc Bertini cho các môđun $\overline{U}_M^{ij}$.

Mệnh đề 4.3.3. *Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh chiều d và $h \in H_M$ là một phần tử tổng quát. Với $1 \le i < j \le d$, tồn tại các dãy* *khớp*

$$0 \longrightarrow U_M^{ij}/hU_M^{ij} \longrightarrow U_{M/hM}^{i-1,j-1} \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \overline{U}_M^{ij}/h\overline{U}_M^{ij} \longrightarrow \overline{U}_{M/hM}^{i-1,j-1} \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

trong đó L, N là các R-môđun có độ dài hữu hạn thỏa mãn

$$(0:h)_{U_M^{i-1,j}} \cong L \oplus (0:h)_{U_M^{ij}},$$
$$\ell(N) = \ell((0:h)_{\overline{U}_M^{i-1,j}}) - \ell((0:h)_{\overline{U}_M^{ij}}).$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.3.2 tồn tại $x_2, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ sao cho hệ tham số $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và $x_2, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M/hM. Thay $x_2, \ldots, x_d$ bởi $x_2^2, \ldots, x_d^2$ nếu cần, ta có

$$U_M^{ij} = (0:x_{i+1})_{M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M} \text{ và } U_{M/hM}^{ij} = (0:x_{i+2})_{M/(h,x_{i+3},\ldots,x_{j+1})M}.$$

Trước tiên, ta chứng minh cho trường hợp $j = i+1$, nghĩa là cần chỉ ra

$$0 \to U_M^{i,i+1}/hU_M^{i,i+1} \to U_{M/hM}^{i-1,i} \to (0:h)_{\overline{U}_M^{i-1,i+1}} \to 0.$$

là một dãy khớp. Thật vậy, ta có

$$\overline{U}_M^{i,i+1} = U_M^{i,i+1} = 0:_M x_{i+1} \text{ và } \overline{U}_{M/hM}^{i-1,i} = U_{M/hM}^{i-1,i} \simeq (0:x_{i+1})_{M/hM}.$$

Vì $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là d-dãy trên M nên $0:_M h \subseteq 0:_M h^t \subseteq 0:_M x_{i+1}$. Khi đó từ biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M/0:_M h & \xrightarrow{*h} & M & \longrightarrow & M/hM & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle x_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle x_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle x_{i+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & M/0:_M h & \xrightarrow{*h} & M & \longrightarrow & M/hM & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ta được dãy khớp

$$0 \longrightarrow 0:_M x_{i+1}/0:_M h \xrightarrow{*h} 0:_M x_{i+1} \longrightarrow (0:x_{i+1})_{M/hM}$$
$$\longrightarrow M/(x_{i+1}M + 0:_M h) \xrightarrow{\psi} M/x_{i+1}M$$

Từ đó ta có dãy khớp ngắn các R-môđun

$$0 \longrightarrow (0:_M x_{i+1})/h(0:_M x_{i+1}) \longrightarrow (0:x_{i+1})_{M/hM} \longrightarrow \mathrm{Ker}(\psi) \longrightarrow 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\psi) &\simeq (x_{i+1}M:h)/(x_{i+1}M+0:_M h)\\ &\simeq ((0:h)_{M/x_{i+1}M}/(x_{i+1}M+0:_M h)/x_{i+1}M)\\ &\simeq ((0:h)_{U_M^{i-1,i+1}}/(x_{i+1}M+(0:h)_{U_M^{i-1,i}})/x_{i+1}M).\end{aligned}$$

Đẳng thức sau được suy ra từ bao hàm $0:_M h \subseteq 0:_M x_i = U_M^{i-1,i}$. Suy ra $0:_M h = (0:h)_{U_M^{i-1,i}}$ và

$$(0:h)_{M/x_{i+1}M} = (0:h)_{U_{M/x_{i+1}M}^{i-1,i}} = (0:h)_{U_M^{i-1,i+1}}.$$

Mặt khác $U_M^{i-1,i+1} \simeq U_M^{i-1,i} \oplus \overline{U}_M^{i-1,i+1}$ nên

$$(0:h)_{U_M^{i-1,i+1}} \simeq (0:h)_{U_M^{i-1,i}} \oplus (0:h)_{\overline{U}_M^{i-1,i+1}}.$$

Qua đẳng cấu này ta có $(x_{i+1}M+(0:h)_{U_M^{i-1,i}})/x_{i+1}M \simeq (0:h)_{U_M^{i-1,i}}$. Hơn nữa, vì $h^t, x_2, \ldots, x_d$ là một d-dãy trên M, nên ta có một dãy lồng nhau

$$0:_M h \subseteq 0:_M (h^t, x_2, \ldots, x_d) \subseteq H^0_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq 0:_M x_i \subseteq 0:_M x_{i+1}.$$

Đặc biệt, $0:_M h = (0:h)_{U_M^{i-1,i}} = (0:h)_{U_M^{i,i+1}}$. Do đó ta có đẳng cấu

$$(0:h)_{U_M^{i-1,i+1}} \simeq (0:h)_{U_M^{i,i+1}} \oplus (0:h)_{\overline{U}_M^{i-1,i+1}}.$$

Suy ra $L := \mathrm{Ker}(\psi) \simeq (0:h)_{\overline{U}_M^{i-1,i+1}}$. Như vậy ta chứng minh được khẳng định cho trường hợp $j = i+1$.

Cho $j > i+1$. Khi đó $x_1, \ldots, x_{i+1}, x_{j+1}, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $P = M/(x_{i+2}, \ldots, x_j)M$. Chứng minh tương tự như trên cho môđun P, ta có

$$0 \longrightarrow U_P^{i,i+1}/hU_P^{ij} \longrightarrow U_{P/hP}^{i-1,i} \longrightarrow (0:h)_{\overline{U}_P^{i-1,i+1}} \longrightarrow 0$$

là một dãy khớp. Ở đây

$$(0:h)_{U_P^{i-1,i+1}} \simeq (0:h)_{U_P^{i,i+1}} \oplus (0:h)_{\overline{U}_P^{i-1,i+1}}.$$

Lưu ý rằng $U_P^{i,i+1} \simeq U_M^{ij}$ và $U_{P/hP}^{i-1,i} \simeq U_{P/hP}^{i-1,j-1}$. Đặt $L = (0:h)_{\overline{U}_P^{i-1,i+1}}$. Khi đó tồn tại đẳng cấu

$$(0:h)_{U_M^{i-1,j}} \simeq (0:h)_{\overline{U}_P^{i-1,i+1}} \oplus (0:h)_{U_M^{ij}} = L \oplus (0:h)_{U_M^{ij}}.$$

Khẳng định thứ nhất được chứng minh.

