VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN THU HẰNG

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA LŨY THỪA CÁC IĐÊAN PHỦ

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2019

Luận án được hoàn thành tại: Viện Toán học-Viện Hàn lâm khoa học và Công nghệ Việt Nam

Tập thể hướng dẫn khoa học: TS. Trần Nam Trung
GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Viện họp tại: Viện Toán học - Viện Hàn lâm khoa học và Công nghệ Việt Nam
vào hồi.......giờ......ngày......tháng......năm.....

Có thể tìm hiểu về luận án tại:
- Thư viện Quốc gia
- Thư viện Viện Toán học

Mở đầu

Trong Đại số, đặc biệt là Đại số giao hoán, tính ổn định của một số bất biến là những vấn đề được quan tâm bởi nhiều nhà nghiên cứu. Nhìn lại lịch sử phát triển của vấn đề này, ta có thể thấy nó đã được nghiên cứu từ rất lâu. Thật vậy, những năm 50 của thế kỷ 20, một kết quả kinh điển của Hilbert - Samuel đã chỉ ra rằng hàm độ dài $\ell(R/\mathfrak{m}^s)$, trong đó $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether, địa phương, là một đa thức khi số mũ s là đủ lớn, bậc của đa thức này chính là chiều của vành R. Đến năm 1979, các kết quả nổi tiếng M. Brodmann đã chỉ ra rằng tập các iđêan nguyên tố liên kết $\{Ass(R/I^s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ và dãy $\{\operatorname{depth}(R/I^s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ ổn định khi số mũ đủ lớn. Cùng năm đó, S. McAdam - P. Eakin (xem S. McAdam, P. Eakin, 1979) cũng chứng minh được rằng $\{Ass(R/\overline{I^s})\}_{s\in\mathbb{N}}$ là tập ổn định khi s đủ lớn (trong đó $\overline{I^s}$ là bao đóng nguyên của I^s).

Cho đến nay, các bài toán trên vẫn đang thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học. Bên cạnh đó, cũng xuất hiện thêm một vài các bất biến khác được nghiên cứu một cách tích cực như: chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford (S. Cutkosky, 2000; S. Cutkosky, J. Herzog, N. V. Trung, 1999; H. T. Hà, 2011; V. Kodiyalam, 2000; N. V. Trung, H. Wang, 2005), chỉ số chính quy của hàm Hilbert (L. T. Hoa , E. Hyry, 2003; T. N. Trung, 2009), số mũ rút gọn (L. T. Hoa, 2002) ...

Mục đích chính của luận án là nghiên cứu tính ổn định của hai trong số các bất biến kể trên, đó là: nghiên cứu tính ổn định của hàm độ sâu và tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford.

Ta biết rằng lớp các iđêan đơn thức không chứa bình phương là những iđêan quen thuộc và có nhiều ứng dụng. Lớp iđêan này có sự kết nối mạnh mẽ giữa Đại số giao hoán với Tôpô và Tổ hợp. Chính vì vậy, luận án của chúng tôi cũng tập trung nghiên cứu các bất biến có liên quan đến lũy thừa của lớp iđêan quan trọng này.

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là một siêu đồ thị đơn trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$. Iđêan *phủ* liên kết với siêu đồ thị $\mathcal{H}$, là iđêan đơn thức không chứa bình phương, được định nghĩa như sau:

$$J(\mathcal{H}) := (\prod_{i\in\tau} x_i \mid \tau \text{ là một phủ tối tiểu của } \mathcal{H}),$$

Iđêan này còn được xác định bởi phân tích nguyên sơ sau:

$$J(\mathcal{H}) = \bigcap_{E\in\mathcal{E}} (x_i \mid i \in E).$$

Bài toán đầu tiên mà chúng tôi quan tâm nghiên cứu là dáng điệu của hàm độ sâu $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s$, trong đó $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng. Kết quả của M. Brodmann (1979) cho ta biết rằng $\operatorname{depth} R/I^s$, $I \subseteq R$ là iđêan thuần nhất, là hằng số khi số mũ s đủ lớn. Hơn nữa ông còn chỉ ra rằng $\lim\limits_{s\to\infty} \operatorname{depth} R/I^s \leqslant \dim R - \ell(I)$ với $\ell(I)$ là *độ trải giải tích* của iđêan I. J. Herzog, A. Rauf và M. Vladoiu (xem J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu, 2013) đã gọi vị trí nhỏ nhất mà tính ổn định bắt đầu xảy ra là chỉ số ổn định độ sâu của hàm độ sâu, họ ký hiệu là $\operatorname{dstab}(I)$. Tuy nhiên, nếu như giới hạn của dãy $\operatorname{depth} R/I^s$ là hoàn toàn rõ ràng thì với $s < \operatorname{dstab}(I)$, dáng điệu của hàm độ sâu vẫn là vấn đề phức tạp. Chẳng hạn các tác giả H. T. Hà, H. D. Nguyen, N. V. Trung, T. N. Trung đã chỉ ra rằng nếu I là iđêan đơn thức bất kỳ trong vành đa thức thì hàm độ sâu của nó là một hàm số học hội tụ bất kỳ. Chính vì thế, chúng tôi tìm hiểu hai câu hỏi rất tự nhiên như sau: Chính vì thế, chúng tôi tìm hiểu hai câu hỏi rất tự nhiên như sau:

1) Dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan I sẽ như thế nào khi $s < \operatorname{dstab}(I)$?

2) Tìm chặn trên cho $\operatorname{dstab}(I)$?

Với $I \subseteq R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là iđêan đơn thức. Hàm độ sâu của I gọi là hàm giảm nếu depth $R/I^s \geqslant$ depth R/I^{s+1}, với mọi $s \geqslant 1$. Năm 2005, J. Herzog và T. Hibi đã đưa ra câu hỏi rằng: nếu I là iđêan đơn thức không chứa bình phương thì hàm độ sâu có phải là hàm giảm hay không. Tuy nhiên, có một phản ví dụ của T. Kaiser, M. Stehlík, R. Škrekovski đưa ra vào năm 2014 cho giả thuyết của J. Herzog và T. Hibi. Cho đến hiện nay, người ta biết đến một vài lớp iđêan đơn thức mà hàm độ sâu của nó có tính giảm, chẳng hạn: iđêan đơn thức mà tất cả các lũy thừa của nó có thương tuyến tính (J. Herzog, T. Hibi, 2005), iđêan phủ của đồ thị hai phần (A. Constantinescu, M. R. Pournaki, S. A. Seyed Fakhari, N. Terai, S.Yassemi, 2015), lũy thừa hình thức của iđêan đơn thức không chứa bình phương (L. T. Hoa , K. Kimura, N.Terai, T. N. Trung, 2017) và một số các lớp khác.

Trong luận án này, đầu tiên chúng tôi nghiên cứu câu hỏi 1) cho iđêan phủ của lớp siêu đồ thị cân bằng. Chúng tôi chứng minh được rằng depth $R/J(\mathcal{H})^s$ với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng $\mathcal{H}$ là hàm giảm (xem Định lý 2.2). Sau đó, chúng tôi suy ra hệ quả về dáng điệu của hàm depth $R/J(\mathcal{H})^s$ với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị unimodular (xem Hệ quả 2.5), bởi vì Mệnh đề 1.14 cho thấy mọi siêu đồ thị unimodular đều là cân bằng.

Hạn chế hai siêu đồ thị trên xuống trường hợp đồ thị thì ta thu được đồ thị hai phần. Do đó chúng tôi thu lại được kết quả về dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ của đồ thị hai phần giống như trong kết quả (A. Constantinescu, M. R. Pournaki, S. A. Seyed Fakhari, N. Terai, S. Yassemi (2015), "Cohen-Macaulayness and limit behavior of depth for powers of cover ideals", *Communications in Algebra*, **43**, pp. 143–157).

Đối với câu hỏi thứ 2), vào năm 2005, J. Herzog - A. Qureshi đưa ra một giả thuyết là $\operatorname{dstab}(I) < \ell(I)$, trong đó I là iđêan đơn thức không chứa bình phương và $\ell(I) := \dim \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ là độ trải giải tích của iđêan I. Giả thuyết đúng trên một vài lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương, chẳng hạn: iđêan đơn thức không chứa bình phương Veronese (J. Herzog, T. Hibi, 2005), iđêan polymatroidal (J. Herzog, A. A. Qureshi, 2015), iđêan cạnh của một đồ thị (T. N. Trung, 2016), ...

Chúng tôi cũng nghiên cứu câu hỏi này, tuy nhiên đối với hai lớp siêu đồ thị mà chúng tôi nghiên cứu, chúng tôi mới chỉ ra được rằng $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) \leqslant n$ (xem Định lý 2.3 và Hệ quả 2.5), trong đó n là chiều của vành đa thức R. Tuy rằng chưa đạt đến giả thuyết của J. Herzog và A. Qureshi, nhưng chặn mà chúng tôi đạt được là hợp lý (theo nghĩa $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H}))$ bị chặn trên bởi một hàm tuyến tính theo số biến của vành R). Hơn nữa, đối với đồ thị hai phần chúng tôi đã đạt được chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu đúng như giả thiết mà J. Herzog và A. Qureshi đưa ra.

