VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN THU HẰNG

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA LŨY THỪA CÁC IĐÊAN PHỦ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2019

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN THU HẰNG

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA LŨY THỪA CÁC IĐÊAN PHỦ

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 9 46 01 04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tập thể hướng dẫn:

TS. Trần Nam Trung

GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Hà Nội - 2019

Tóm tắt

Cho $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k và $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ với tập cạnh $\mathcal{E}$. Ta liên kết với $\mathcal{H}$ một iđêan đơn thức không chứa bình phương

$$J(\mathcal{H}) = \bigcap_{E \in \mathcal{E}} (x_i \mid i \in E) \subset R.$$

$J(\mathcal{H})$ được gọi là *iđêan phủ* của siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Luận án tập trung nghiên cứu về tính ổn định của hai bất biến quan trọng là *độ sâu* và *chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* (gọi tắt là chỉ số chính quy) của lũy thừa của iđêan phủ liên kết với hai lớp siêu đồ thị *unimodular* và *cân bằng*, khi lũy thừa đủ lớn. Dựa trên việc nghiên cứu các đỉnh nguyên của các đa diện lồi, luận án đã đạt được các kết quả chính về tính giảm của hàm độ sâu và tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy. Bên cạnh đó, luận án cũng đưa ra các chặn trên hợp lý cho tính ổn định của hai bất biến được nghiên cứu.

Luận án được chia làm 3 chương.

Trong Chương 1, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả về mối quan hệ giữa iđêan đơn thức không chứa bình phương và siêu đồ thị; trình bày lại công thức Takayama; nghiên cứu các tính chất quan trọng của của đa diện lồi có liên quan đến phức bậc; nhắc lại bài toán quy hoạch tuyến tính.

Trong Chương 2, chúng tôi tập trung nghiên cứu về tính giảm của hàm độ sâu và chặn trên chỉ số ổn định của hàm độ sâu của lũy thừa các iđêan phủ.

Trong Chương 3, chúng tôi tập trung nghiên cứu về tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy của lũy thừa các iđêan phủ.

Abstract

Let $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ be a polynomial ring in n variables over a field k, and $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ be a hypergraph with vertex set $\mathcal{V}$, edge set $\mathcal{E}$. We consider a square-free monomial ideal corresponding to $\mathcal{H}$ as follows:

$$J(\mathcal{H}) := \bigcap_{E \in \mathcal{E}} (x_i \mid i \in E) \subseteq R.$$

$J(\mathcal{H})$ is called *cover ideal* of $\mathcal{H}$. The main aim of this thesis focuses on studying the stability of two important invariants in commutative algbra, which are *depth* and *Castelnuovo-Mumford regularity* (regularity for short). We investigate these invariants for large enough powers of cover ideals of balanced hypergraphs, and unimodular hypergraphs.

It is based on investigating polytopes with integral vertices. We obtain some main resutls for non-increasing property of depth functions and the asymptotic behavior of regularity of cover ideals. In addition, this thesis also gives a suitable upper bound for the index of depth stabbility, and a reasonable bound for the stable position of regularity.

This thesis is divided into three chapters.

Chapter 1, we introduce some basic notation, and resutls about the relations between square-free monomial ideals and hypergraphs; recall Takayama's formula; study some useful properties of polytopes.

Chapter 2, we consider the non-increasing property of depth functions and show a suitable upper bound for the index of depth stabbility.

Chapter 3, we investigate the asymptotic behavior of regularity of powers of cover ideals.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Nam Trung và GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của các đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Các kết quả được nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Nguyễn Thu Hằng

Lời cảm ơn

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn, chỉ bảo vô cùng tận tâm và sâu sát của Thầy, Cô tôi: TS. Trần Nam Trung và GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Thầy và Cô đã bỏ ra rất nhiều công sức để không chỉ dẫn dắt, giảng dạy cho tôi về kiến thức, kinh nghiệm và tư duy của người làm Toán, mà còn luôn chỉ bảo cho tôi cách thức nhìn nhận của người làm Toán trong cuộc sống. Thầy, Cô đã không ngừng kiên nhẫn, hết lòng lo lắng cho một học trò có vô vàn khó khăn cả về kiến thức và sức khỏe như tôi. Tôi xin được bày tỏ tấm lòng biết ơn vô hạn đến Thầy, Cô.

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn vô cùng sâu sắc đến GS.TSKH. Lê Tuấn Hoa. Thầy đã luôn quan tâm và sát sao đối với tôi trên con đường học tập. Thầy đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có cơ hội tham gia các hội thảo quan trọng, các buổi học về các vấn đề mới. Với tấm lòng của mình, tôi xin được trân trọng cảm ơn Thầy.

Tôi cũng trân trọng cảm ơn Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau đại học, các phòng chức năng của Viện Toán học, đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi học tập và nghiên cứu tại Viện. Tôi cũng trân trọng cảm ơn GS.TSKH. Ngô Việt Trung, GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường, PGS. TS. Nguyễn Công Minh đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi được tham gia các sinh hoạt khoa học của phòng Đại số, Viện Toán học, các seminar tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán và các seminar tại Đại học Sư phạm Hà Nội. Đặc biệt, tôi xin được bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới TS. Đoàn Trung Cường. Tiến sĩ đã rất tận tâm, nhiệt thành giảng dạy các kiến thức nền tảng về Đại số giao hoán cho tôi trong những năm đầu làm nghiên cứu sinh.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu - trường Đại học Khoa học; Ban chủ nhiệm Khoa Toán Tin - trường Đại học Khoa học; Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi nhất, phù hợp nhất để tôi vừa hoàn thành việc học tập, vừa đảm bảo công việc giảng dạy của mình tại Trường. Tôi xin cảm ơn các anh, chị nghiên cứu sinh đang học tập, nghiên cứu tại Phòng Đại số, Viện Toán học đã giúp đỡ tôi trong học tập và cuộc sống.

Cuối cùng, tôi xin được bày tỏ sự biết ơn vô hạn tới Bố, Mẹ và anh chị em trong gia đình tôi. Đặc biệt là Chồng và hai con nhỏ, những người đã luôn hy sinh rất nhiều, luôn lo lắng, mong mỏi tôi tiến bộ từng ngày, từng tháng. Luận án này tôi xin được dành tặng cho những người mà tôi yêu thương.

Tác giả

Nguyễn Thu Hằng

Bảng các ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	tập các số nguyên
$\mathbb{Q}$	tập các số hữu tỷ
$\mathbb{R}$	tập các số thực
depth	hàm độ sâu
$\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$	siêu đồ thị với tập đỉnh $\mathcal{V}$ và tập cạnh $\mathcal{E}$
$J(\mathcal{H})$	iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị $\mathcal{H}$
$I(\mathcal{H})$	iđêan cạnh liên kết với siêu đồ thị $\mathcal{H}$
$\ell(I)$	độ trải giải tích của iđêan I
$\mathrm{dstab}(I)$	chỉ số ổn định độ sâu của iđêan I
$\mathrm{reg}(I)$	chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của iđêan I
$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$	môđun con xoắn của M
$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$	môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M với giá $\mathfrak{m}$
$G(I)$	tập sinh đơn thức tối tiểu của iđêan I
Δ	phức đơn hình
I_Δ	iđêan Stanley-Reisner liên kết với phức đơn hình Δ
$k[\Delta]$	vành Stanley-Reisner của phức đơn hình Δ
$\mathcal{F}(\Delta)$	tập các mặt cực đại của phức đơn hình Δ
$\Delta(I)$	phức đơn hình liên kết với iđêan I
$A(\mathcal{H})$	ma trận liên thuộc của siêu đồ thị $\mathcal{H}$
$\widetilde{C}_\bullet(\Delta, k)$	phức rút gọn của Δ trên k
$\widetilde{H}_i(\Delta, k)$	đồng điều đơn hình rút gọn thứ i của Δ trên k

CS_α	đối giá của véctơ α
$\Delta_\alpha(I)$	phức bậc
$st_\Delta F$	phức đơn hình con sao của F trong Δ
I^m	lũy thừa thông thường thứ m của iđêan I
$I^{(m)}$	lũy thừa hình thức thứ m của iđêan I
$\mathcal{R}(I)$	vành Rees của iđêan I
$G = (V(G), E(G))$	đồ thị với tập đỉnh $V(G)$ và tập cạnh $E(G)$
M	ghép cặp của đồ thị
$\nu_0(G)$	chỉ số ghép cặp có thứ tự
$a_i(M)$	bậc không triệt tiêu lớn nhất của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$

Danh sách hình vẽ

Mục lục

Mở đầu

Trong Đại số, đặc biệt là Đại số giao hoán, tính ổn định của các bất biến là những vấn đề được quan tâm bởi nhiều nhà nghiên cứu. Nhìn lại lịch sử phát triển của những vấn đề này, ta có thể thấy nó đã được nghiên cứu từ rất lâu. Thật vậy, những năm 50 của thế kỷ 20 một kết quả kinh điển của Hilbert - Samuel [47] đã chỉ ra rằng hàm độ dài $\ell(R/\mathfrak{m}^s)$, trong đó $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether, địa phương, là một đa thức khi số mũ s là đủ lớn, bậc của đa thức này chính là chiều của vành R. Đến năm 1979, các kết quả M. Brodmann [9], [10] đã chỉ ra rằng tập các iđêan nguyên tố liên kết $\{Ass(R/I^s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ và dãy $\{\operatorname{depth}(R/I^s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ ổn định khi số mũ của iđêan đủ lớn. Cùng năm đó, S. McAdam - P. Eakin [48] cũng chứng minh được rằng $\{Ass(R/\overline{I^s})\}_{s\in\mathbb{N}}$ là tập ổn định khi s đủ lớn (trong đó $\overline{I^s}$ là bao đóng nguyên của I^s).

Cho đến nay, các bài toán trên vẫn đang thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học. Bên cạnh đó, cũng xuất hiện thêm một vài các bất biến khác được nghiên cứu một cách tích cực như: chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford ([17], [18], [25], [46], [56]), chỉ số chính quy của hàm Hilbert ([40, 57]), số mũ rút gọn ([38]) ...

Mục đích chính của luận án là nghiên cứu tính ổn định của hai trong số các bất biến kể trên, đó là: nghiên cứu tính ổn định của hàm độ sâu và tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford.

Ta biết rằng lớp các iđêan đơn thức không chứa bình phương là những iđêan quen thuộc và có nhiều ứng dụng. Lớp iđêan này cho thấy sự kết nối mạnh mẽ giữa Đại số giao hoán với Tôpô và Tổ hợp. Chính vì vậy, luận án của chúng tôi tập trung nghiên cứu các bất biến có liên quan đến lũy thừa của lớp iđêan quan trọng này.