Mặt khác, theo Hệ quả 2.2.6 ta có đẳng cấu

$$U_M^{ij} \simeq \overline{U}_M^{ij} \oplus U_M^{i,j-1}.$$

Do đó

$$U_M^{ij}/hU_M^{ij} \simeq \overline{U}_M^{ij}/h\overline{U}_M^{ij} \oplus U_M^{i,j-1}/hU_M^{i,j-1}.$$

Khi đó, biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U_M^{i,j-1}/hU_M^{i,j-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & U_{M/hM}^{i-1,j-2} \arrow[r] \arrow[d] & (0:h)_{U_M^{i-1,j-1}}/(0:h)_{U_M^{i,j-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_M^{ij}/hU_M^{ij} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & U_{M/hM}^{i-1,j-1} \arrow[r] \arrow[d] & (0:h)_{U_M^{i-1,j}}/(0:h)_{U_M^{ij}} \arrow[r] \arrow[d, "x_{i+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{U}_M^{ij}/h\overline{U}_M^{ij} \arrow[r, "\overline{\psi}"] \arrow[d] & \overline{U}_{M/hM}^{i-1,j-1} \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ở đây các hàng và các cột là các dãy khớp, φ, ψ là các đồng cấu chiếu chính tắc và $\overline{\psi}$ là đồng cấu cảm sinh từ ψ. Vì vậy,

$$\begin{aligned}
\ell(N) &= \ell((0:h)_{U_M^{i-1,j}}/(0:h)_{U_M^{ij}}) - \ell((0:h)_{U_M^{i-1,j-1}}/(0:h)_{U_M^{i,j-1}}) \\
&= \ell(0:h)_{\overline{U}_M^{i-1,j}} - \ell(0:h)_{\overline{U}_M^{ij}}.
\end{aligned}$$

□

Định lý sau là kết quả chính của chương này.

Định lý 4.3.4. *Giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay địa phương với* $\dim(R) = n$. *Cho* $\Lambda = \{\lambda_{ijk} \in \mathbb{R} : 0 \le i < j \le k \le n\}$ *là tập các số thực thỏa mãn*

$$\lambda_{01k} = 1, \text{ với } 1 \le k \le n,$$

$$\lambda_{0jk} \le \lambda_{0,j+1,k+1} \text{ và } \lambda_{ijk} \le \lambda_{i+1,j+1,k+1}, \text{ với } 0 \le i < j \le k < n.$$

Định nghĩa hàm $\mathrm{Deg}_\Lambda : Mod_R \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *bằng cách cho tương ứng mỗi môđun hữu hạn sinh M có chiều d với số thực*

$$\mathrm{Deg}_\Lambda(M) := e(M) + \sum_{0 \le i < j \le d} \lambda_{ijd} e\left(\overline{U}_M^{ij}\right)_i.$$

Khi đó Deg_Λ *là một bậc đối đồng điều.*

Chứng minh. Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh có chiều $d > 0$. Kí hiệu $\overline{M} = M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$.

Trước tiên ta chứng minh $\mathrm{Deg}_\Lambda(M) = \mathrm{Deg}_\Lambda(\overline{M}) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $M \oplus \overline{M}$. Theo Mệnh đề 2.1.8, $x_1, \ldots, x_d$ đồng thời là một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của M và của $\overline{M}$. Thay $x_1, \ldots, x_d$ bởi $x_1^2, \ldots, x_d^2$ nếu cần, ta có thể giả sử rằng

$$U_M^{ij} \simeq (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M}, \quad U_{\overline{M}}^{ij} \simeq (0 : x_{i+1})_{\overline{M}/(x_{i+2},\ldots,x_j)\overline{M}},$$

với mọi $0 \le i < j \le d$. Với $0 \le i < j \le d$, vì $x_1, \ldots, x_d$ là một d-dãy trên M nên $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0 :_M x_1$ và $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cap (x_{i+2}, \ldots, x_j)M = 0$. Khi đó, ta có dãy khớp

$$0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(M) \to M/(x_{i+2}, \ldots, x_j)M \to \overline{M}/(x_{i+2}, \ldots, x_j)\overline{M} \to 0. \tag{4.1}$$

Giả sử $i > 0$. Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(R/(x_{i+1}), -)$ vào dãy khớp (4.1). Lưu ý rằng $\mathrm{Hom}(R/(x_{i+1}), H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \simeq H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ và

$$U_M^{ij} \simeq (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M} \simeq \mathrm{Hom}(R/(x_{i+1}), M/(x_{i+2}, \ldots, x_j)M),$$

$$U^{ij}_{\overline{M}} \simeq (0 : x_{i+1})_{\overline{M}/(x_{i+2},\ldots,x_j)\overline{M}} \simeq \mathrm{Hom}(R/(x_{i+1}), \overline{M}/(x_{i+2},\ldots,x_j)\overline{M}).$$

Khi đó ta có dãy khớp

$$0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(M) \to U^{ij}_M \to U^{ij}_{\overline{M}} \to \mathrm{Ext}^1_R(R/(x_{i+1}), M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M).$$