Bài toán tiếp theo mà chúng tôi quan tâm là tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của lũy thừa iđêan phủ liên kết siêu đồ thị unimodular, ký hiệu là reg $J(\mathcal{H})^s$.

Ta biết rằng chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford là một bất biến quan trọng trong Đại số giao hoán và Hình học Đại số. Bất biến này cung cấp nhiều thông tin về độ phức tạp của cấu trúc đại số của môđun phân bậc. Nếu định nghĩa chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của môđun phân bậc hữu hạn sinh M trên một đại số phân bậc chuẩn R theo bậc triệt tiêu nhỏ nhất của môđun đối đồng điều địa phương, thì chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford chính là chặn trên bậc cực đại của một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của M. Mặt khác, nếu R là vành đa thức trên trường k với phân bậc chuẩn và M là $R-$môđun, thì ta biết rằng giải tự do tối tiểu của M có độ dài hữu hạn và chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của M là chặn trên cho tất cả các bậc sinh của các môđun con xoắn của M.

Việc tính toán hay tìm chặn cho chỉ số chính quy là một vấn đề khó, nhưng chỉ số chính quy của luỹ thừa các iđêan thuần nhất có dáng điệu rất đẹp. Với R là vành đa thức và $I \subseteq R$ là iđêan thuần nhất. Năm 1999, D. Cutkosky-J. Herzog-N. V. Trung độc lập với V. Kodiyalam chứng minh rằng: tồn tại các số nguyên không âm d, e và s_0 sao cho $\operatorname{reg}(I^s) = ds + e$ với mọi $s \geqslant s_0$. Hơn nữa, có thể chặn trên hệ số d qua bậc lớn nhất của các phần tử sinh của I. Nếu I được sinh bởi các phần tử cùng bậc thì d chính là bậc của các phần tử sinh đó. Tuy nhiên, việc xác định chính xác số e và vị trí mà tính tuyến tính xảy ra vẫn còn là các câu hỏi phức tạp. Một cách tự nhiên, D. Eisenbud và B. Ulrich đặt ra các câu hỏi như sau: Số e được xác định như thế nào và chặn trên nào của s_0 là hợp lý? Hai vấn đề được nêu ra ở trên thu hút được sự quan tâm của rất nhiều tác giả. Chúng ta cũng biết đến một số chặn phù hợp cho s_0 chẳng hạn khi I là iđêan cạnh của đồ thị rừng và đồ thị unicyclic, hay I là iđêan $\mathfrak{m}-$nguyên sơ. Mặt khác, từ định nghĩa

$$\operatorname{reg} I^s = 1+\operatorname{reg} R/I^s = 1+\max\{a_i(R/I^s)+i \mid i=0,\ldots,\dim R/I\},$$

ta có thể đặt ra câu hỏi tương tự như dáng điệu tiệm cận của $\operatorname{reg} I^s$: liệu rằng $a_i(R/I^s)$ có phải là hàm tuyến tính khi s đủ lớn hay không? Tuy nhiên, S. Cutkosky đã đưa ra một ví dụ rằng $\lim_{s\to\infty} \dfrac{\operatorname{reg} \widetilde{I^s}}{s}$ là một số vô tỷ, nên $a_i(R/I^s)$ không phải là hàm tuyến tính khi n đủ lớn.

Đối với các iđêan đơn thức không chứa bình phương, năm 2010, L. T. Hoa và T. N. Trung đã chỉ ra rằng $a_i(R/I^s)$ là hàm tựa tuyến tính với s đủ lớn với hệ số đầu không đổi. Nhưng bất biến $a_i(R/I^s)$ có tiệm cận đến hàm tuyến tính khi s đủ lớn hay không vẫn là câu hỏi mở.

Như đã nói ở trên, iđêan đơn thức không chứa bình phương là những iđêan quan trọng và có ý nghĩa lớn vì sự kết nối giữa các nhánh quan trọng trong toán học với nhau. Vì vậy, chúng tôi cũng tập trung nghiên cứu chỉ số chính quy đối với một lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương đặc biệt. Đó là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular..

Khi $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular. Chúng tôi chứng minh được tính tiệm cận tuyến tính của bất biến $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ (xem Định lý 3.10). Từ đó có thể suy ra tính tiệm cận đến hàm tuyến tính của $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s$ (xem Định lý 3.11). Chúng tôi cũng chặn trên được số e và s_0 thông qua hạng của siêu đồ thị, bậc sinh cực đại của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$.