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là một siêu đồ thị đơn trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$. Iđêan *phủ* liên kết với siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là iđêan đơn thức không chứa bình phương, được định nghĩa như sau:

$$J(\mathcal{H}) := (\prod_{i \in \tau} x_i \mid \tau \text{ là một phủ đỉnh tối tiểu của } \mathcal{H}).$$

Iđêan này còn được xác định bởi phân tích nguyên sơ:

$$J(\mathcal{H}) = \bigcap_{E \in \mathcal{E}} (x_i \mid i \in E).$$

Bài toán đầu tiên mà chúng tôi quan tâm nghiên cứu là dáng điệu của hàm độ sâu $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s$, trong đó $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị cân bằng. Kết quả của M. Brodmann [10] cho ta biết rằng $\operatorname{depth} R/I^s$, với $I \subseteq R$ là iđêan thuần nhất là hằng số khi số mũ s đủ lớn. Hơn nữa ông còn chỉ ra rằng $\lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{depth} R/I^s \leqslant \dim R - \ell(I)$, với $\ell(I)$ là *độ trải giải tích* của iđêan I. Các tác giả J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu [36] đã gọi vị trí nhỏ nhất mà tính ổn định bắt đầu xảy ra là chỉ số ổn định độ sâu của hàm độ sâu, ký hiệu là $\operatorname{dstab}(I)$. Tuy nhiên, nếu như giới hạn của dãy $\operatorname{depth} R/I^s$ là hoàn toàn rõ ràng thì với $s < \operatorname{dstab}(I)$, dáng điệu của hàm độ sâu vẫn là vấn đề phức tạp. Chẳng hạn trong [26] các tác giả đã chỉ ra rằng nếu I là iđêan đơn thức bất kỳ trong vành đa thức thì hàm độ sâu của nó là một hàm số học hội tụ bất kỳ. Chính vì thế, khi $I = J(\mathcal{H})$ chúng tôi tìm hiểu hai câu hỏi rất tự nhiên như sau:

1) Dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan I sẽ như thế nào khi $s < \operatorname{dstab}(I)$?

2) Tìm chặn trên cho $\operatorname{dstab}(I)$?

Với $I \subseteq R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là iđêan đơn thức. Hàm độ sâu của I gọi là hàm giảm nếu $\operatorname{depth} R/I^s \geqslant \operatorname{depth} R/I^{s+1}$ với mọi $s \geqslant 1$. Năm 2005, J. Herzog, T. Hibi [31] đã đưa ra giả thuyết rằng: nếu I là iđêan đơn thức không chứa bình phương thì hàm độ sâu của nó là hàm giảm. Tuy nhiên, có một phản ví dụ của T. Kaiser, M. Stehlík, R. Škrekovski [44] đưa ra vào năm 2014 cho giả thuyết của J. Herzog và T. Hibi. Cho đến hiện nay, người ta biết đến một vài lớp iđêan đơn thức mà hàm độ sâu của nó có tính giảm, chẳng hạn: iđêan đơn thức mà tất cả các lũy thừa của nó có thương tuyến tính [31], iđêan phủ của đồ thị hai phần [14] và một số các lớp khác (xem [14, 27, 37, 39, 51]).

Trong luận án này, đầu tiên chúng tôi nghiên cứu câu hỏi 1) cho iđêan phủ của lớp siêu đồ thị cân bằng. Chúng tôi chứng minh được rằng $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s$, với $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị cân bằng, là hàm giảm (xem Định lý 2.2). Hệ quả là hàm $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s$ với $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị unimodular (xem Hệ quả 2.5) cũng là hàm giảm, bởi vì mọi siêu đồ thị unimodular đều là cân bằng (xem Mệnh đề 1.14).

Trong trường hợp đồ thị, ta biết các siêu đồ thị cân bằng là lớp đồ thị hai phần. Do đó chúng tôi thu được kết quả về dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần giống như trong [14].

Đối với câu hỏi thứ 2), vào năm 2005 J. Herzog, A. Qureshi [35] đưa ra một giả thuyết là $\operatorname{dstab}(I) < \ell(I)$, trong đó I là iđêan đơn thức không chứa bình phương và $\ell(I) := \dim \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ là độ trải giải tích của iđêan I. Giả thuyết đúng cho một vài lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương, chẳng hạn: iđêan đơn thức không chứa bình phương Veronese [31], iđêan polymatroidal [35], iđêan cạnh của một đồ thị [58], ...

Khi nghiên cứu câu hỏi này đối với lớp siêu đồ thị cân bằng và unimodular, chúng tôi chỉ ra được rằng $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) \leqslant n$ (xem Định lý 2.3 và Hệ quả 2.5), trong đó n là chiều của vành đa thức R. Tuy rằng chưa đạt đến giả thuyết của J. Herzog và A. Qureshi [35], nhưng chặn mà chúng tôi đạt được là hợp lý (theo nghĩa $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H}))$ bị chặn trên bởi một hàm tuyến tính theo số biến của vành R). Hơn nữa, đối với đồ thị hai phần chúng tôi đã đạt được chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu đúng như giả thiết mà J. Herzog và A. Qureshi đưa ra.

Bài toán tiếp theo mà chúng tôi quan tâm là tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của lũy thừa iđêan phủ liên kết siêu đồ thị unimodular $\mathcal{H}$, ký hiệu là reg $J(\mathcal{H})^s$.

Ta biết rằng chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford là một bất biến quan trọng trong Đại số giao hoán và Hình học Đại số. Bất biến này cung cấp nhiều thông tin về độ phức tạp của cấu trúc đại số của môđun phân bậc. Nếu định nghĩa chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của môđun phân bậc hữu hạn sinh M trên một đại số phân bậc chuẩn R theo bậc triệt tiêu nhỏ nhất của môđun đối đồng điều địa phương, thì chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford chính là chặn trên bậc cực đại của một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của M. Mặt khác, nếu R là vành đa thức trên trường k với phân bậc chuẩn và M là $R-$môđun, ta biết rằng giải tự do tối tiểu của M có độ dài hữu hạn và khi đó chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của M là chặn trên cho tất cả các bậc sinh của các môđun con xoắn của M.

Việc tính toán hay tìm chặn cho chỉ số chính quy là một vấn đề khó, nhưng chỉ số chính quy của luỹ thừa các iđêan thuần nhất có dáng điệu rất đẹp. Khi R là vành đa thức và $I \subseteq R$ là iđêan thuần nhất, năm 1999 D. Cutkosky-J. Herzog-N. V. Trung [18] độc lập với V. Kodiyalam [46] chứng minh rằng: tồn tại các số nguyên không âm d, e và s_0 sao cho $\operatorname{reg}(I^s) = ds + e$ với mọi $s \geqslant s_0$. Hơn nữa, có thể chặn trên hệ số d qua bậc lớn nhất của các phần tử sinh của I. Nếu I được sinh bởi các phần tử cùng bậc thì d chính là bậc của các phần tử sinh đó. Tuy nhiên, việc xác định chính xác số e và vị trí mà tính tuyến tính xảy ra vẫn còn là các câu hỏi phức tạp. Một cách tự nhiên, D. Eisenbud và B. Ulrich [20] đặt ra các câu hỏi như sau: Số e được xác định như thế nào và chặn trên nào của s_0 là hợp lý? Hai vấn đề được nêu ra ở trên thu hút được sự quan tâm của rất nhiều tác giả (xem [3, 4, 6, 7, 13, 27]). Chúng ta cũng biết đến một số chặn phù hợp cho s_0 chẳng hạn khi I là iđêan cạnh của đồ thị rừng và đồ thị unicyclic [3, 7, 45]; hay I là iđêan $\mathfrak{m}-$nguyên sơ [6, 13]. Mặt khác, từ định nghĩa

$$\operatorname{reg} I^s = 1 + \operatorname{reg} R/I^s = 1 + \max\{a_i(R/I^s) + i \mid i = 0, \ldots, \dim R/I\},$$

ta có thể đặt ra câu hỏi tương tự như dáng điệu tiệm cận của $\operatorname{reg} I^s$: liệu rằng $a_i(R/I^s)$ có phải là hàm tuyến tính khi s đủ lớn hay không? Tuy nhiên, S. Cutkosky [17] đã đưa ra một ví dụ rằng $\lim_{s\to\infty} \dfrac{\operatorname{reg} \widetilde{I^s}}{s}$ là một số vô tỷ, nên $a_i(R/I^s)$ không phải là hàm tuyến tính khi n đủ lớn.

Đối với các iđêan đơn thức không chứa bình phương, năm 2010 L. T. Hoa và T. N. Trung [41] đã chỉ ra rằng $a_i(R/I^s)$ là hàm tựa tuyến tính với s đủ lớn với hệ số đầu không đổi. Nhưng bất biến $a_i(R/I^s)$ có tiệm cận đến hàm tuyến tính khi s đủ lớn hay không vẫn là câu hỏi mở.

Như đã nói ở trên, iđêan đơn thức không chứa bình phương là những iđêan quan trọng và có ý nghĩa lớn vì sự kết nối giữa các nhánh quan trọng trong toán học với nhau. Vì vậy, chúng tôi cũng tập trung nghiên cứu chỉ số chính quy đối với một lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương đặc biệt. Đó là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular.

Khi $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular. Chúng tôi chứng minh được tính tiệm cận tuyến tính của bất biến $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ (xem Định lý 3.10). Từ đó có thể suy ra tính tiệm cận đến hàm tuyến tính của $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s$ (xem Định lý 3.11). Chúng tôi cũng chặn trên được số e và s_0 thông qua hạng của siêu đồ thị, bậc sinh cực đại của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$.

Công cụ mà chúng tôi sử dụng để nghiên cứu hai bài toán kể trên là công thức Takayama [54], một sự mở rộng của công thức Hochster cho việc tính môđun đối đồng điều địa phương của iđêan đơn thức bất kỳ. Bằng việc sử dụng công thức Takayama, chúng tôi chuyển việc nghiên cứu bài toán đại số sang nghiên cứu các vấn đề tổ hợp, cụ thể ở đây là nghiên cứu các phức bậc (xem Định nghĩa (1.10)), sau đó từ phức bậc chuyển qua nghiên cứu đỉnh nguyên của một đa diện lồi trong $\mathbb{R}^n$. Vì vậy có thể nói, chúng tôi đã sử dụng lý thuyết về đa diện lồi như một chìa khóa quan trọng để đạt được các kết quả của luận án. Ngoài ra chúng tôi cũng sử dụng một số tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính cho quá trình chứng minh các kết quả chính.

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu cấu trúc của luận án. Ngoài bảng ký hiệu, danh mục hình vẽ, mục lục, phần mở đầu, phần kết luận, bảng thuật ngữ, luận án được chia làm ba chương chính.

Chương 1 chúng tôi giới thiệu các kiến thức cần thiết cho toàn bộ luận án. Chương này bao gồm sáu mục. Mục 1.1 trình bày lại định nghĩa và một số tính chất cơ bản về môđun đối đồng điều địa phương, độ sâu, chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford, bất biến a_i. Mục 1.2 trình bày lại các khái niệm cơ bản của hai lớp siêu đồ thị được chúng tôi dùng trong luận án: siêu đồ thị unimodular và siêu đồ thị cân bằng. Mục 1.3, giới thiệu lại ba lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương liên kết với hai đối tượng tổ hợp là: iđêan Stanley-Reisner liên kết với phức đơn hình, iđêan phủ và iđêan cạnh liên kết với siêu đồ thị. Trong Mục 1.4, chúng tôi trình bày về đồng điều rút gọn của các phức đơn hình và công thức Takayama. Trong Mục 1.5, chúng tôi dành để nói về tập lồi đa diện và bài toán quy hoạch tuyến tính. Mục 1.6 chúng tôi chứng minh chi tiết các tính chất về các đỉnh nguyên của đa diện lồi, các tính chất này được dùng rất nhiều lần trong các chương sau.