Vì $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ và $\mathrm{Ext}^1_R(R/(x_{i+1}), M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M)$ là các môđun có độ dài hữu hạn nên ta có

$$e(U^{ij}_M)_i = e(U^{ij}_{\overline{M}})_i.$$

Mặt khác, $U^{ij}_M \simeq U^{i,j-1}_M \oplus \overline{U}^{ij}_M$ và $U^{ij}_{\overline{M}} \simeq U^{i,j-1}_{\overline{M}} \oplus \overline{U}^{ij}_{\overline{M}}$ nên ta có

$$e(\overline{U}^{ij}_M)_i = e(\overline{U}^{ij}_{\overline{M}})_i. \tag{4.2}$$

Với $i = 0$, lưu ý rằng $x_1, x_{j+1}, \ldots, x_d$ là hệ tham số hầu p-chuẩn tắc của $M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M$ nên nó là d-dãy trên $M/(x_{i+2},\ldots,x_j)M$. Do đó ta có

$$U^{0j}_M \simeq (0 : x_1)_{M/(x_2,\ldots,x_j)M} \simeq H^0_{\mathfrak{m}}(M/(x_2,\ldots,x_j)M),$$
$$U^{0j}_{\overline{M}} \simeq (0 : x_1)_{\overline{M}/(x_2,\ldots,x_j)\overline{M}} \simeq H^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M}/(x_2,\ldots,x_j)\overline{M}).$$

Tác động hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ vào dãy khớp ngắn (4.1), ta có dãy khớp

$$0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(M) \to U^{0j}_M \to U^{0j}_{\overline{M}} \to 0.$$

Suy ra $\ell(U^{0j}_M) = \ell(U^{0j}_{\overline{M}}) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$. Hệ quả là,

$$\ell(\overline{U}^{0j}_M) = \ell(\overline{U}^{0j}_{\overline{M}}), \tag{4.3}$$

với $j > 1$ và

$$\ell(\overline{U}^{0,1}_M) = \ell(\overline{U}^{0,1}_{\overline{M}}) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)). \tag{4.4}$$

Từ các đẳng thức (4.2), (4.3), (4.4), ta có

$$\mathrm{Deg}_\Lambda(M) = \mathrm{Deg}_\Lambda(\overline{M}) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Quy tắc hiệu chỉnh được suy ra từ Hệ quả 4.2.8. Cụ thể, nếu M là Cohen-Macaulay thì $\mathrm{Deg}_\Lambda(M) = e(M)$.

Tiếp theo ta chứng minh tiêu chuẩn Bertini. Giả sử $\operatorname{depth}(M) > 0$ và $h \in H_M$ là phần tử tổng quát như trong Mệnh đề 4.3.1. Sử dụng Mệnh đề 4.3.3, ta có

$$e\left(\overline{U}^{ij}_{M/hM}\right)_i = e\left(\overline{U}^{i+1,j+1}_M / h\overline{U}^{i+1,j+1}_M\right)_i = e\left(\overline{U}^{i+1,j+1}_M\right)_{i+1},$$

với $0 < i < j \leq d$. Với $0 = i < j \leq d$,

$$\begin{aligned}\ell(\overline{U}^{0j}_{M/hM}) &= \ell(\overline{U}^{1,j+1}_M / h\overline{U}^{1,j+1}_M) + \ell((0:h)_{\overline{U}^{0j+1}_M}) - \ell((0:h)_{\overline{U}^{1,j+1}_M}) \\ &= e(h; \overline{U}^{1,j+1}_M) + \ell((0:h)_{\overline{U}^{0j+1}_M}).\end{aligned}$$

Nếu ta chọn phần tử h đủ tổng quát thì $e(h; \overline{U}^{1,j+1}_M) = e(\overline{U}^{1,j+1}_M)_1$. Do đó

$$\ell(\overline{U}^{0j}_{M/hM}) = e(\overline{U}^{1,j+1}_M)_1 + \ell((0:h)_{\overline{U}^{0j+1}_M}) \leq e(\overline{U}^{1,j+1}_M)_1 + \ell(\overline{U}^{0j+1}_M).$$

Kết hợp với các điều kiện $\lambda_{0jk} \leq \lambda_{0j+1,k+1}$ và $\lambda_{ijk} \leq \lambda_{i+1,j+1,k+1}$ với $0 \leq i < j \leq k < n$, ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Deg}_\Lambda(M/hM) &= e(M/hM) + \sum_{0\leq i<j\leq d-1} \lambda_{i,j,d-1} e\left(\overline{U}^{ij}_{M/hM}\right)_i \\ &\leq e(M) + \sum_{0<i<j\leq d} \lambda_{i-1,j-1,d-1} e\left(\overline{U}^{ij}_M\right)_i + \sum_{j=2}^{d} \lambda_{0j-1,d-1} \ell(\overline{U}^{0j}_M) \\ &\leq e(M) + \sum_{0<i<j\leq d} \lambda_{ijd} e\left(\overline{U}^{ij}_M\right)_i + \sum_{j=2}^{d} \lambda_{0jd} \ell(\overline{U}^{0j}_M) \\ &= \operatorname{Deg}_\Lambda(M).\end{aligned}$$

□

Từ giả thiết đối với các số thực λ_{ijk} trong Định lý 4.3.4, ta có

$$\lambda_{ijk} \geq \lambda_{0,j-i,k-i} \geq \lambda_{0,1,k-j+1} = 1.$$

Do đó tất cả các hệ số λ_{ijk} của $\operatorname{Deg}_\Lambda$ đều lớn hơn hoặc bằng 1.

Ví dụ 4.3.5. (i) Cho các số thực $1 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Đặt $\lambda_{ijk} = \lambda_i$ với $0 \leq i < j \leq k \leq n$ và $\Lambda := \{\lambda_{ijk} : 0 \leq i < j \leq k \leq n\}$. Sử dụng Mệnh đề 2.2.6 (ii), đặt

$$\begin{aligned}\mathrm{Deg}_\Lambda(M) &= e(M) + \sum_{0\leq i<j\leq d} \lambda_{ijd} e\left(\overline{U}_M^{ij}\right)_i \\ &= e(M) + \lambda_{d-1} e(U_M^{d-1,d})_{d-1} + \ldots + \lambda_1 e(U_M^{1d})_1 + \ell(U_M^{0d}),\end{aligned}$$

Theo Định lý 4.3.4, $\mathrm{Deg}_\Lambda(M)$ là một bậc đối đồng điều. Đặc biệt, nếu $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 1$ thì ta thu được bậc không trộn lẫn udeg.