Công cụ mà chúng tôi sử dụng để nghiên cứu hai bài toán kể trên là công thức Takayama (xem Y.Takayama, 2005), một sự mở rộng của công thức Hochster cho việc tính môđun đối đồng điều địa phương cho iđêan đơn thức bất kỳ. Bằng việc sử dụng công thức Takayama, chúng tôi chuyển việc nghiên cứu bài toán đại số sang nghiên cứu các vấn đề tổ hợp, cụ thể ở đây là nghiên cứu các phức bậc (xem Định nghĩa 1.11), sau đó từ phức bậc chuyển qua nghiên cứu đỉnh nguyên của một đa diện lồi trong $\mathbb{R}^n$. Vì vậy có thể nói, chúng tôi đã sử dụng lý thuyết về đa diện lồi như một chìa khóa quan trọng để đạt được các kết quả của luận án. Ngoài ra chúng tôi cũng sử dụng một số tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính cho quá trình chứng minh các kết quả chính.

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu cấu trúc của luận án. Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, bảng ký hiệu, danh mục hình vẽ, luận án được chia làm ba chương.

Chương 1 chúng tôi giới thiệu các kiến thức cần thiết cho toàn bộ luận án. Chương này bao gồm sáu mục. Mục 1.1 giới thiệu lại định nghĩa và một số tính chất cơ bản về môđun đối đồng điều địa phương, độ sâu, chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford, bất biến a_i. Mục 1.2 trình bày lại các khái niệm cơ bản của hai lớp siêu đồ thị được chúng tôi dùng trong luận án: siêu đồ thị unimodular và siêu đồ thị cân bằng. Mục 1.3, giới thiệu lại ba lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương liên kết với hai đối tượng tổ hợp là: iđêan Stanley-Reisner liên kết với một phức đơn hình và iđêan phủ và iđêan cạnh liên kết với siêu đồ thị. Trong Mục 1.4, chúng tôi trình bày về đồng điều rút gọn của các phức đơn hình, và công thức Takayama. Trong Mục 1.5, chúng tôi dành để nói về tập lồi đa diện và bài toán quy hoạch tuyến tính. Mục 1.6 chúng tôi chứng minh chi tiết các tính chất về các đỉnh nguyên của đa diện lồi, các tính chất này được dùng rất nhiều lần trong các chương sau.

Trong Chương 2, chúng tôi chứng minh tính ổn định của hàm độ sâu của iđêan phủ. Trong Mục 2.1, chúng tôi trình bày một số vấn đề chung về tính giảm của hàm độ sâu và chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu đối với iđêan thuần nhất trong vành đa thức. Mục 2.2, chúng tôi nghiên cứu tính giảm của dãy $\{\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ và chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng (xem Định lý 2.2), từ đó suy ra tính giảm của $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s$, với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular (xem Hệ quả 2.4). Trong Mục 2.3, chúng tôi nghiên cứu tính giảm của dãy $\{\operatorname{depth} R/J(G)^s\}_{s\in\mathbb{N}}$, với $J(G)$ là iđêan phủ của lớp đồ thị hai phần (xem Định lý 2.15).

Chương 3 chúng tôi dành để nghiên cứu về tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford, cũng như của các bất biến a_i. Cụ thể trong Mục 3.1, chúng tôi giới thiệu chung bài toán về chỉ số chính quy của iđêan đơn thức trong vành đa thức, cũng như động cơ dẫn đến vấn đề nghiên cứu của chúng tôi. Mục 3.2, chúng tôi chứng minh tính tiệm cận của bất biến $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ (xem Định lý 3.10), với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular, đây là một kết quả mới đối với bất biến này. Từ dáng điệu của $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$, chúng tôi chứng minh được kết quả quan trọng về tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy của luỹ thừa iđêan phủ là $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s = d(J(\mathcal{H}))s + e$ (xem Định lý 3.11), trong đó $e \leqslant \dim R/J(\mathcal{H}) - d(J(\mathcal{H})) + 1$ và $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Chương 1

Một số vấn đề chuẩn bị

Chương này nhằm mục đích nhắc lại một số khái niệm và kết quả đã biết của Đại số giao hoán như: môđun đối đồng điều địa phương, độ sâu, chỉ số chính quy giúp cho việc trình bày ở các chương sau được rõ ràng và có hệ thống. Chúng tôi cũng giới thiệu một kết quả hữu dụng để tính chiều của môđun đối đồng điều địa phương của iđêan đơn thức bất kỳ, được gọi là công thức Takayama. Công thức này là công cụ chủ yếu mà chúng tôi dùng cho các chương sau. Chúng tôi cũng nhắc lại một số khái niệm về đa diện lồi và bài toán quy hoạch tuyến tính mà chúng tôi cần dùng để chứng minh các kết quả chính của luận án.