Trong Chương 2, chúng tôi chứng minh tính ổn định của hàm độ sâu của iđêan phủ. Trong Mục 2.1, chúng tôi trình bày một số vấn đề chung về tính giảm của hàm độ sâu và chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu đối với iđêan thuần nhất trong vành đa thức. Mục 2.2, chúng tôi nghiên cứu tính giảm của dãy $\{\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s\}_{s\in\mathbb{N}}$, với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng (xem Định lý 2.2), từ đó suy ra tính giảm của $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s$, với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular (xem Hệ quả 2.5) và đưa ra chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu (xem Định lý 2.3). Trong mục 2.3, chúng tôi nghiên cứu tính giảm của dãy $\{\operatorname{depth} R/J(G)^s\}_{s\in\mathbb{N}}$, với $J(G)$ là iđêan phủ của lớp đồ thị hai phần (xem Định lý 2.15).

Chương 3 chúng tôi dành để nghiên cứu về tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford, cũng như của các bất biến a_i. Cụ thể trong Mục 3.1, chúng tôi giới thiệu chung bài toán về chỉ số chính quy của iđêan đơn thức trong vành đa thức, cũng như động cơ dẫn đến vấn đề nghiên cứu của chúng tôi. Mục 3.2, chúng tôi chứng minh tính tiệm cận của bất biến $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ (xem Định lý 3.10), với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị unimodular, đây là một kết quả mới đối với bất biến này. Từ dáng điệu của $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$, chúng tôi chứng minh được kết quả quan trọng về tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy của luỹ thừa iđêan phủ là $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s = d(J(\mathcal{H}))s + e$ (xem Định lý 3.11), trong đó $e \leqslant \dim R/J(\mathcal{H}) - d(J(\mathcal{H})) + 1$ và $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Các kết quả của luận án được chúng tôi công bố trong các bài báo [28], [29], [30].

Một số thuật ngữ tiếng Việt chúng tôi dựa vào Luận án Tiến sĩ Khoa học của GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa [1].

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhằm mục đích nhắc lại một số khái niệm và kết quả đã biết của Đại số giao hoán như: môđun đối đồng điều địa phương, độ sâu, chỉ số chính quy giúp cho việc trình bày ở các chương sau được rõ ràng và có hệ thống. Chúng tôi cũng giới thiệu một kết quả hữu dụng để tính chiều của môđun đối đồng điều địa phương của iđêan đơn thức bất kỳ, được gọi là công thức Takayama. Công thức này là công cụ chủ yếu mà chúng tôi dùng cho các chương sau. Chúng tôi cũng nhắc lại một số khái niệm về đa diện lồi và bài toán quy hoạch tuyến tính mà chúng tôi cần dùng để chứng minh các kết quả chính của luận án.

1.1. Độ sâu và chỉ số chính quy

Trong mục này ta xét R là một vành giao hoán Noether, phân bậc chuẩn, $\mathfrak{m}$ là iđêan phân bậc cực đại của R và M là $R-$môđun hữu hạn sinh. Khi đó

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) := \bigcup_{t \geqslant 1} (0 \underset{M}{:} \mathfrak{m}^t),$$

trong đó $(0 \underset{M}{:} \mathfrak{m}^t) = \{x \in M \mid \mathfrak{m}^t x = 0\}$ gọi là *môđun con xoắn* của M.

Ta có $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\bullet)$ là hàm tử hiệp biến, khớp trái từ phạm trù các $R-$môđun vào phạm trù các $R-$môđun.

Giả sử giải nội xạ của $R-$môđun M là:

$$\mathcal{I}:\ 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow \cdots.$$

Tác động hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{m}}(\bullet)$ vào giải nội xạ $\mathcal{I}$ của M, ta thu được một phức các $R-$môđun sau:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(I^0) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(d^0)} \Gamma_{\mathfrak{m}}(I^1) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(d^1)} \Gamma_{\mathfrak{m}}(I^2) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{m}}(d^2)} \cdots$$

Đặt $H^i_{\mathfrak{m}}(M) := \ker \Gamma_{\mathfrak{m}}(d^{i+1})/\operatorname{im}\Gamma_{\mathfrak{m}}(d^i)$ thì $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ được gọi là *môđun đối đồng điều địa phương thứ i* của M với giá $\mathfrak{m}$.

Ta có một số kết quả về tính triệt tiêu và không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương như sau.

Định lý 1.1. ([12, Định lý 3.5.7, trang 132]) *Cho M là $R-$môđun. Khi đó:*

1) $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ với $i = \dim M$ hoặc $i = \operatorname{depth} M$,

2) $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ với $i < \operatorname{depth} M$ hoặc $i > \dim M$.

Nếu M là một $R-$môđun phân bậc hữu hạn sinh, thì môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ cũng là R-môđun phân bậc và triệt tiêu tại bậc đủ lớn. Điều đó được thể hiện thông qua kết quả sau:

Định lý 1.2. ([11, Định lý 16.1.5, trang 348]) *Cho R là vành phân bậc dương và M là $R-$môđun phân bậc hữu hạn sinh, khi đó tồn tại số nguyên dương r sao cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_t = 0$ với mọi $i \geqslant 0$ và với mọi $t \geqslant r$.*

Chi tiết hơn về định nghĩa và tính chất của môđun đối đồng điều địa phương có thể xem trong [11] và [12].

Ta biết rằng phần tử $a \in R$ được gọi là phần tử *M-chính quy* nếu $ax \neq 0$ với mọi $0 \neq x \in M$. Một dãy $a_1, \ldots, a_t \in R$ được gọi là *dãy chính quy* nếu các điều kiện sau thoả mãn:

1) $(a_1, \ldots, a_t)M \neq M$;

2) a_{i+1} là phần tử $M/(a_1, \ldots, a_i)M$-chính quy, với mọi $i = 1, \ldots, t-1$.

Dãy $a_1, \ldots, a_t \in R$ được gọi là dãy *chính quy cực đại* nếu không thể tìm được một phần tử $a_{t+1} \in R$ sao cho $a_1, \ldots, a_{t+1}$ là dãy chính quy của R.

Chúng tôi quan tâm đến dãy chính quy thuần nhất cực đại, tức là dãy chính quy cực đại mà các phần tử của dãy là các phần tử thuần nhất. Khi đó độ dài của các dãy chính quy cực đại trong iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ là một số không đổi. Số này được gọi là *độ sâu* của M, được ký hiệu là $\operatorname{depth} M$.

Có thể thấy sau chiều thì độ sâu của vành là bất biến quan trọng có nhiều ứng dụng trong đại số giao hoán. Để có thể tính được độ sâu có rất nhiều cách. Tuy nhiên trong luận án này, chúng tôi dùng kết quả sau [12, Định lý 3.5.7, trang 132] để xác định độ sâu của một $R-$môđun M cho trước

$$\operatorname{depth} M := \min\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}. \tag{1.1}$$

Tính triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương là một thông tin quan trọng. Từ tính triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương, chúng ta có thông tin về độ sâu, về các bất biến $a_i(M)$ và *chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* của $R-$môđun hữu hạn sinh M (chi tiết hơn về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford có thể xem trong [19], [52] và [55]). Các bất biến này được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.3. Cho M là $R-$môđun phân bậc hữu hạn sinh và $i \geqslant 0$ là một số nguyên bất kỳ. Đặt

$$a_i(M) := \begin{cases} \max\{t \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_t \neq 0\} & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0, \\ -\infty & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun M được định nghĩa là

$$\operatorname{reg}(M) := \max\{a_i(M) + i \mid i \geqslant 0\}. \tag{1.3}$$

Chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford (gọi tắt là chỉ số chính quy), tuy rằng được nghiên cứu muộn hơn độ sâu, nhưng nó cũng là một bất biến thu hút được sự quan tâm rất lớn của các nhà nghiên cứu trong những năm gần đây (xem chẳng hạn [13], [18], [25], [27], [46], [56], ...).

Nếu $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức trên trường k và M là $R-$môđun phân bậc hữu hạn sinh. Theo Định lý Hilbert về xoắn, M có giải tự do tối tiểu có độ dài hữu hạn (xác định duy nhất sai khác một đẳng cấu) như sau:

$$0 \longrightarrow F_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

với $p \leqslant n$ và $F_i = \bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{ij}(M)},\ i = 0, \ldots, p$ là các R-môđun tự do phân bậc hữu hạn sinh. Khi đó chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun M được xác định qua định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.4. Cho M là $R-$môđun phân bậc và gọi

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{p,j}(M)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

là giải tự do tối tiểu của M. Khi đó chỉ số chính quy của M là:

$$\operatorname{reg}(M) := \max\{j - i \mid \beta_{i,j}(M) \neq 0\}. \tag{1.4}$$

Chú ý 1.5. Nhìn vào giải tự do dễ thấy rằng nếu I là một iđêan của R thì

$$\operatorname{reg}(I) = \operatorname{reg}(R/I) + 1. \tag{1.5}$$

Ví dụ 1.6. Cho $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ và $I = (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4)$. Ta có giải tự do tối tiểu của R/I là

$$0 \longrightarrow R(-4) \longrightarrow R(-3)^4 \longrightarrow R(-2)^4 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.$$

Khi đó $\operatorname{reg}(R/I) = 1$.

1.2. Siêu đồ thị cân bằng và siêu đồ thị unimodular

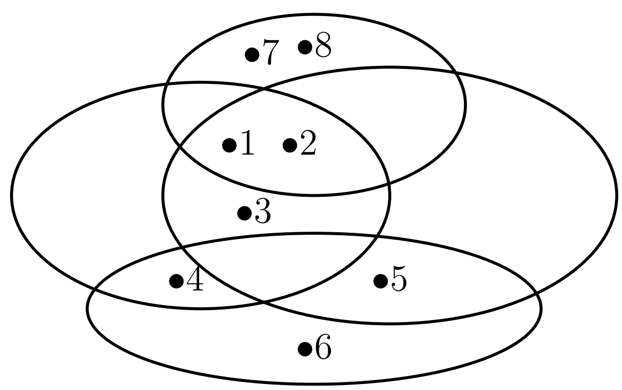
Cho $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ và gọi $\mathcal{E}$ là một họ các tập con, khác rỗng của $\mathcal{V}$, khi đó cặp $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ được gọi là một *siêu đồ thị* với tập đỉnh $\mathcal{V}$ và tập cạnh $\mathcal{E}$. Trong suốt luận án này, chúng tôi chỉ xét siêu đồ thị đơn, tức là nếu $E_i, E_j \in \mathcal{E}$ sao cho $E_i \subseteq E_j$ thì $E_i = E_j$. Như vậy, nếu mỗi cạnh của siêu đồ thị có lực lượng bằng hai thì $\mathcal{H}$ là một *đồ thị*. Do đó, siêu đồ thị là khái niệm tổng quát của đồ thị.