(ii) Cho $\lambda_{ijk} = \binom{k-1}{i}$, với $0 \leq i < j \leq k$. Khi đó, $\lambda_{0jk} = 1$ và $\lambda_{ijk} \leq \lambda_{i+1,j+1,k+1}$ với mọi $0 \leq i < j \leq k$. Theo Định lý 4.3.4, hàm Deg_b được định nghĩa như sau

$$\mathrm{Deg}_b(M) := e(M) + \sum_{0\leq i<j\leq d} \binom{d-1}{i} e(\overline{U}_M^{ij})_i,$$

cũng là một bậc đối đồng điều, trong đó $d = \dim(M)$.

Kí hiệu họ tất cả các bậc đối đồng điều xây dựng trong Định lý 4.3.4 là $\mathcal{D}(R)$. Khi đó $\mathcal{D}(R)$ là tập lồi trong không gian thực $\mathbb{R}^N$ với $N \gg 0$ và ta có thể tính được chiều của nó. Nhắc lại rằng một tập D trong không gian véctơ thực $\mathbb{R}^N$ với $N \gg 0$ được gọi là một tập lồi nếu $ax + (1-a)y \in D$ với mọi $x, y \in D$ và với mọi số thực $0 \leq a \leq 1$.

Hệ quả 4.3.6. *Cho R là ảnh đồng cấu của một vành Cohen-Macaulay, địa phương với* $\dim(R) = n > 0$. *Khi đó $\mathcal{D}(R)$ là một tập lồi trong không gian véc tơ thực và*

$$\dim(\mathcal{D}(R)) = \binom{n+2}{3} - n.$$

Chứng minh. Tính lồi của tập là hiển nhiên. Lưu ý rằng các hệ số λ_{ijk}, $0 \leq i < j \leq k \leq n$, chỉ phụ thuộc vào quan hệ $\lambda_{01k} = 1$, $\lambda_{0jk} \leq$

$\lambda_{0,j+1,k+1}$ và $\lambda_{ijk} \leq \lambda_{i+1,j+1,k+1}$. Tại mỗi chiều k, ta có $\binom{k+1}{2} - 1$ tham số tự do như vậy. Do đó

$$\dim(\mathcal{D}(R)) = \sum_{k=1}^{n} (\binom{k+1}{2} - 1) = \binom{n+2}{3} - n.$$

□

4.4 So sánh các bậc đối đồng điều

Trong tiết cuối của chương này, ta sẽ tìm hiểu mối quan hệ giữa bậc đối đồng điều hdeg với các bậc đối đồng điều trong họ được xây dựng trong tiết trước. Một câu hỏi thú vị là bậc đồng điều hdeg có thuộc họ $\mathcal{D}(R)$ hay không? Do bậc không trộn lẫn udeg là bậc nhỏ nhất trong $\mathcal{D}(R)$ nên câu hỏi này cũng liên quan đến một giả thuyết của các tác giả N.T. Cường-P.H. Quý trong [26], phát biểu là $\operatorname{udeg}(M) \leq \operatorname{hdeg}(M)$. Chúng tôi chưa trả lời được câu hỏi trên trong trường hợp tổng quát. Thay vào đó, chúng tôi đưa ra so sánh giữa bậc hdeg và bậc Deg_b (ví dụ 4.3.5 (ii)) trong một số trường hợp đặc biệt.

Ta luôn giả sử R là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein địa phương S. Không mất tổng quát, ta giả sử $\dim(M) = d = \dim(R) = \dim(S)$. Nhắc lại rằng môđun khuyết thiếu thứ i của M là

$$K_M^i := \operatorname{Ext}_S^{d-i}(M, S),$$

với $i = 0, 1, \ldots, d$. Môđun K_M^d là môđun chính tắc của M. Khi đó ta có

$$\operatorname{hdeg}(M) = e(M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \operatorname{hdeg}(K_M^i).$$

Trước tiên nhắc lại rằng hằng số Buchsbaum của một R-môđun Cohen-Macaulay suy rộng M là $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$, trong đó $d = \dim(M)$. Kết quả sau cho ta công thức tính các bậc đối đồng điều trong trường hợp M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Mệnh đề 4.4.1. *Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc chiều*

$$D_0 = H^0_{\mathfrak{m}}(M) \subset D_1 \subset \cdots \subset D_t = M.$$

Đặt $d_j = \dim(D_j)$ với $j = 0, 1, \ldots, t$ và $\Delta := \{d_0, d_1, \ldots, d_{t-1}\}$. Khi đó, ta có

(i) $\mathrm{hdeg}(M) = e(M) + \sum_{j=0}^{t-1} \binom{d-1}{d_j}(e(D_j) + I(K_M^{d_j})) + \sum_{i \notin \Delta} \binom{d-1}{i} \ell(K_M^i).$

(ii) $\mathrm{Deg}_b(M) = e(M) + \sum_{j=0}^{t-1} \binom{d-1}{d_j} e(D_j) + \gamma$, *ở đây*

$$\gamma = \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{d_{i+1}-1} (\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i - 1}{j})\ell(H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_i).$$

Chứng minh. (i) Cho M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Theo [25, Định lý 5.3], môđun K_M^i hoặc là Cohen-Macaulay suy rộng chiều i nếu $i \in \Delta$ hoặc có độ dài hữu hạn nếu $i \notin \Delta$. Giả sử $i = d_j = \dim(D_j)$ với $j > 0$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \to D_j \to M \to M/D_j \to 0,$$

ta có dãy khớp

$$0 \to K^i_{M/D_j} \to K^i_M \to K^i_{D_j} \to K^{i-1}_{M/D_j}.$$

Lưu ý rằng $K^i_{M/D_j}, K^{i-1}_{M/D_j}$ là các môđun có độ dài hữu hạn (xem [19, Mệnh đề 3.5]) và $K^i_{D_j}$ là môđun chính tắc của D_j. Do đó

$$e(K^i_M) = e(K^i_{D_j}) = e(D_j).$$

Trong trường hợp này, ta có

$$\mathrm{hdeg}(K^i_M) = e(K^i_M) + I(K^i_M) = e(D_j) + I(K^i_M).$$

Nếu $i \notin \Delta$ thì $\mathrm{hdeg}(K^i_M) = \ell(K^i_M)$ vì K^i_M là môđun có độ dài hữu hạn.