1.1. Về độ sâu và chỉ số chính quy

Chúng tôi trình bày lại định nghĩa và một số tính chất triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương, định nghĩa độ sâu thông qua tính triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương, định nghĩa chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford.

1.2. Siêu đồ thị cân bằng và siêu đồ thị unimodular

Mục này trình bày các khái niệm về siêu đồ thị, siêu đồ thị cân bằng, siêu đồ thị unimodular và mối quan hệ giữa hai lớp siêu đồ thị này.

1.3. Một số cách mô tả iđêan đơn thức không chứa bình phương

Chúng tôi miêu tả một số lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương thường gặp: Iđêan Stanley-Reisner liên kết với phức đơn hình, iđêan phủ và iđêan cạnh liên kết với siêu đồ thị

1.4. Công thức Takayama

Cho I là iđêan đơn thức, ta biết rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$ là $\mathbb{Z}^n$-môđun phân bậc trên R/I. Với mỗi $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, ta có $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}}$ là thành phần phân bậc tại $\boldsymbol{\alpha}$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$. Chú ý rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}}$ là một k-không gian véctơ. Để có thể tính được chiều của không gian véctơ này, luận án sử dụng một công thức được đưa ra bởi Takayama. Trước hết chúng tôi xét phức bậc sau:

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha(I) := \{F \backslash CS_{\boldsymbol{\alpha}} \mid CS_{\boldsymbol{\alpha}} \subseteq F \subseteq \mathcal{V}, \text{ với mọi } x^b \in G(I),\\ \text{tồn tại } i \notin F \text{ sao cho } \alpha_i < b_i\},\end{aligned}$$

Công thức Takayama được phát biểu như sau:

Định lý 1.26. ([Takayama, Định lý 1])

$$\dim_k H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}} = \dim_k \widetilde{H}_{i-|CS_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I); k).$$

Khi I là iđêan đơn thức bất kỳ, việc mô tả $\Delta_\alpha(I^m)$ với $m \geqslant 1$ là tương đối khó. Tuy nhiên, với $I = J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng, luận án đưa ra được sự miêu tả khá rõ ràng như sau:

Bổ đề 1.30. *Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị cân bằng trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ và $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Khi đó với mọi $m \geqslant 1$ ta có*

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^m) = \left\langle \mathcal{V} \setminus E \mid E \in \mathcal{E} \textit{ and } \sum_{i \in E} \alpha_i \leqslant m - 1 \right\rangle.$$

1.5. Tập lồi đa diện và bài toán quy hoạch tuyến tính

Chúng tôi trình bày lại một số định nghĩa, các tính chất cơ bản và một số kết quả quan trọng về tập lồi đa diện và bài toán quy hoạch tuyến tính mà chúng tôi cần dùng trong các chương sau.

1.6. Phức bậc và đa diện lồi

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ với $m \geqslant 1$, $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của $\mathcal{H}$. Khi đó ta có

$$\Delta(J(\mathcal{H})) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_m \rangle$$

là phức đơn hình nhận $J(\mathcal{H})$ làm iđêan Stanley - Reisner.

Giả sử $p \geqslant 0, s \geqslant 1$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ sao cho

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_r \rangle, \tag{1.1}$$

với $1 \leqslant r \leqslant m$.

Để có thể tìm hiểu về các véctơ $\boldsymbol{\alpha}$ thoả mãn Đẳng thức (1.1) luận án xét tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính như sau:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i < t & \text{với } j = 1, \dots, r, \\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j = r+1, \dots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $t \geqslant 1$ và ký hiệu tập nghiệm này là $\mathcal{C}_t$.

Bao đóng của Hệ (1.2) là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant t & \text{với } j = 1, \dots, r, \\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j = r+1, \dots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

và được ký hiệu là $\overline{\mathcal{C}}_t$. Ta có các kết quả sau:

Bổ đề 1.41. *$\overline{\mathcal{C}}_1$ là một đa diện lồi và* $\dim \overline{\mathcal{C}}_1 = n$.

Khi $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng ta có các kết quả sau:

Bổ đề 1.43. *Nếu $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng thì mọi đỉnh của $\overline{\mathcal{C}_1}$ đều là các đỉnh nguyên.*

Ta gọi $\mathcal{P}_t$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant t-1 & \text{với } j = 1, \dots, r, \\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j = k+1, \dots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Đặc biệt chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm nguyên dương của Hệ (1.3) như sau:

Bổ đề 1.46. *Cho* $t \geqslant 1$ *là một số nguyên bất kỳ, nếu* $\mathcal{P}_t \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$ *thì* $\mathcal{P}_{t+1} \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$ *và* $\mathcal{P}_n \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$.