Chú ý rằng nếu $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ thì ta có thể xác định được siêu đồ thị $\mathcal{H}$ thông qua một ma trận liên kết với siêu đồ thị được gọi là *ma trận liên thuộc* và ký hiệu là $A(\mathcal{H}) = (a_{ji})_{m\times n}$, trong đó $a_{ji} = 0$ nếu $i \notin E_j$ và $a_{ji} = 1$ nếu $i \in E_j$.

Ví dụ 1.7. Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị với tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1 = \{1, 2, 3, 4\}, E_2 = \{1, 2, 7, 8\}, E_3 = \{1, 2, 3, 5\}, E_4 = \{4, 5, 6\}\}$.

Ma trận liên thuộc liên kết với $\mathcal{H}$ là:

$$A(\mathcal{H}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Hình 1.1: Siêu đồ thị

Định nghĩa 1.8. a) Cho $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V}$. Một chu trình có độ dài k trong $\mathcal{H}$ là một dãy $(i_1, E_1, i_2, E_2, i_3, \ldots, i_k, E_k, i_1)$ sao cho:

- $E_1, \ldots, E_k$ là các cạnh phân biệt của $\mathcal{H}$;

- $i_1, \ldots, i_k$ là các đỉnh phân biệt của $\mathcal{H}$ thỏa mãn $i_t, i_{t+1} \in E_t$ với $t = 1, \ldots, k-1$;
- $i_k, i_1 \in E_k$.

b) $\mathcal{H}$ được gọi là siêu đồ thị *cân bằng* nếu mọi chu trình lẻ của $\mathcal{H}$ (xác định duy nhất sai khác hoán vị của các đỉnh và các cạnh) có một cạnh chứa ít nhất ba đỉnh của chu trình.

Nhận xét 1.9. Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ được gọi là cân bằng nếu nó không chứa các ma trận vuông con có dạng

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

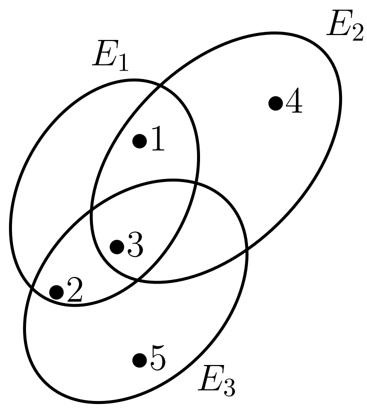
trong đó $k \geq 3$ là một số lẻ (B_k là ma trận có tổng các hàng, các cột đều bằng 2).

Ta có thể thấy siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là cân bằng nếu ma trận liên thuộc của nó là ma trận cân bằng.

Ví dụ 1.10. Cho siêu đồ thị $\mathcal{H}$ với tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1 = \{1, 2, 3\}, E_2 = \{1, 3, 4\}, E_3 = \{2, 3, 5\}\}$. Siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là cân bằng vì nó có duy nhất một chu trình lẻ

$$1, \{1, 2, 3\}, 2, \{2, 3, 5\}, 3, \{1, 3, 4\}, 1$$

trong đó cạnh $E_1 = \{1, 2, 3\}$ của chu trình chứa 3 đỉnh của chu trình.



Hình 1.2: Siêu đồ thị cân bằng

Một lớp siêu đồ thị con của lớp đồ thị cân bằng mà chúng tôi nghiên cứu, đó là các siêu đồ thị unimodular. Lớp này được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.11. Siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là *unimodular* nếu mọi ma trận vuông con của ma trận liên thuộc $A(\mathcal{H})$ có định thức là $-1, 0$ hoặc 1.

Nhận xét 1.12. Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ được gọi là ma trận unimodular hoàn toàn nếu mọi ma trận vuông con của nó có định thức là -1 hoặc 0, hoặc 1. Do đó, siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular nếu ma trận liên thuộc của nó là ma trận unimodular hoàn toàn.

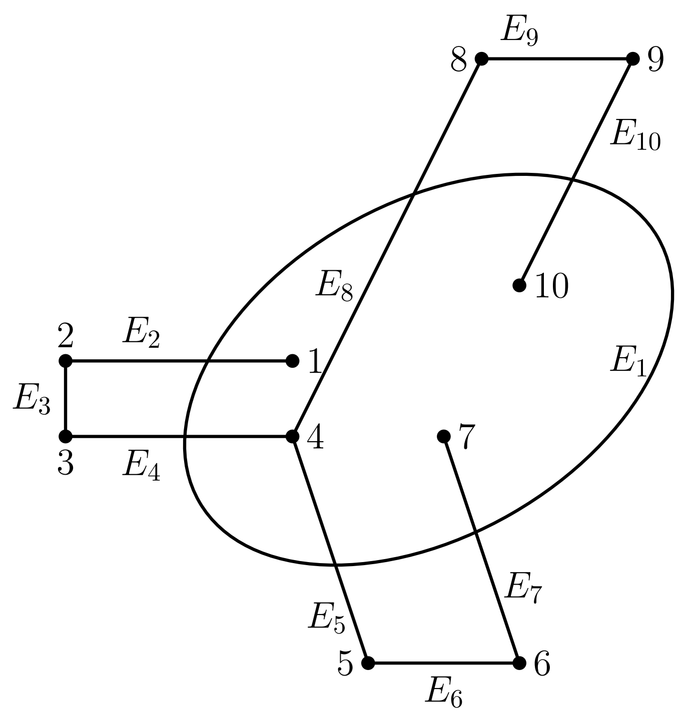
Ví dụ 1.13. Siêu đồ thị trong Ví dụ 1.7 là siêu đồ thị unimodular.

Hai lớp siêu đồ thị này có mối quan hệ như sau

Mệnh đề 1.14. ([5, Ví dụ 1, trang 172]) *Siêu đồ thị unimodular là siêu đồ thị cân bằng.*

Ngược lại, có những siêu đồ thị là cân bằng nhưng không unimodular. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1.15. Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị với tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1 = \{1, 4, 7, 10\}, E_2 = \{1, 2\}, E_3 = \{2, 3\}, E_4 = \{3, 4\}, E_5 = \{4, 5\}, E_6 = \{5, 6\}, E_7 = \{6, 7\}, E_8 = \{4, 8\}, E_9 = \{8, 9\}, E_{10} = \{9, 10\}\}$.



Hình 1.3: Siêu đồ thị cân bằng nhưng không unimodular

Ma trận liên thuộc của $\mathcal{H}$ là:

$$A(\mathcal{H}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy $\det(A(\mathcal{H})) = 2$, vậy nên $\mathcal{H}$ không là siêu đồ thị unimodular. Tuy nhiên $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng vì nó có duy nhất một chu trình lẻ (sai khác hoán vị của các đỉnh và các cạnh):

$$1, E_2, 2, E_3, 3, E_4, 4, E_5, 5, E_6, 6, E_7, 7, E_1, 1$$

và chu trình này có cạnh E_1 chứa 3 đỉnh $1, 4, 7$ của chu trình.

1.3. Một số cách mô tả iđêan đơn thức không chứa bình phương

Cho $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k. Một đơn thức trong R là một biểu thức có dạng $x^a := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, trong đó $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ và $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Iđêan $I \subset R$ được gọi là iđêan đơn thức nếu nó có một tập sinh gồm các đơn thức. Từ Bổ đề Dickson (xem [2, Bổ đề 4.6, trang 43]) ta thấy mọi iđêan đơn thức đều có tập sinh đơn thức tối tiểu và tập này là hữu hạn. Khi đó ta ký hiệu tập sinh tối tiểu của I là $G(I)$. Iđêan I được gọi là iđêan *đơn thức không chứa bình phương* nếu các đơn thức của tập $G(I)$ đều có dạng x^a với $a \in \{0, 1\}^n$.

1.3.1. Iđêan Stanley-Reisner

Một *phức đơn hình* Δ trên tập $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ là tập hợp bao gồm các tập con của $\mathcal{V}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $F \in \Delta$ và $H \subseteq F$ thì $H \in \Delta$.

Với $F = \{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ bất kỳ, ta đặt $x_F = x_{i_1} \cdots x_{i_s}$.

Định nghĩa 1.16. Cho Δ là một phức đơn hình trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$. Iđêan Stanley-Reisner liên kết với Δ là một iđêan đơn thức không chứa bình phương được xác định như sau:

$$I_\Delta := (x_F \mid F \notin \Delta) \subseteq R.$$

Nhận xét 1.17. Với mỗi $F \in \Delta$, ta gọi F là một mặt của Δ. Ta ký hiệu $\dim F :=\mid F \mid -1$ và gọi là *chiều* của mặt F. Khi đó $\dim(\Delta) := \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$ gọi là *chiều của phức đơn hình* Δ. Mặt lớn nhất theo quan hệ bao hàm được gọi là *mặt cực đại* của Δ. Nếu ký hiệu tập các mặt cực đại là $\mathcal{F}(\Delta)$ thì ta có $\Delta = \langle F \mid F \in \mathcal{F}(\Delta) \rangle$. Nếu Δ không chứa mặt nào thì ta gọi Δ là phức đơn hình trống.

Với mỗi $F \notin \Delta$, ta gọi F là một *không mặt* của Δ. Không mặt F được gọi là cực tiểu của Δ nếu F là một không mặt và không có một tập con thực sự nào của F là không mặt của Δ. Theo Định nghĩa 1.16, có thể thấy I_Δ được sinh bởi các đơn thức tương ứng với các không mặt của Δ. Hơn nữa, nếu $F,\ G \subseteq \{1, \dots, n\}$ và $F \subseteq G$, thì $x_F \mid x_G$, do đó ta thấy $G(I_\Delta)$ gồm các đơn thức tương ứng với các không mặt cực tiểu của Δ.

Ngoài ra, I_Δ có thể xác định thông qua phân tích nguyên sơ như sau:

Bổ đề 1.18. ([49, Định lý 1.7, trang 5]) *Cho Δ là phức đơn hình trên tập đỉnh $\mathcal{V}$. Khi đó I_Δ có phân tích nguyên sơ là*

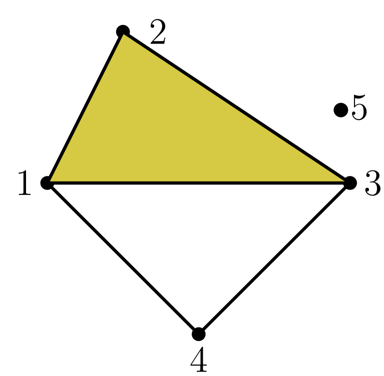
$$I_\Delta = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} (x_i \mid i \notin F).$$

Định nghĩa 1.19. Cho Δ là một phức đơn hình trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$. Vành thương $k[\Delta] := R/I_\Delta$ được gọi là vành *Stanley-Reisner* của Δ.