Vì thế

$$\begin{aligned}\operatorname{hdeg}(M) &= e(M) + \sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}\operatorname{hdeg}(K_M^i)\\ &= e(M) + \sum_{j=0}^{t-1}\binom{d-1}{d_j}(e(D_j) + I(K_M^{d_j})) + \sum_{i\notin\Delta}\binom{d-1}{i}\ell(K_M^i).\end{aligned}$$

(ii) Từ Mệnh đề 2.2.6 (ii), ta có phân tích

$$U_M^{ij} \simeq \overline{U}_M^{ij} \oplus \overline{U}_M^{i,j-1} \oplus \cdots \oplus \overline{U}_M^{i,i+2} \oplus U_M^{i,i+1}.$$

Theo [18, Mệnh đề 3.5], $D_s = U_M^{i,i+1}$ với mọi số nguyên s thỏa mãn $d_s \leq i < d_{s+1}$. Do đó theo Mệnh đề 4.2.7, môđun $\overline{U}_M^{ij} \oplus \overline{U}_M^{i,j-1} \oplus \cdots \oplus \overline{U}_M^{i,i+2}$ có độ dài hữu hạn. Suy ra

$$e(\overline{U}_M^{ij})_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i > 0, j \geq i+2,\\ 0 & \text{nếu } j = i+1, i \neq d_0, \ldots, d_t,\\ e(D_s) & \text{nếu } j = i+1, i = d_s.\end{cases}$$

Khẳng định này dẫn đến

$$\begin{aligned}\operatorname{Deg}_b(M) &= e(M) + \sum_{j=0}^{t-1}\binom{d-1}{d_j}e(D_j) + \sum_{j=1}^{d}\ell(U_M^{0j})\\ &= e(M) + \sum_{j=0}^{t-1}\binom{d-1}{d_j}e(D_j) + \ell(U_M^{0d}).\end{aligned}$$

Chọn hệ tham số hầu p-chuẩn tắc $x_1, \ldots, x_d$ của M thỏa mãn

$$U_M^{0d} = (0 : x_1)_{M/(x_2,\ldots,x_d)M}.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}&\ell(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = n_1 \ldots n_d e(x_1, \ldots, x_d; M)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{d-1} n_1 \ldots n_i e(x_1, \ldots, x_i; (0 : x_{i+1})_{M/(x_{i+2},\ldots,x_d)M}) + \ell(U_M^{0d}),\end{aligned}$$

với mọi $n_1, \dots, n_d > 0$. Mặt khác, theo [19, Định lý 4.3] ta có

$$\ell(M/(x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})M) = \sum_{j=0}^{t} n_1 \dots n_{d_j} e(x_1, \dots, x_{d_j}; D_j) + \gamma,$$

với mọi $n_1, \dots, n_d > 0$. Suy ra $\ell(U_M^{0d}) = \gamma + \ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M))$. Ở đây

$$\begin{aligned}\ell(U_M^{0d}) =& \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{d_{i+1}-1} \sum_{s=d_i}^{d_{i+1}-1} \binom{s-1}{j-1} \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/D_i) \\ =& \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{d_{i+1}-1} \left(\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i - 1}{j}\right) \ell(H_{\mathfrak{m}}^j(M/D_i).\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\mathrm{Deg}_b(M) = e(M) + \sum_{j=0}^{t-1} \binom{d-1}{d_j} e(D_j) + \gamma.$$

□

Từ Mệnh đề 4.4.1 ta nhận được so sánh giữa các bậc đối đồng điều hdeg và Deg_b trong một số trường hợp đặc biệt như sau.

Hệ quả 4.4.2. *Ta có* $\mathrm{hdeg}(M) = \mathrm{Deg}_b(M)$ *trong các trường hợp sau:*

(i) M là một môđun Cohen-Macaulay dãy;

(ii) M là một môđun Cohen-Macaulay suy rộng;

(iii) $\dim(M) = 2$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\dim(M) = \dim(R) = d > 0$.

(i) Giả sử M là môđun Cohen-Macaulay dãy. Khi đó K_M^i hoặc là môđun Cohen-Macaulay chiều i hoặc là bằng 0 (xem trong [45] hoặc [44]). Theo Mệnh đề 4.4.1 (cũng xem trong [52, Ví dụ 1.5.23]), ta có

$$\mathrm{hdeg}(M) = e(M) + \sum_{j=0}^{t-1} \binom{d-1}{d_j} e(D_j),$$

và
$$\operatorname{Deg}_b(M) = e(M) + \sum_{j=0}^{t-1} \binom{d-1}{d_j} e(D_j) + \gamma,$$
ở đây
$$\gamma = \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{d_{i+1}-1} (\binom{d_{i+1}-1}{j} - \binom{d_i - 1}{j})\ell(H^j_{\mathfrak{m}}(M/D_i) = 0.$$
Do đó $\operatorname{hdeg}(M) = \operatorname{Deg}_b(M)$.

(ii) Ta có
$$U^{id}_M \simeq \overline{U}^{id}_M \oplus \overline{U}^{i,d-1}_M \oplus \cdots \oplus \overline{U}^{i,i+2}_M \oplus\ U^{i,i+1}_M$$
là môđun có độ dài hữu hạn vì M là Cohen-Macaulay suy rộng. Suy ra $e(\overline{U}^{ij}_M)_i = 0$ nếu $i > 0$. Do đó
$$\operatorname{Deg}_b(M) = e(M) + \sum_{0<j\leq d} \ell(\overline{U}^{0j}_M) = e(M) + \ell(U^{0,d}_M) = e(M) + I(M).$$
Theo Chú ý 4.1.5 (iii) ta có điều cần chứng minh.