Chương 2

Tính ổn định của hàm độ sâu

Mục đích chính của chương này là nghiên cứu hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với các siêu đồ thị cân bằng và siêu đồ thị unimodular. Chúng tôi chứng minh được rằng hàm độ sâu của các iđêan phủ liên kết với hai lớp siêu đồ thị này là hàm giảm, hơn nữa chúng tôi chỉ ra rằng chiều của vành đa thức là chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu của các iđêan đó. Đặc biệt, chúng tôi chỉ ra chặn trên tốt hơn cho chỉ số ổn định độ sâu của iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần.

2.1. Tính giảm của hàm độ sâu và chặn trên chỉ số ổn định

Cho I là iđêan thuần nhất trong vàng đa thức R. Hàm số học

$$\operatorname{depth}_I(s) := \operatorname{depth} R/I^s, \text{ với } s \geqslant 1,$$

được gọi là *hàm độ sâu* của iđêan I.

Năm 1979, M. Brodmann đã chứng minh một kết quả rất đẹp nói rằng hàm độ sâu là hằng số khi lũy thừa của iđêan đủ lớn. Từ kết quả của M. Brodmann luận án quan tâm hai vấn đề sau:

Vấn đề 1. Hàm độ sâu depth R/I^s của iđêan thuần nhất $I \subseteq R$ sẽ có dáng điệu như thế nào khi $s < \operatorname{dstab}(I)$?

Vấn đề 2. Nếu hàm depth R/I^s, $s \geqslant 1$ là hằng số khi s đủ lớn thì chặn hợp lý cho chỉ số ổn định độ sâu dstab(I) là gì?

2.2. Dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị cân bằng với tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$. Gọi $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng $\mathcal{H}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\mathcal{E} \neq \emptyset$ và do đó $J(\mathcal{H}) \neq 0$.

Kết quả chính đầu tiên của chương này đưa ra dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị cân bằng:

Định lý 2.2. *Cho $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị cân bằng. Khi đó hàm độ sâu của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$ là giảm.*

Sau khi chỉ ra tính đơn điệu của hàm độ sâu, luận án tiếp tục chặn trên chỉ số ổn định độ sâu của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$. Kết quả chính tiếp theo của chương này sẽ là một câu trả lời cho vấn đề 2 mà luận án đã đề cập đến.

Định lý 2.3. *Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là một siêu đồ thị cân bằng trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$. Khi đó*

$$\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^t = n - \ell(J(\mathcal{H})) \text{ với mọi } t \geqslant n.$$

Hơn nữa $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) \leqslant n$.

Vì siêu đồ thị unimodular cũng là siêu đồ thị cân bằng nên ta có kết quả sau:

Hệ quả 2.5. *Cho $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular. Khi đó hàm độ sâu của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$ là hàm giảm. Đặc biệt* $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) \leqslant n$.

2.3. Dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ của đồ thị hai phần

Cho $G = (V, E)$ là đồ thị hai phần, đầu tiên như một hệ quả trực tiếp của Định lý 2.2, chúng tôi có kết quả về dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần như sau:

Mệnh đề 2.8. *Cho G là một đồ thị hai phần bất kỳ. Khi đó $J(G)$ có hàm độ sâu giảm.*

Luận án cũng sử dụng định nghĩa về chỉ số ghép cặp của đồ thị.

Định nghĩa 2.9. *Chỉ số ghép cặp có thứ tự* của đồ thị G được xác định là:

$$\nu_0(G) := \max\{|M| \mid M \subseteq E(G) \text{ là một ghép cặp có thứ tự của } G\}.$$

Để chứng minh các kết kết quả chính tiếp theo của mục này, chúng tôi cần đến các bổ đề sau:

Bổ đề 2.11. *Cho G là một đồ thị hai phần với sự phân hoạch (X, Y). Nếu $v(G) = 2\nu_0(G)$ thì G có một ghép cặp có thứ tự $M = \{\{a_i, b_i\} \mid i = 1, \dots, m\}$, trong đó $m = \nu_0(G)$ sao cho*

$$X = \{a_1, \dots, a_m\} \text{ và } Y = \{b_1, \dots, b_m\}.$$

Bổ đề 2.12. ([L. T. Hoa, K. Kimura, N. Terai, T. N. Trung (2017) (2017), Bổ đề 1.3]) *Cho I là iđêan đơn thức của vành đa thức R và $F \subseteq \{1, \dots, n\}$ sao cho $IR_F \neq R_F$. Gọi $S := k[x_i \mid i \notin F]$ và $J := IR_F \cap S$. Khi đó* $\operatorname{depth} R/I \leqslant |F| + \operatorname{depth} S/J$.