Ví dụ 1.20. Cho $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, nếu Δ là tập bao gồm tất cả các tập con (bao gồm cả tập $\emptyset$) của các tập $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$, thì Δ là phức đơn hình trên $\mathcal{V}$ với $\dim(\Delta) = 2$. Khi đó

$$\Delta = \langle \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{5\}\} \rangle .$$

Ta có minh họa về mặt hình học của phức đơn hình Δ như sau:



Hình 1.4: Phức đơn hình

Iđêan Stanley-Reisner liên kết với Δ là:

$$\begin{aligned} I_\Delta &= (x_2x_4, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_1x_5, x_1x_3x_4) \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \cap (x_2, x_2, x_5) \cap (x_1, x_2, x_5) \cap (x_4, x_5). \end{aligned}$$

Ngược lại, nếu I là iđêan đơn thức không chứa bình phương thì nó là iđêan Stanley-Reisner tương ứng với một phức đơn hình được xác định:

$$\Delta(I) := \{\{i_1 \dots, i_r\} \subseteq \mathcal{V} \mid x_{i_1} \dots x_{i_r} \notin I\}.$$

Chú ý rằng nếu I chỉ là iđêan đơn thức thì $\Delta(I)$ là phức đơn hình tương ứng với iđêan đơn thức không chứa bình phương $\sqrt{I}$, trong đó nếu $G(I) = \{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n\}$ thì $G(\sqrt{I}) = \{\prod x_i \mid a_i \neq 0\}$.

Như vậy có thể thấy mối quan hệ tương ứng một - một giữa tập các phức đơn hình trên $\mathcal{V}$ và tập các iđêan đơn thức không chứa bình phương của R. Nhờ mối quan hệ này mà ta có thể nghiên cứu các tính chất của iđêan đơn thức không chứa bình phương thông qua các đối tượng tổ hợp và ngược lại.

1.3.2. Iđêan phủ của siêu đồ thị

Cho $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V}$ và tập cạnh $\mathcal{E}$. Tập con $C \subseteq \mathcal{V}$ được gọi là *tập phủ đỉnh* (gọi tắt là phủ) của $\mathcal{H}$ nếu $C \cap E \neq \emptyset$, với mọi $E \in \mathcal{E}$. Khi đó *iđêan phủ* của $\mathcal{H}$ được xác định là:

$$J(\mathcal{H}) := (\prod_{i \in \tau} x_i \mid \tau \text{ là một phủ tối tiểu của } \mathcal{H}), \tag{1.6}$$

trong đó phủ tối tiểu τ có nghĩa là một phủ mà không có tập con thực sự nào của τ là phủ đỉnh.

Dễ thấy rằng iđêan phủ cũng là một iđêan đơn thức không chứa bình phương, do đó có tương ứng một - một giữa tập các iđêan đơn thức không chứa bình phương trong vành đa thức $R = k[x_1, \dots, x_n]$ và tập các iđêan phủ liên kết với các siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$.

Ngoài cách biểu diễn như (1.6), iđêan phủ còn có thể viết thông qua phân tích nguyên sơ như sau:

$$J(\mathcal{H}) = \bigcap_{E\in\mathcal{E}} (x_i \mid i \in E). \tag{1.7}$$

Ví dụ 1.21. Từ Ví dụ 1.10 ta thấy tập các phủ tối tiểu của $\mathcal{H}$ là: $\{\{3\}, \{1,2\}, \{1,5\}\}$. Khi đó, iđêan phủ của $\mathcal{H}$ là:

$$J(\mathcal{H}) = (x_3, x_1x_2, x_1x_5).$$

Kết hợp giữa Bổ đề 1.18 và Đẳng thức (1.7) ta thấy $J(\mathcal{H})$ là iđêan Stanley-Reisner tương ứng với phức đơn hình

$$\Delta(J(\mathcal{H})) = \langle \mathcal{V} \setminus E \mid E \in \mathcal{E} \rangle\,. \tag{1.8}$$

Ngoài iđêan phủ, còn có một lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương khác liên kết với siêu đồ thị $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, đó là iđêan cạnh của siêu đồ thị, ký hiệu là $I(\mathcal{H})$. Lớp này được định nghĩa như sau:

$$I(\mathcal{H}) := (\prod_{i\in E} x_i \mid E \in \mathcal{E}). \tag{1.9}$$

Đối với một siêu đồ thị cho trước, hai iđêan phủ và cạnh sẽ có mối quan hệ ràng buộc thông qua định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.22. ([49, Định nghĩa 1.35, trang 16]) Cho $I = (x^{a_1}, \dots, x^{a_r})$ là iđêan đơn thức không chứa bình phương. *Đối ngẫu Alexander* của I, ký hiệu là I^*, là iđêan đơn thức không chứa bình phương được xác định:

$$I^* = m^{a_1} \cap \ldots \cap m^{a_r},$$

trong đó $m^{a_i} = (x_j | j \in a_i, j \neq 0)$.

Nhận xét 1.23. Từ các Công thức (1.7) và (1.9), cùng với Định nghĩa 1.22 ta có $I(\mathcal{H})^* = J(\mathcal{H})$.

1.4. Công thức Takayama

Giả sử Δ là phức đơn hình chiều d trên tập $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$, đặt $F_i(\Delta) = \{\sigma \in \Delta \mid \dim(\sigma) = i\}$, ta ký hiệu $k^{F_i(\Delta)}$ là k-không gian véctơ có cơ sở là $\{e_\sigma \mid \sigma \in F_i(\Delta)\}$.

Định nghĩa 1.24. Phức rút gọn của Δ trên k là một phức

$$\widetilde{C}_\bullet(\Delta, k) : 0 \longrightarrow k^{F_d(\Delta)} \xrightarrow{\partial_d} \cdots \xrightarrow{\partial_1} k^{F_0(\Delta)} \xrightarrow{\partial_0} k^{F_{-1}(\Delta)} \longrightarrow 0,$$

trong đó các vi phân $\partial_i : k^{F_i(\Delta)} \longrightarrow k^{F_{i-1}(\Delta)}$ được xác định như sau:

$$\partial_i(e_\sigma) = \sum_{j \in \sigma} \operatorname{sign}(j, \sigma) e_{\sigma \setminus j},$$

với $\operatorname{sign}(j, \sigma) = (-1)^{t-1}$ nếu j là phần tử thứ t của σ khi viết các phần tử của σ theo thứ tự tăng dần.

Khi đó $\widetilde{H}_i(\Delta, k) := \ker(\partial_i)/\operatorname{im}(\partial_{i+1})$ được gọi là *đồng điều rút gọn thứ* i của Δ trên k.

Chúng tôi nhắc lại một vài tính chất đơn giản, nhưng cần thiết của $\widetilde{H}_i(\Delta, k)$.

Nhận xét 1.25. 1) $\widetilde{H}_i(\Delta, k) = 0$ nếu $i < -1$ và $i > d$;

2) $\widetilde{H}_{-1}(\Delta, k) \cong k$ nếu $\Delta = \{\emptyset\}$ và $\widetilde{H}_{-1}(\Delta, k) = 0$ nếu $\Delta \neq \{\emptyset\}$;

3) Với $F \in \Delta$ ta xác định một phức đơn hình con của Δ, ký hiệu $st_\Delta F$, như sau:

$$st_\Delta F := \{G \in \Delta \mid G \cup F \in \Delta\},$$

phức con này được gọi là phức đơn hình sao của F. Phức đơn hình Δ được gọi là *phức nón* nếu tồn tại một đỉnh $i \in \mathcal{V}$ sao cho $\Delta = st_\Delta(i)$. Đối với phức nón ta có $\widetilde{H}_i(\Delta, k) = 0$ với mọi i (xem [59, Mệnh đề 5.2.5, trang 140]).

4) Phức đơn hình Δ gọi là phức acyclic nếu $\widetilde{H}_i(\Delta, k) = 0$ với mọi i. Do vậy mọi nón đều là phức acyclic.

Khi $R = k[x_1, \ldots .x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k ta thấy $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ là iđêan phân bậc cực đại duy nhất của R. Gọi I là một iđêan đơn thức của R. Từ Công thức (1.1) ta có:

$$\operatorname{depth}(R/I) = \min\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(R/I) \neq 0\}.$$

Do R/I có cấu trúc của $\mathbb{N}^n$-phân bậc nên $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$ là $\mathbb{Z}^n$-môđun phân bậc trên R/I. Với mỗi $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, ta ký hiệu $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}}$ là thành phần phân bậc tại bậc $\boldsymbol{\alpha}$ của $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$. Chú ý rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}}$ là một k-không gian véctơ. Để có thể tính được chiều của không gian véctơ này, chúng ta sử dụng một công thức được đưa ra bởi Takayama [54, Định lý 1]. Công thức này là một sự mở rộng của công thức Hochster [43, Định lý 4.1] cho iđêan đơn thức không chứa bình phương.

Với mỗi $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, ta đặt $CS_{\boldsymbol{\alpha}} := \{i \mid \alpha_i < 0\}$ và gọi là đối giá của $\boldsymbol{\alpha}$. Khi I là iđêan đơn thức, gọi $\Delta(I)$ là phức đơn hình tương ứng với iđêan Stanley-Reisner $\sqrt{I}$. Ta xác định một phức đơn hình như sau:

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha(I) := \{F \backslash G_{\boldsymbol{\alpha}} \mid G_{\boldsymbol{\alpha}} \subseteq F \subseteq \mathcal{V} \text{ với mọi } x^b \in G(I),\\ \text{tồn tại } i \notin F \text{ sao cho } \alpha_i < b_i\}\end{aligned} \tag{1.10}$$

và gọi là *phức bậc* của I ứng với $\boldsymbol{\alpha}$.

Trên thực tế Định nghĩa (1.10) rất khó để xác định. Do đó D. H. Giang và L.T. Hoa [23] đã mô tả lại $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I)$ dưới dạng thuận lợi hơn như sau:

Bổ đề 1.26. ([23, Bổ đề 1.1]) *$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I)$ là phức đơn hình bao gồm các mặt có dạng $F \backslash G_{\boldsymbol{\alpha}}$, trong đó $G_{\boldsymbol{\alpha}} \subseteq F \subseteq \mathcal{V}$ thỏa mãn $x^{\boldsymbol{\alpha}} \notin IR_F$ với $R_F = R[x_i^{-1} \mid i \in F]$.*

Khi đó Công thức Takayama (trong ([54, Định lý 1]) được phát biểu lại (trong [50, Định lý 1.1]) như sau:

Định lý 1.27. $\dim_k H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}} = \dim_k \widetilde{H}_{i-|CS_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I); k)$.

Ví dụ 1.28. 1) [50, Ví dụ 1.3] Nếu $\boldsymbol{\alpha} = (0, \ldots, 0)$, thì $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I) = \Delta(I)$, vì với mọi $F \in \mathcal{F}(\Delta)$, ta có $IR_F \neq R_F$ và vì vậy $x^{\boldsymbol{\alpha}} = 1 \notin IR_F$.