(iii) Giả sử $\dim(M) = 2$. Khi đó M hoặc là môđun Cohen-Macaulay suy rộng hoặc là môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy với lọc chiều
$$D_0 = H^0_{\mathfrak{m}}(M) \subset D_1 \subset D_2 = M,$$
trong đó $\dim(D_1) = 1$. Trường hợp M là Cohen-Macaulay suy rộng đã được chứng minh trong (ii). Xét trường hợp còn lại. Theo Mệnh đề 4.4.1, ta có
$$\operatorname{hdeg}(M) = e(M) + e(D_1) + \ell(D_0) + I(K^1_M),$$
$$\operatorname{Deg}_b(M) = e(M) + e(D_1) + \ell(D_0) + \ell(H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_1)).$$
Do đó ta chỉ cần chứng minh $\ell(H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_1)) = I(K^1_M) = \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(K^1_M))$.

Không mất tổng quát ta giả sử $\dim(R) = \dim(S) = 2$. Ta có dãy khớp
$$0 \to D_1 \to M \to M/D_1 \to 0,$$

ở đây $\dim(D_1) = 1$ và M/D_1 là môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều 2 và $\operatorname{depth}(M/D_1) > 0$. Từ dãy khớp dài

$$\ldots \to \operatorname{Ext}_S^i(M/D_1, S) \to \operatorname{Ext}_S^i(M, S) \to \operatorname{Ext}_S^i(D_1, S) \to \ldots$$

với $\operatorname{Hom}_S(D_1, S) = 0$ và $\operatorname{Ext}_S^2(M/D_1, S) \simeq K^0_{M/D_1} = 0$, ta có dãy khớp ngắn

$$0 \to \operatorname{Ext}_S^1(M/D_1, S) \to \operatorname{Ext}_S^1(M, S) \to \operatorname{Ext}_S^1(D_1, S) \to 0,$$

hay nói cách khác ta có dãy khớp ngắn

$$0 \to K^1_{M/D_1} \to K^1_M \to K^1_{D_1} \to 0.$$

Vì M/D_1 là môđun Cohen-Macaulay suy rộng chiều 2 nên K^1_{M/D_1} là môđun có độ dài hữu hạn. Hơn nữa, vì $K^1_{D_1}$ là môđun chính tắc của D_1, nên nó là môđun Cohen-Macaulay chiều 1. Suy ra $K^1_{M/D_1} \simeq H^0_{\mathfrak{m}}(K^1_M)$ từ dãy khớp trên. Do đó,

$$\ell(H^0_{\mathfrak{m}}(K^1_M)) = \ell(K^1_{M/D_1}) = \ell(H^1_{\mathfrak{m}}(M/D_1))$$

do tính đối ngẫu. $\square$

Chú ý là khẳng định (iii) trong Hệ quả 4.4.2 cũng được chứng minh độc lập trong [26, Hệ quả 5.10].

Để kết thúc tiết này chúng tôi xét một câu hỏi sau của Vasconcelos.

Câu hỏi 4.4.3. [52, Câu hỏi 1.5.63(2)] Cho R là một vành Cohen-Macaulay, địa phương chiều d. Kí hiệu $\mathcal{N}$ là tập tất cả các số hữu tỷ

$$\frac{\operatorname{hdeg}(M) - \operatorname{hdeg}(M/hM)}{e(M)},$$

ở đây $M \neq 0$ chạy khắp trên phạm trù các R-môđun hữu hạn sinh và $h \in \mathfrak{m}$ là phần tử tổng quát đối với M. Phải chăng $\mathcal{N}$ là hữu hạn hoặc bị chặn?

Áp dụng Mệnh đề 4.4.1, chúng tôi đưa ra một ví dụ khẳng định tập $\mathcal{N}$ không bị chặn, do đó đưa ra câu trả lời phủ định cho câu hỏi của Vasconcelos.

Ví dụ 4.4.4. Cho $R = k[[X,Y]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k với $\mathfrak{m} = (X,Y)$. Cho $L_t = \mathfrak{m}^{t+1}$ với $t \geq 0$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \to L_t \to R \to R/\mathfrak{m}^{t+1} \to 0,$$

ta suy ra L_t là môđun Cohen-Macaulay suy rộng với $H^0_{\mathfrak{m}}(L_t) = 0$ và $H^1_{\mathfrak{m}}(L_t) \simeq R/\mathfrak{m}^{t+1}$. Hơn nữa $e(L_t) = e(R) = 1$. Từ Mệnh đề 4.4.1, ta có

$$\mathrm{hdeg}(L_t) = e(L_t) + \ell(R/\mathfrak{m}^{t+1}) = 1 + \binom{t+2}{2}.$$

Trong trường hợp này, ta có thể chọn để $h = X$ là phần tử tổng quát của L_t. Vì $\dim(L_t/hL_t) = 1$, ta có

$$\mathrm{hdeg}(L_t/hL_t) = e(L_t) + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(L_t/XL_t)).$$

Từ hai dãy khớp

$$0 \to L_t \to R \to R/\mathfrak{m}^{t+1} \to 0,$$

$$0 \to R \xrightarrow{*X} R \to R/(X) \to 0,$$

ta có các dãy khớp sau

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Tor}_1^R(R/(X), R/\mathfrak{m}^{t+1}) \to L_t/XL_t \to R/XR \\ \to R/(X, Y^{t+1}) \to 0, \\ 0 \to \mathrm{Tor}_1^R(R/(X), R/\mathfrak{m}^{t+1}) \to R/\mathfrak{m}^{t+1} \xrightarrow{*X} R/\mathfrak{m}^{t+1} \\ \to R/(X, Y^{t+1}) \to 0. \end{aligned}$$

Dãy khớp đầu tiên cảm sinh đẳng cấu

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/(X), R/\mathfrak{m}^{t+1}) \simeq H^0_{\mathfrak{m}}(L_t/XL_t).$$

Dãy khớp thứ hai cảm sinh đẳng cấu

$$\operatorname{Tor}_1^R(R/(X), R/\mathfrak{m}^{t+1}) \simeq (0:X)_{R/\mathfrak{m}^{t+1}} \simeq \mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}.$$

Suy ra

$$\operatorname{hdeg}(L_t/hL_t) = 1 + \ell(\mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}) = t + 2.$$

Khi đó

$$\frac{\operatorname{hdeg}(L_t) - \operatorname{hdeg}(L_t/hL_t)}{e(L_t)} = \binom{t+1}{2}.$$

Do đó $\mathcal{N} \supseteq \{\binom{t+1}{2} : \text{ với } t \geq 0\}$ không bị chặn.