Bổ đề 2.13. ([L. T. Hoa, K. Kimura, N. Terai, T. N. Trung (2017), Bổ đề 1.4]) *Cho I là iđêan đơn thức của vành đa thức R với* depth $R/I = d$. *Giả sử rằng* $H^d_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$ *với* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$. *Gọi* $F = CS_{\boldsymbol{\alpha}}$, $S := k[x_i \mid i \notin F]$ *và* $J := IR_F \cap S$. *Khi đó* depth $R/I = |F| +$ depth S/J.

Trong kết quả chính của phần này luận án chứng minh rằng chặn trên của chỉ số ổn định độ sâu của iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần là độ trải giải tích của iđêan đó.

Định lý 2.15. *Cho G là một đồ thị hai phần với n đỉnh. Khi đó*

$$\operatorname{depth} R/J(G)^s = n - \nu_0(G) - 1 \text{ với mọi } s \geqslant \nu_0(G).$$

Hơn nữa $\operatorname{dstab}(J(G)) \leqslant \nu_0(G)$.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng được một ví dụ cho thấy chặn mà chúng tôi đạt được trong Định lý 2.15 là tối ưu.

Định lý 2.18. *Cho $m \geqslant 1$ là một số nguyên và G là một đồ thị với tập đỉnh là $V(G) = \{1, \ldots, 2m\}$ và tập cạnh là*

$$E(G) = \{\{i, m + j\} \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m\}.$$

Khi đó $\nu_0(G) = m$ *và* $\operatorname{depth} R/J(G)^s = 2m - \nu_0(G) - 1$ *nếu và chỉ nếu* $s \geqslant \nu_0(G)$.

Chương 3

Tính ổn định của chỉ số chính quy

Mục đích chính trong chương này là nghiên cứu tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của luỹ thừa các iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị unimodular khi lũy thừa của iđêan đủ lớn. Dựa trên tính chất đặc biệt rằng các định thức con của ma trận liên thuộc liên kết với siêu đồ thị unimodular chỉ có giá trị là $-1, 0$ hoặc 1, chúng tôi có thể nghiên cứu chỉ số chính quy của các iđêan này một cách chi tiết.

3.1. Chỉ số chính quy của lũy thừa các iđêan đơn thức không chứa bình phương

Từ kết quả của D. Cutkosky, J. Herzog, N. V. Trung (1999) chúng ta biết rằng khi I là iđêan thuần nhất của vành đa thức R, tồn tại các số nguyên d, e và s_0 sao cho

$$\operatorname{reg}(I^s) = dn + e \text{ với mọi } s \geqslant s_0.$$

Trong khi hằng số d có thể được xác định thông qua bậc sinh cực đại của iđêan I, chẳng hạn V. Kodiyalam (1999) chỉ ra rằng nếu tất cả các phần tử sinh tối tiểu của I có cùng bậc α thì $d = \alpha$, thì việc xác định cụ thể, thậm chí ước lượng e và đưa ra chặn trên cho s_0 vẫn là bài toán khó. Chính vì vậy, luận án quan tâm đến hai vấn đề được đưa ra một các tự nhiên bởi Eisenbud và Ulrich như sau:

Vấn đề 1: Tìm chặn trên cho hằng số e;

Vấn đề 2: Tìm chặn trên hợp lý (hiểu theo nghĩa là hàm tuyến tính theo số biến của vành đa thức) cho s_0.

Các vấn đề này hiện nay đang thu hút được rất nhiều các nhà nghiên cứu quan tâm đến.

3.2. Dáng điệu tiệm cận của các bất biến $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ và chỉ số chính quy $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s$

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị unimodular với tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$, tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ và $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Không mất tính tổng quát ta sẽ giả sử $\mathcal{E} \neq \emptyset$ và do đó $J(\mathcal{H}) \neq 0$. Ta gọi hạng của $\mathcal{H}$, ký hiệu $\operatorname{rank}(\mathcal{H})$, là lực lượng cực đại của các cạnh của $\mathcal{E}$, tức là:

$$\operatorname{rank}(\mathcal{H}) = \max\{| E |: E \in \mathcal{E}\}.$$

Trước hết chúng tôi có định nghĩa hay dùng như sau:

Định nghĩa 3.1 Cho $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ là một véctơ và S là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Đặt $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, ta gọi

$$\delta(S) := \max\{|\boldsymbol{\alpha}| \mid \boldsymbol{\alpha} \in S\}.$$

Bổ đề sau đây đóng vai trò như là một chìa khóa quan trọng cho kết quả chính mà chúng tôi thu được.