2) Cho $I = (x_2x_3, x_1x_3^2x_4^5) \subset k[x_1, x_2, x_3, x_4]$, khi đó $\Delta(I) = \langle\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\rangle$. Giả sử $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là các véc tơ đơn vị trong $\mathbb{N}^4$. Khi đó ta có:

   $\Delta_{e_1}(I) = \langle\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}\rangle$; $\Delta_{e_2}(I) = \langle\{1, 2, 4\}\rangle$;

   $\Delta_{e_3}(I) = \langle\{1, 3\}, \{3, 4\}\rangle$; $\Delta_{e_4}(I) = \langle\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\rangle$.

   Nếu $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, -1, 0) \in \mathbb{Z}^4$ thì $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I) = \langle\{1, 2\}\rangle$.

Với iđêan đơn thức $I \subset R$, chúng tôi quan tâm đến lũy thừa thông thường I^m và lũy thừa hình thức $I^{(m)}$ của I, trong đó lũy thừa hình thức $I^{(m)}$ với $m \geqslant 1$, của iđêan đơn thức I được xác định là giao của các thành phần nguyên sơ của I^m ứng với các iđêan nguyên tố tối tiểu của I.

Đối với iđêan Stanley-Reisner

$$I_\Delta = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} (x_i \mid i \notin F)$$

tương ứng với phức đơn hình Δ, lũy thừa hình thức thứ m của I_Δ là:

$$I_\Delta^{(m)} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} (x_i \mid i \notin F)^m. \tag{1.11}$$

Giả sử $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, N. C. Minh và N. V. Trung [50] đã đưa ra một cách mô tả tường minh các mặt cực đại của phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I^{(m)})$. Nhờ cách mô tả này mà chúng tôi có thể nghiên cứu các mặt của $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I^{(m)})$ thông qua hệ các bất phương trình tuyến tính.

Bổ đề 1.29. ([50, Bổ đề 1.3]) *Cho Δ là phức đơn hình, $m \geqslant 1$ là một số nguyên và $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Khi đó*

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(I_\Delta^{(m)}) = \left\langle F \in \mathcal{F}(\Delta) \mid \sum_{i \notin F} \alpha_i \leqslant m - 1 \right\rangle.$$

Nhận xét 1.30. Khi $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng, ta biết rằng $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị Menger (xem [22]). Do đó, trong [34, Hệ quả 1.6] J. Herzog, T. Hibi, N.

V. Trung, X. Zheng chỉ ra rằng iđêan phủ $J(\mathcal{H})$ của siêu đồ thị cân bằng $\mathcal{H}$ là *không xoắn*, có nghĩa là $J(\mathcal{H})^m = J(\mathcal{H})^{(m)}$, với mọi $m \geqslant 1$ (tương tự có thể xem [24, Định lý 4.6 và Mệnh đề 4.10]).

Cũng tương tự như vậy khi $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular, J. Herzog, T. Hibi và N. V. Trung [33, Định lý 1.1] đã chứng minh được rằng iđêan phủ $J(\mathcal{H})$ là không xoắn.

Do đó kết hợp Nhận xét 1.30 với Bổ đề 1.29 và Đẳng thức (1.8) ta có kết quả có ý nghĩa sau:

Bổ đề 1.31. *Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị cân bằng trên tập đỉnh $\mathcal{V}$ và $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Khi đó với mọi $m \geqslant 1$ ta có*

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^m) = \left\langle \mathcal{V} \setminus E \mid E \in \mathcal{E} \text{ and } \sum_{i \in E} \alpha_i \leqslant m - 1 \right\rangle.$$

1.5. Tập lồi đa diện và bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong phần tiếp theo của chương này chúng tôi trình bày lại một số khái niệm cơ bản và một vài kết quả về tập lồi đa diện. Các kết quả đó là những kỹ thuật quan trọng giúp chúng tôi chứng minh các kết quả chính của luận án.

Trong mục này chúng tôi xét không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng được cho bởi:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

trong đó $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Một tập con K trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là tập afin nếu $\lambda a + (1 - \lambda) b \in K$ với mọi $a, b \in K$ và mọi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ta biết rằng $K = a + L$, trong đó $a \in K$ và L là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^n$, L được gọi là không gian con song song với tập afin K (xem [42, Mệnh đề 1.1, trang 3]). Chiều của L được gọi là chiều của tập afin K và ký hiệu là $\dim K$. Nếu X là một tập con bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$ thì giao của các tập afin chứa X được gọi là bao afin của X.

Cho $a \in \mathbb{R}^n$ sao cho $a \neq (0, \ldots, 0)$ và $\beta \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có tập

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \beta\}$$

là một siêu phẳng trong $\mathbb{R}^n$ (xem [42, Hệ quả 1.1, trang 4]). Các tập có dạng:

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \geqslant \beta\} \text{ và } H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leqslant \beta\}$$

được gọi là các nửa không gian đóng.

Định nghĩa 1.32. Giao của hữu hạn các nửa không gian đóng trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi đa diện. Nói cách khác tập lồi đa diện là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính có dạng như sau:

$$\langle a_i, x \rangle \leqslant b_i, \ i = 1, \ldots, m \ (a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}), \tag{1.12}$$

hoặc có thể biểu diễn dưới dạng ma trận: $Ax \leqslant b$, trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ với các dòng được xác định bởi các véctơ $a_i \in \mathbb{R}^n$ và $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Một tập lồi đa diện bị chặn được gọi là một đa diện lồi.

Định nghĩa 1.33. Cho $\mathcal{P}$ là một tập lồi đa diện trong $\mathbb{R}^n$ và H là một siêu phẳng, H được gọi là siêu phẳng tựa nếu $H \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ và $\mathcal{P}$ nằm trong một nửa không gian đóng xác định bởi H. Nếu H là siêu phẳng tựa của $\mathcal{P}$ thì $H \cap \mathcal{P}$ được gọi là một mặt của $\mathcal{P}$.

Nhận xét 1.34. Các mặt của tập lồi đa diện cũng là tập lồi đa diện (xem [42, Mệnh đề 1.16, trang 21]) .

Chúng tôi cũng quan tâm đến khái niệm chiều của tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.35. Cho $\mathcal{P}$ là tập lồi đa diện trong $\mathbb{R}^n$. Chiều của $\mathcal{P}$, ký hiệu $\dim \mathcal{P}$ là chiều của bao afin của nó. Một $j-$mặt của $\mathcal{P}$ là một mặt có chiều là j. Nếu $\dim \mathcal{P} = t$ thì ta có:

$0-$mặt được gọi là đỉnh (hay còn gọi là các điểm cực biên) của $\mathcal{P}$.

$1-$mặt được gọi là cạnh $\mathcal{P}$.

$(t-1)-$mặt được gọi là mặt cực đại của $\mathcal{P}$.

Chú ý rằng một bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$ gọi là đẳng thức ẩn trong hệ $Ax \leqslant b$ nếu $\langle a_i, x\rangle = b_i$ với mọi x thuộc $Ax \leqslant b$. Ta gọi hệ $A^+x \leqslant b^+$ là hệ không chứa các đẳng thức ẩn trong $Ax \leqslant b$. Nếu chiều của tập lồi đa diện được xác định bởi hệ $Ax \leqslant b$ là n thì hệ $Ax \leqslant b$ không có đẳng thức ẩn.

Bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$ của Hệ (1.12) được gọi là thừa nếu nó được suy ra bởi các bất đẳng thức khác trong hệ, do đó ta có thể loại bỏ các bất đẳng thức thừa trong hệ. Hệ (1.12) gọi là rút gọn nếu nó không chứa các bất đẳng thức thừa, nói cách khác không có bất đẳng thức nào của hệ có thể bỏ đi được.

Định lý 1.36. [53, Định lý 8.1, trang 101] *Cho $\mathcal{P}$ là một tập lồi đa diện được xác định bởi hệ $Ax \leqslant b$. Nếu không có bất đẳng thức nào của hệ $A^+x \leqslant b^+$ là thừa trong $Ax \leqslant b$, thì tồn tại tương ứng một - một giữa các mặt cực đại F của $\mathcal{P}$ và các bất đẳng thức $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$ trong $A^+x \leqslant b^+$. Hơn nữa $F = \{x \in \mathcal{P} : \langle a_i, x\rangle = b_i\}$.*

Trong luận án này chúng tôi cũng sử dụng một số kết quả của bài toán quy hoạch tuyến tính.

Bài toán quy hoạch tuyến tính là bài toán tìm cực đại hoặc cực tiểu của một hàm tuyến tính xác định trên một tập lồi đa diện $\mathcal{P}$, cụ thể như sau:

$$\max\{cx \mid Ax \leqslant b\} \text{ hoặc } \min\{cx \mid Ax \leqslant b\},$$

trong đó $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là một ma trận và $b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n$ là các véctơ.

Theo [42, Hệ quả 2.14, trang 71] ta biết rằng giá trị cực đại hoặc cực tiểu của bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ đạt được tại các đỉnh của tập lồi đa diện xác định bởi hệ $Ax \leqslant b$.

Chúng tôi sử dụng một tính chất quan trọng sau đây của bài toán quy hoạch tuyến tính.

Định lý 1.37. [53, Định lý 7.1g, trang 90, Định lý đối ngẫu] *Cho* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *là một ma trận và* b, c *là các véctơ. Khi đó*

$$\max\{cx \mid Ax \leqslant b\} = \min\{yb \mid y \geqslant 0, yA = c\}, \tag{1.13}$$

nếu tập nghiệm cả hai vế là khác rỗng.

Nhận xét 1.38. 1) Bài toán quy hoạch tuyến tính ở vế phải của Đẳng thức (1.13) được gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính ở vế trái.

2) Trong luận án này chúng tôi sử dụng kết quả của Định lý 1.37 cho cặp bài toán đối ngẫu sau (xem [53, Công thức 19, trang 91]):

$$\max\{cx \mid x \geqslant 0, Ax \leqslant b\} = \min\{yb \mid y \geqslant 0, yA \geqslant c\}.$$

1.6. Phức bậc và đa diện lồi

Trong mục này này chúng tôi sẽ nghiên cứu các đa diện lồi đặc biệt, đó là đa diện lồi với các đỉnh nguyên. Các đa diện lồi trong phần này có liên quan mật thiết với các phức bậc tương ứng với các siêu đồ thị.

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$. Giả sử rằng tập cạnh của siêu đồ thị là $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ với $m \geqslant 1$ và $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của $\mathcal{H}$. Khi đó theo Đẳng thức (1.8) ta có

$$\Delta(J(\mathcal{H})) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_m \rangle$$

là phức đơn hình nhận $J(\mathcal{H})$ làm iđêan Stanley - Reisner.

Giả sử $p \geqslant 0, s \geqslant 1, \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ sao cho $H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^s)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$, theo Định lý 1.27 ta có

$$\dim_k \widetilde{H}_{p-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s); k) = \dim_k H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^s)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0.$$

Vì vậy ta có $\widetilde{H}_{p-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s);k) \neq 0$. Đặc biệt phức $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s)$ không là phức đơn hình acyclic.