Kết luận

Trong luận án này, chúng tôi thu được một số kết quả sau.

(i) Đặc trưng một hệ tham số là hầu p-chuẩn tắc bằng một điều kiện hữu hạn của hàm $\tilde{I}_{M,\underline{x}}(\underline{n})$.

(ii) Xây dựng các môđun con thương $U_M^{i,\Lambda}$ với $\Lambda \subseteq \{i+2, \ldots, \dim(M)\}$. Áp dụng để chỉ ra bậc ứng với các hệ số khác không của hàm đa thức $\ell(M/\underline{x}(\underline{n}))$ là các bất biến của M.

(iii) Đưa ra công thức tính các đặc trưng Euler-Poincaré bậc cao và hệ số Hilbert đối với một hệ tham số hầu p-chuẩn tắc thông qua số bội của các môđun $U_M^{i,\Lambda}$. Từ đó so sánh hệ số của đa thức ứng với các hàm độ dài $\ell(M/\underline{x}(\underline{n}))$, hệ số Hilbert $e_i(\underline{x}(\underline{n}); M)$ và đặc trưng Euler-Poincaré $\chi_k(\underline{x}(\underline{n}); M)$ đối với hệ tham số hầu p-chuẩn tắc.

(iv) Chỉ ra hàm $h_I^0(n)$ là một hàm đa thức trong các trường hợp I là iđêan chính hoặc sinh bởi một phần hệ tham số hầu p-chuẩn tắc. Đưa ra công thức tính hệ số của đa thức đó trong trường hợp iđêan chính hoặc iđêan sinh bởi một phần hệ tham số chuẩn tắc trong vành Cohen-Macaulay suy rộng.

(v) Sử dụng số bội của các môđun $\overline{U}_M^{i,\Lambda}$ xây dựng một họ vô hạn các bậc đối đồng điều.

Các công trình liên quan đến đề tài

1. D.T. Cuong and P.H. Nam, Hilbert coefficients and partial Euler-Poincaré characteristics of Koszul complexes of d-sequences, *J. Algebra.* **441** (2015), 125–158.

2. D.T. Cuong, P.H. Nam and P.H. Quy, On the length function of saturations of ideal powers, *Acta Math. Vietnam.* **43** (2018), 275–288.

3. D.T. Cuong and P.H. Nam, On a family of cohomological degrees, *J. Korean Math. Soc.* **57**(3) (2020), 669–689.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Seminar Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học.
- Seminar Đại số giao hoán, Đại học Meiji, Nhật Bản.
- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học: 10/2014; 10/2015; 10/2016; 10/2017; 10/2018.
- Hội nghị ĐAHITÔ, tháng 10/2016 tại Buôn Ma Thuột.
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán, tháng 1/2017 tại Thái Nguyên.
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán và liên hệ với Tổ hợp, Hình học rời rạc và Lý thuyết kỳ dị, tháng 9/2017 tại Hà Nội - Hạ Long.
- Hội nghị quốc tế Đài Loan-Việt Nam về Toán, tháng 5/2018 tại Cao Hùng, Đài Loan.
- Hội nghị Toán học Việt-Mỹ, tháng 6/2019 tại Quy Nhơn.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] N.T. Cường, *Kiểu đa thức của môđun hữu hạn sinh trên vành Noether địa phương.* Luận án Tiến sỹ Khoa học, Trung tâm Khoa học và Công nghệ Quốc gia, 1995.

[2] Đ.T. Cường, *dd-Dãy, đặc trưng Euler-Poincaré và ứng dụng vào nghiên cứu một số lớp mở rộng của môđun Cohen-Macaulay.* Luận án Tiến sỹ Toán học, ĐHQG Hà Nội, 2007.

[3] P.H. Quý, *Về tính chẻ ra của môđun đối đồng điều địa phương và một số ứng dụng trong vành Noether.* Luận án Tiến sỹ Toán học, Viện Toán học-Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam, 2013.

Tiếng Anh

[4] J.O. Amao, On a certain Hilbert polynomial, *J. London Math. Soc.* (2) **14** (1976), no. 1, 13–20.

[5] M. Auslander and D.A. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, *Ann. Math.*, **68** (1958), 625-657.

[6] M. Brodmann and R.Y. Sharp, *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, Cambridge University Press, 1998.

[7] M. Brodmann and R.Y. Sharp, On the dimension and multiplicity of local cohomology modules. *Nagoya Math. J.* **167** (2002), 217–233.

[8] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, 1998.

[9] D.T. Cuong, p-Standard systems of parameters, localizations and local cohomology modules, *Proceedings of the 3th Japan-Vietnam joint seminar on Commutative Algebra*, 66-78, Hanoi, 2007.

[10] D.T. Cuong and P.H. Nam, Hilbert coefficients and partial Euler-Poincaré characteristics of Koszul complexes of d-sequences, *J. Algebra* **441** (2015), 125–158.

[11] D.T. Cuong, P.H. Nam and P.H. Quy, On the length function of saturations of ideal powers, *Acta Math. Vietnam.* **43** (2018), 275–288.

[12] D.T. Cuong and P.H. Nam, On a family of cohomological degrees, *J. Korean Math. Soc.* **57**(3) (2020), 669–689.

[13] N.T. Cuong, On the length of powers of systems of parameters in local ring, *Nagoya Math. J.*, **125** (1990), 77-88.

[14] N.T. Cuong, On the dimension of the non-Cohen-Macaulay locus of local rings admiting dualizing complexes, *Math. Proc. Cambrige Phil. Soc.***109**(2), (1991), 479-488.

[15] N.T. Cuong, On the least degree of polynomials bounding above the differences between lengths and multipicities of certain systems of parameters in local ring, *Nagoya Math. J.*, **125** (1992), 105-114.