Bổ đề 3.5. *Cho* $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *là siêu đồ thị unimodular. Khi đó tồn tại các số nguyên không âm* d *và* e, *với* $e \leqslant n^2$, *sao cho*

$$\delta(\mathcal{P}_t) = dt - e \text{ với } t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1,$$

trong đó $r = \operatorname{rank}(\mathcal{H})$.

Để chứng minh kết quả chính đầu tiên của chương này chúng tôi cần đến kết quả như sau:

Bổ đề 3.8. *Giả sử rằng* $a_p(R/J(\mathcal{H})^s) \neq -\infty$ *với* $p \geqslant 0$ *và* $s \geqslant 1$. *Khi đó tồn tại các số nguyên dương* d *và* e *sao cho*

a) $d \leqslant e \leqslant n^2$;

b) $a_p(R/J(\mathcal{H})^t) \geqslant dt - e$ *với* $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$; *và*

c) Nếu $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$, *thì* $a_p(R/J(\mathcal{H})^s) = ds - e$.

Định lý sau đây là một kết quả quan trọng mà chúng tôi đạt được. Nó đưa ra tính tiệm cận tuyến tính của $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ theo biến s.

Định lý 3.9. *Cho* $\mathcal{H}$ *là siêu đồ thị unimodular và* i *là số nguyên không âm bất kỳ. Khi đó hoặc* $a_i(R/J(\mathcal{H})^s) = -\infty$ *với mọi* $s \geqslant 1$, *hoặc tồn tại các số nguyên dương* d *và* e, *với* $d \leqslant e$, *sao cho* $a_i(R/J(\mathcal{H})^s) = ds - e$ *với mọi* $s \geqslant n^2$.

Cuối cùng, chúng tôi thu được kết quả về tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$.

Định lý 3.10. *Cho* $\mathcal{H}$ *là một siêu đồ thị unimodular với* n *đỉnh và có hạng* r. *Khi đó tồn tại các số nguyên không âm* $e \leqslant \dim R/J(\mathcal{H}) - d(J(\mathcal{H})) + 1$ *sao cho* $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s = d(J(\mathcal{H}))s + e$ *với mọi* $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Khi $\mathcal{H}$ là đồ thị hai phần, chúng tôi dễ dàng thu được kết quả sau.

Hệ quả 3.11. *Cho* G *là một đồ thị hai phần với* n *đỉnh. Khi đó* $\operatorname{reg} J(G)^s$ *là một hàm tuyến tính đối với* s *khi* $s \geqslant n + 2$.

KẾT LUẬN

Trong luận án này, bằng các công cụ tổ hợp và tối ưu, chúng tôi đã đạt được một số kết quả chính sau:

- Chứng minh được tính giảm của hàm độ sâu của một số các iđêan đơn thức không chứa bình phương, đồng thời chặn trên được chỉ số ổn định độ sâu của các iđêan đó;
- Chứng minh được tính tiệm cận tuyến tính của bất biến $a_i(R/I^n)$, khi I là iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị;
- Chứng minh được dáng điệu tiệm cận của chỉ số chính quy của lũy thừa các iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị cho trước. Hơn nữa, chúng tôi đã chỉ ra chặn trên hợp lý cho vị trí trở thành hàm tuyến tính của chỉ số chính quy khi lũy thừa của iđêan đủ lớn.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. N. T. Hang and T. N. Trung (2017), *The behavior of depth functions of powers of cover ideals of unimodular hypergraphs*, Ark. Math., Vol. **55**(1), pp. 89-104.
2. N. T. Hang and T. N. Trung (2018), *Regularity of powers of cover ideals of unimodular hypergraphs*, Journal of Algebra, Vol. **513**, pp. 159-176.
3. N. T. Hang, *Stability of depth functions of cover ideals of balanced hypergraphs*, to appear in Journal of Algebra and Its Applications (DOI: 10.1142/S0219498820500553).

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO VÀ THẢO LUẬN TẠI:

- Xêmina Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học
- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học: 10/2015; 10/2016; 10/2017; 10/2018
- Hội nghị Đại số - Hình học - Tôpô (Buôn Ma Thuột): 10/2016
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán (Thái Nguyên): 01/2017
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán (TP Hồ Chí Minh): 09/2017
- Hội nghị Đại số giao hoán và các liên hệ với Tổ hợp, Hình học rời rạc và Lý thuyết kỳ dị (Hà Nội - Hạ Long): 09/2017
- Đại hội Toán học toàn quốc (Nha Trang - Khánh Hòa): 08/2018
- Hội nghị Toán học Việt - Mỹ (Quy Nhơn - Bình Định): 06/2019