Theo Bổ đề 1.31 có thể giả sử rằng

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_r \rangle ,$$

với $1 \leqslant r \leqslant m$.

Với mỗi $t \geqslant 1$, gọi $\mathcal{C}_t$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i < t & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j = r+1, \ldots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Từ Định nghĩa 1.32 ta có $\mathcal{C}_t$ là tập lồi đa diện trong $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét 1.39. 1) $\mathcal{C}_t = t\mathcal{C}_1$, trong đó $\mathcal{C}_1$ là tập nghiệm của Hệ (1.14) khi $t = 1$. Rõ ràng $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{C}_s$, do đó $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ vì $(1/s)\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{C}_1$, suy ra ta có $\mathcal{C}_t \neq \emptyset$.

2) Từ Bổ đề 1.31 ta có $\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H})^t) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_r \rangle = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s)$, với $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{C}_t \cap \mathbb{N}^n$ bất kỳ.

Ta gọi $\mathcal{P}_t$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant t-1 & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j = k+1, \ldots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Nhận xét 1.40. Dễ thấy $\mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{C}_t$, do vậy nếu tìm được các tính chất về tập nghiệm của $\mathcal{C}_t$ thì cũng dễ dàng suy ra cho $\mathcal{P}_t$. Đặc biệt từ Bổ đề 1.31 ta có nếu $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_t \cap \mathbb{N}^n$ thì

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H})^t) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_r \rangle = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s).$$

Gọi $\overline{\mathcal{C}_t}$ là bao đóng của $\mathcal{C}_t$ trong $\mathbb{R}^n$ tương ứng với tôpô Euclid. Khi đó ta có $\overline{\mathcal{C}_t} = t\overline{\mathcal{C}_1}$ và $\overline{\mathcal{C}_1} \neq \emptyset$. Hơn nữa có thể thấy $\overline{\mathcal{C}_t}$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i \leqslant t & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i \in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j = r+1, \ldots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Đặc biệt, $\overline{\mathcal{C}}_t$ là một đa diện lồi trong $\mathbb{R}^n$ bởi kết quả sau:

Bổ đề 1.41. $\overline{\mathcal{C}}_1$ *là một đa diện lồi và* $\dim \overline{\mathcal{C}}_1 = n$.

Chứng minh. Gọi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là hệ n véctơ đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Trước hết ta chứng minh rằng $\overline{\mathcal{C}_1}$ bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Lấy $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{C}_1$ bất kỳ. Với mọi $i = 1, \ldots, n$ vì phức đơn hình

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_r \rangle$$

không acyclic nên nó không phải là nón đối với i. Do đó $i \in E_j$ với $j = 1, \ldots, r$ nào đó. Từ hệ các bất phương trình (1.14) ta có

$$0 \leqslant y_i \leqslant \sum_{q \in E_j} y_q < 1.$$

Vì vậy $\mathcal{C}_1$ là tập lồi bị chặn.

Do $\mathcal{C}_1 \subseteq \overline{\mathcal{C}_1}$ nên suy ra $\overline{\mathcal{C}_1}$ cũng bị chặn và do đó $\overline{\mathcal{C}_1}$ là một đa diện lồi trong $\mathbb{R}^n$.

Tiếp theo ta chứng minh $\dim \overline{\mathcal{C}_1} = n$. Vì $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$, ta có thể lấy một điểm $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathcal{C}_1$. Cũng từ hệ các bất phương trình tuyến tính (1.14), tồn tại một số thực $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi số thực $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ mà $0 \leqslant \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$, chúng ta có $\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n \in \mathcal{C}_1$. Vì vậy $[\beta_1, \boldsymbol{\beta}_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [\boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\beta}_n + \varepsilon] \subseteq \mathcal{C}_1 \subseteq \overline{\mathcal{C}_1}$. Do đó, đa diện lồi $\overline{\mathcal{C}_1}$ là có chiều đầy đủ trong $\mathbb{R}^n$, tức là $\dim \overline{\mathcal{C}_1} = n$. $\square$

Nhận xét 1.42. Một véctơ $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm nguyên nếu các tọa độ của nó là các số nguyên.

Đặc biệt, khi $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng, chúng tôi có kết quả sau:

Bổ đề 1.43. *Nếu $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng thì mọi đỉnh của $\overline{\mathcal{C}_1}$ đều là các đỉnh nguyên không âm.*

Chứng minh. Giả sử $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ là một đỉnh $\overline{\mathcal{C}_1}$. Theo (1.16) thì $\overline{\mathcal{C}_1}$ là tập các nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i \leqslant 1 & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i \in E_j} x_i \geqslant 1 & \text{với } j = r+1, \ldots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Từ [53, công thức 23, trang 104], ta có $\boldsymbol{\alpha}$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i = 1 & \text{với } j \in S_1 \subseteq \{1, \ldots, m\}, \\ x_j = 0 & \text{với } j \in S_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

trong đó $|S_1| + |S_2| = n$.

Vì ma trận của hệ:

$$\sum_{i \in E_j} x_i = 1, \ j \in S_1$$

là ma trận con của ma trận liên thuộc $A(\mathcal{H})$ của siêu đồ thị cân bằng $\mathcal{H}$. Do đó nó cũng là ma trận cân bằng. Theo [53, Định lý 21.7, trang 304] chúng ta có $\boldsymbol{\alpha}$ là $\{0, 1\}$–véctơ. Vì vậy ta có $\boldsymbol{\alpha}$ là một điểm nguyên. □

Khi $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular, từ Mệnh đề 1.14 và Bổ đề 1.43 chúng tôi có hệ quả sau:

Hệ quả 1.44. *Nếu $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular thì mọi đỉnh của $\overline{\mathcal{C}_1}$ đều là các đỉnh nguyên không âm.*

Nhận xét 1.45. Vì $\mathcal{C}_t \subseteq \overline{\mathcal{C}_t}$ nên ta có $\mathcal{C}_t$ cũng là đa diện lồi. Hơn nữa vì $\mathcal{C}_t = t\mathcal{C}_1$ và $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s)$ không phải là nón nên với mọi $i = 1, \ldots, n$ từ Hệ (1.14) ta có $i \in E_j$ với $1 \leqslant j \leqslant r$ nào đó. Rõ ràng $\mathcal{P}_t$ cũng là một đa diện lồi do $\mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{C}_t \subseteq \overline{\mathcal{C}_t}$.

Bổ đề 1.46. *Cho $t \geqslant 1$ là một số nguyên bất kỳ. Nếu $\mathcal{P}_t \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$ thì $\mathcal{P}_{t+1} \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$ và $\mathcal{P}_n \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$.*

Chứng minh. Ta giả sử $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{P}_t \cap \mathbb{N}^n$. Khi đó từ hệ (1.15) ta thấy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ thỏa mãn các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} \alpha_i \leqslant t - 1 & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i \in E_j} \alpha_i \geqslant t & \text{với } j = r+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Vì $\mathcal{P}_t \neq \emptyset$, nên ta có $\overline{\mathcal{C}_t} \neq \emptyset$, do $\overline{\mathcal{C}_t} = t\overline{\mathcal{C}_1}$ nên $\overline{\mathcal{C}_1} \neq \emptyset$. Gọi $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ là một đỉnh của $\overline{\mathcal{C}_1}$, khi đó theo các Bổ đề 1.43 và Bổ đề 1.44 ta có $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}^n$. Ta cũng chú ý rằng $\boldsymbol{\gamma}$ là một nghiệm của hệ (1.16) khi ta thay t bởi 1.

Đặt $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{N}^n$, ta thấy $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ thỏa mãn các ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} \theta_i \leqslant t & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i \in E_j} \theta_i \geqslant t + 1 & \text{với } j = r+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Suy ra $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{P}_{t+1}$, nói cách khác $\mathcal{P}_{t+1} \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$.

Tiếp theo ta chứng minh $\mathcal{P}_n \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$.

Thật vậy, từ Hệ (1.15) ta thấy rằng $\mathcal{P}_n$ là tập các nghiệm của hệ các bất phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i \leqslant n - 1 & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i \in E_j} x_i \geqslant n & \text{với } j = r+1, \ldots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Từ Hệ (1.17) ta xét đa diện lồi $\overline{\mathcal{C}_n}$:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant n & \text{với } j = 1,\dots,r,\\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant n & \text{với } j = r+1,\dots,m,\\ x_1 \geqslant 0,\dots,x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Sau khi bỏ đi các bất phương trình thừa của Hệ (1.18) ta nhận được hệ rút gọn như sau:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant n & \text{với } j \in S_1\\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant n & \text{với } j \in S_2,\\ x_j \geqslant 0 & \text{với } j \in S_3, \end{cases} \tag{1.19}$$

trong đó $S_1 \subseteq \{1,\dots,r\}, S_2 \subseteq \{r+1,\dots,m\}, S_3 \subseteq \{1,\dots,n\}$.

Vì $\dim \overline{\mathcal{C}_n} = n$ nên Hệ (1.18) không chứa đẳng thức ẩn, do đó Hệ (1.19) cũng không có đẳng thức ẩn.

Nếu $S_2 = \emptyset$ thì dễ thấy véc tơ $(0,\dots,0)$ là một đỉnh của $\mathcal{P}_n$ và khi đó $\mathcal{P}_n \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$.

Giả sử rằng $S_2 \neq \emptyset$ và lấy $t \in S_2$. Theo Định lý 1.36, ta có $\sum_{i\in E_t} x_i = n$ là siêu phẳng tựa của một mặt cực đại của $\overline{\mathcal{C}_n}$. Do đó, $\sum_{i\in E_t} x_i = 1$ cũng là siêu phẳng tựa của một mặt cực đại, ký hiệu F, của $\overline{\mathcal{C}_1}$. Vì $\dim F = n-1$ nên ta có thể lấy n đỉnh $\{\alpha^1,\dots,\alpha^n\}$ độc lập afin của $\overline{\mathcal{C}_1}$ thuộc F. Đặt $\boldsymbol{\alpha} := \dfrac{(\alpha^1+\cdots+\alpha^n)}{n} \in \overline{\mathcal{C}_1}$, ta có $\boldsymbol{\alpha}$ là một điểm trong tương đối của F, do đó $\boldsymbol{\alpha}$ không thuộc bất kỳ siêu mặt nào khác của $\overline{\mathcal{C}_1}$. Vì vậy $\boldsymbol{\alpha}$ là một nghiệm của hệ các bất phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i < 1 & \text{với } j = 1,\dots,r,\\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant 1 & \text{với } j = r+1,\dots,m,\\ x_1 \geqslant 0,\dots,x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Ta suy ra rằng $n\boldsymbol{\alpha}$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i < n & \text{với } j = 1, \ldots, r, \\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant n & \text{với } j = r+1, \ldots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Do đó ta có $n\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_n$. Hơn nữa $n\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^1 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}^n \in \mathbb{N}^n$ nên suy ra $\mathcal{P}_n \cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 2

Tính ổn định của hàm độ sâu

Mục đích chính của chương này là nghiên cứu hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với các siêu đồ thị cân bằng và siêu đồ thị unimodular. Chúng tôi chứng minh được rằng hàm độ sâu của các iđêan phủ liên kết với hai lớp siêu đồ thị này là hàm giảm. Hơn nữa chúng tôi chỉ ra rằng chiều của vành đa thức là chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu của các iđêan đó. Đặc biệt, chúng tôi chỉ ra chặn trên tốt hơn cho chỉ số ổn định độ sâu của iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần. Các kết quả được trình bày trong chương này chủ yếu nằm trong hai bài báo [28] và [29]. Trong suốt chương này $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k.