[16] N.T. Cuong, p-standard systems of parameters and p-standard ideals in local rings, *Acta Math. Vietnamica*, **20** (1995), 145-161.

[17] N.T. Cuong and D.T. Cuong, dd-sequences and partial Euler-Poincaré characteristics of Koszul complex, *J. Algebra and Its Applications*, **6**(2) (2007), 207-231.

[18] N.T. Cuong and D.T. Cuong, On sequentially Cohen-Macaulay modules, *Kodai. Math. J*, **30** (2007), 409-428.

[19] N.T. Cuong and D.T. Cuong, On the structure of sequentially generalized Cohen-Macaulay modules, *J. Algebra*, **317** (2007), 714-742.

[20] N.T. Cuong and D.T. Cuong, Local cohomology annihilators and Macaulayfication, *Acta Math. Vietnam.* **42** (2017), 37–60.

[21] N.T. Cuong, D.T. Cuong and H.L. Truong, On a new invariant of finitely gennerated modules over local rings, *J. Algebra Appl*, **9**(6) (2010), 959-976.

[22] N.T. Cuong and V.T. Khoi, On the partial Euler-Poincaré characteristics of certain systems of parameters in local ring, *Math. Z*, **222** (1996), 383-390.

[23] N.T. Cuong and N.D. Minh, On the length of Koszul homology and generalized fractions, *Math. Proc. Camd. Phi. Soc*, **120** (1996), 31-42.

[24] N.T. Cuong and L.T. Nhan, Dimension, multiplicity and Hilbert function of Artinian modules, *East-West J. Math.* **1**(2) (1999), 179–196.

[25] N.T. Cuong and L.T. Nhan, Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules, *J. Algebra* **267** (2003), 156-177.

[26] N.T. Cuong and P.H. Quy, On the structure of finitely generated modules over quotients of Cohen-Macaulay local rings, arXiv preprint arXiv:1612.07638.

[27] S.D. Cutkosky, Asymptotic multiplicities of graded families of ideals and linear series, *Adv. Math.* **264** (2014), 55–113

[28] S.D. Cutkosky, H.H. Tai, H. Srinivasan and E. Theodorescu, Asymptotic behavior of the length of local cohomology, *Canad. J. Math.* **57**(6) (2005), 1178–1192.

[29] L.R. Doering, T. Gunston and W.V. Vasconcelos, Cohomological degrees and Hilbert functions of graded modules, *American J. Math.*, **120**(3) (1998), 493–504.

[30] S. Goto, J. Hong and W. V. Vasconcelos, The homology of parameter ideals, *J. Algebra*, **368** (2012), 271–299.

[31] S. Goto and K. Ozeki, Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters, *Commutative algebra and its connections to geometry (PASI 2009)* in: Contemp. Math., **555,** Amer. Math. Soc. (2011), 97–118.

[32] T. Gunston, *Cohomological degrees, Dilworth numbers and linear resolution*, Ph.D. Thesis, Rutgers University, 1998, arXiv: 1008. 3711 [math.AC].

[33] J. Herzog, T.J. Puthenpurakal, J.K. Verma, Hilbert polynomials and powers of ideals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **145**(3) (2008), 623–642.

[34] C. Huneke, Theory of $d-$sequences and powers of ideals, *Adv. Math.*, **46** (1982), 249–279.

[35] T. Kawasaki, On Macaulayfication of Noetherian schemes, *Trans. Amer. Math. Soc*, **352**(6) (2000), 2517–2552.

[36] T. Kawasaki, On arithmetic Macaulayfication of local rings, *Trans. Amer. Math. Soc*, **354**(1) (2000), 123–149.

[37] D. Kirby, Artinian modules and Hilbert polynomials, *Quart. J. Math. Oxford* **24**(2) (1973), 47–57.

[38] S. Kleiman, B. Ulrich and J. Validashti, Multiplicities, integral dependence and equisingularity, preprint.

[39] C.H. Linh and N.V. Trung, Uniform bounds in generalized Cohen-Macaulay rings, *Journal of Algebra* **304** (2) (2006), 1147–1159.

[40] D.H. Long and J. Montano, Length of local cohomology of powers of ideals, *Trans. Amer. Math. Soc*, **371**(5) (2018), 3483–3503.

[41] H. Matsumura,*Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[42] J. Sally, Bounds for numbers of generators of Cohen-Macaulay ideals, *Pacific. J. Math*, **63** (1976), 517–520.

[43] P. Schenzel, Dualizing complexes and system of parameters, *J. Algebra.*, **58** (1979), 495–501.

[44] P. Schenzel, *On the dimension filtration and Cohen-Macaulay filtered modules,* in: Proc. of the Ferrara Meeting in Honour of Mario Fiorentini, University of Antwerp Wilrijk, Belgium (1998), 245–264.

[45] R.P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Second edition, Birkhäuser Boston, 1996.

[46] J. Stückrad and W. Vogel, *Buchsbaum rings and applications*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.

[47] N.V. Trung, Absolutely superficial sequences, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, **93** (1983), 35–47.

[48] N.V. Trung, Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules, *Nagoya Math. J*, **102** (1986), 1–49.

[49] N.V. Trung, Bounds for the minimum numbers of generators of generalized Cohen-Macaulay ideals, *J. Algebra*, **90** (1984), 1–9.

[50] B. Ulrich and J. Validashti, Numerical criteria for integral dependence, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **151**(1) (2011), 95–102.

[51] W.V. Vasconcelos, The homology degree of module, *Trans. Amer. Math. Soc*, **350** (1998), 1167–1179.

[52] W.V. Vasconcelos, Cohomological Degrees and Applications. In *Commutative Algebra, Expository papers dedicated to David Eisenbud on the occasion of his 65th birthday*, (I. Peeva, editor), Springer (2013), 667-707.

[53] W.V. Vasconcelos, *Complexity degrees of Algebraic Structures*, (2013), arXiv: 1402.1906 [math.AC].

Tiếng Đức

[54] N.T. Cuong, P. Schenzel and N.V. Trung, Verallgemeinerte Cohen - Macaulay Moduln, *Math. Nachr.* **85** (1978), 57–75.