2.1. Tính giảm của hàm độ sâu và chặn trên chỉ số ổn định

Cho I là iđêan thuần nhất trong R. Hàm số học

$$\operatorname{depth}_I(s) := \operatorname{depth} R/I^s, \text{ với } s \geqslant 1$$

được gọi là *hàm độ sâu* của iđêan I.

Năm 1979, M. Brodmann [10] đã chứng minh một kết quả rất đẹp nói rằng hàm độ sâu là hằng số khi lũy thừa của iđêan đủ lớn. Hơn nữa trong bài báo này M. Brodmann [10] cũng chỉ ra rằng

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{depth} R/I^s \leqslant \dim R - \ell(I), \tag{2.1}$$

với $\ell(I) = \dim \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ là *độ trải giải tích* của iđêan I, trong đó $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ là iđêan phân bậc cực đại của R và $\mathcal{R}(I) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 1} I^n$ là vành Rees của iđêan I. Năm 1983, D. Eisenbud, C. Huneke [20, Mệnh đề 3.3] đã chỉ ra rằng Bất đẳng thức (2.1) trở thành đẳng thức nếu vành phân bậc liên kết của iđêan I là vành Cohen-Macaulay. Các tác giả J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu [36] đã gọi vị trí nhỏ nhất mà hàm độ sâu trở thành hằng số là *chỉ số ổn định độ sâu* của iđêan I và ký hiệu là $\operatorname{dstab}(I)$, tức là

$$\operatorname{dstab}(I) := \min\{s_0 \geqslant 1 \mid \operatorname{depth} S/I^s = \operatorname{depth} S/I^{s_0} \text{ với mọi } s \geqslant s_0\}.$$

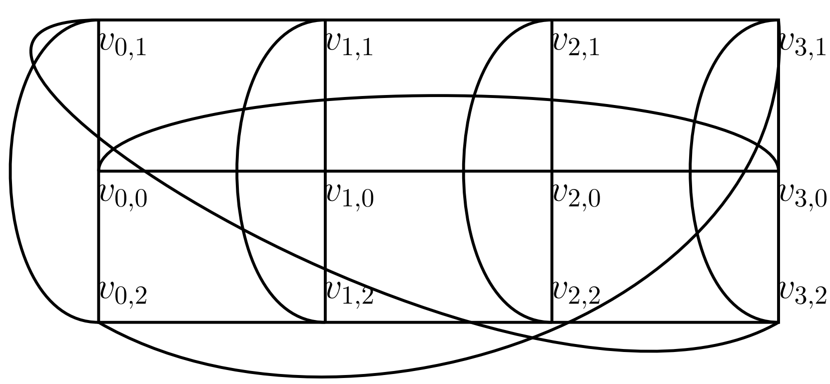
Từ định lý của M. Brodmann [10], luận án quan tâm đến những vấn đề được đặt ra một cách tự nhiên như sau:

Vấn đề 1. Hàm $s \mapsto \operatorname{depth} R/I^s$, $s \geqslant 1$ sẽ có dáng điệu như thế nào khi $s < \operatorname{dstab}(I)$?

Nhìn chung thì đây là một vấn đề phức tạp, ngay cả đối với iđêan đơn thức. Năm 2005, J. Herzog, T. Hibi [31] đặt ra câu hỏi là: nếu I là iđêan đơn thức không chứa bình phương thì dãy $\{\operatorname{depth}(R/I^s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ có phải là dãy giảm hay không, tức là liệu rằng $\operatorname{depth}(R/I^s) \geqslant \operatorname{depth}(R/I^{s+1})$ với mọi $s \geqslant 1$? Tuy nhiên kết quả sau đây của T. Kaiser, M. Stehlík và S. Škrekovski [44] cho thấy nói chung giả thuyết không phải lúc nào cũng đúng.

Định lý 2.1. ([44, Định lý 13]) *Hàm độ sâu của iđêan phủ $J(H_4)$ là hàm không giảm.*

Trong đó $J(H_4)$ là iđêan phủ của đồ thị bao gồm 12 đỉnh sau đây:



Hình 2.1: Đồ thị H_4

Trong kết quả này, các tác giả đã chứng minh được rằng

$$\operatorname{depth} R/J(H_4)^3 = 0 < 4 = \operatorname{depth} R/J(H_4)^4.$$

Ngoài ra, H. T. Hà, H. D. Nguyen, N. V. Trung, T. N. Trung [26] chỉ ra rằng nếu I là iđêan đơn thức thì $\operatorname{depth} R/I^s$ là một hàm số học hội tụ bất kỳ. Kết quả này cho thấy dáng điệu của hàm độ sâu rất phức tạp.

Từ đây, chúng ta quan tâm đến các lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương có hàm độ sâu không giảm (xem [14, 27, 37, 39, 51]).

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu Vấn đề 1 cho iđêan phủ của lớp siêu đồ thị cân bằng. Chúng tôi chứng minh được tính giảm của hàm độ sâu $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^s$, khi $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng. Những kết quả mà chúng tôi thu được bổ sung thêm vào các lớp đồ thị và siêu đồ thị có hàm độ sâu đơn điệu.

Sau khi nghiên cứu dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với lớp siêu đồ thị cân bằng, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu một câu hỏi khác cũng liên quan đến kết quả của M. Brodmann [10] như sau:

Vấn đề 2. Nếu hàm $s \mapsto \operatorname{depth} R/I^s$, với $s \geqslant 1$, là hằng số khi s đủ lớn thì chặn trên chỉ số ổn định độ sâu $\operatorname{dstab}(I)$ là gì?

Đối với vấn đề này, cho đến hiện nay mới chỉ có một vài lớp iđêan đơn thức đặc biệt có thể tìm được các chặn tương đối hợp lý (xem [16, 31, 58]...).

Chú ý rằng trong [35] J. Herzog, A. Qureshi đã đưa giả thuyết rằng nếu I là iđêan không chứa bình phương bất kỳ thì $\operatorname{dstab}(I) < l(I)$. Trong luận án này, tuy rằng chúng tôi chưa đạt được chặn này nhưng các chặn mà chúng tôi đưa ra là khá chặt, đó là một hàm tuyến tính theo số biến của vành đa thức R. Đặc biệt, khi nghiên cứu đồ thị hai phần, chúng tôi đã đạt được giả thuyết của J. Herzog, A. Qureshi [35].

2.2. Dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị cân bằng

Trong mục này chúng tôi trình bày một cách cụ thể dáng điệu của hàm độ sâu depth $R/I(\mathcal{H})^s$ với $J(\mathcal{H})$ là các iđêan phủ liên kết với lớp siêu đồ thị cân bằng.

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị cân bằng với tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ và tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$. Gọi $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị cân bằng $\mathcal{H}$. Không mất tính tổng quát ta sẽ giả sử $\mathcal{E} \neq \emptyset$ và do đó $J(\mathcal{H}) \neq 0$.

Kết quả chính đầu tiên của phần này là định lý sau:

Định lý 2.2. *Cho $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị cân bằng. Khi đó hàm độ sâu của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$ là giảm.*

Chứng minh. Để chứng minh định lý chúng ta cố định $t \geqslant 1$ và sẽ chỉ ra rằng

$$\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^t \geqslant \operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^{t+1}.$$

Thật vậy, nếu đặt $d := \operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^t$, khi đó tồn tại $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n$ sao cho $H^d_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^t)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$. Theo Định lý 1.27 chúng ta có

$$\dim_k \widetilde{H}_{d-|G_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t); k) = \dim_k H^d_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^t)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0. \tag{2.2}$$

Đặc biệt ta có $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t)$ là phức đơn hình không acyclic.

Nếu $CS_{\boldsymbol{\alpha}} = \{i \mid \alpha_i < 0\} = \{1, \ldots, n\}$, thì $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t)$ hoặc là tập $\{\emptyset\}$ hoặc là một phức trống. Vì phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t)$ không là acyclic, nên $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t) = \{\emptyset\}$, khi đó theo Bổ đề 1.26 ta suy ra $J(\mathcal{H}) = 0$. Tuy nhiên điều này không xảy ra do giả thiết rằng $J(\mathcal{H}) \neq 0$.

Từ lập luận trên ta suy ra rằng $CS_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \{1, \ldots, n\}$. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $CS_{\boldsymbol{\alpha}} = \{p+1, \ldots, n\}$ với $1 \leqslant p \leqslant n$.

Đặt $S := k[x_1, \ldots, x_p]$ là vành đa thức với p biến trên trường k và $\mathcal{H}'$ là một đồ thị con $\mathcal{H}$ trên tập đỉnh $\mathcal{V}' = \{1, \ldots, p\}$ với tập cạnh là $\mathcal{E}' = \{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq \mathcal{V}'\}$. Theo [8, Mệnh đề 4.3, trang 65] nếu $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng, thì $\mathcal{H}'$ cũng là siêu đồ thị cân bằng.

Mặt khác, giả sử $F \subseteq \mathcal{V}$, ta gọi $R' := k[x_i \mid i \notin F]$ và $J' := J(\mathcal{H})R_F \cap R'$, trong đó $R_F = R[x_i^{-1} \mid i \in F]$. Gọi $\mathcal{H}'$ là một siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \setminus F$ với tập cạnh $\mathcal{E}' := \{E \in \mathcal{E} \mid E \cap F = \emptyset\}$. Từ công thức (1.7) chúng ta có $J' = J(\mathcal{H}')$.

Từ lập luận trên ta có khi $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng trên tập đỉnh $\mathcal{V}$ và $\mathcal{H}' = (\mathcal{E}', \mathcal{V}')$ là siêu đồ thị cân bằng trên tập đỉnh $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \setminus CS_{\boldsymbol{\alpha}}$ thì

$$J(\mathcal{H})R_{CS_{\boldsymbol{\alpha}}} \cap S = J(\mathcal{H}'). \tag{2.3}$$

Gọi $\boldsymbol{\alpha}^* := (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, từ Bổ đề 1.26 và Đẳng thức (2.3) ta suy ra đẳng thức sau

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^t) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t) \text{ với } t \geqslant 1 \text{ bất kỳ.} \tag{2.4}$$

Cùng với Đẳng thức (2.2), ta thấy rằng $\widetilde{H}_{d-|CS_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^t); k) \neq 0$. Do đó phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^t); k)$ cũng không là acyclic.

Giả sử rằng $\mathcal{E}' = \{E_1, \ldots, E_v\}$, trong đó $v \geqslant 1$, là tập cạnh của $\mathcal{H}'$. Theo Đẳng thức (1.7) ta có

$$\Delta(J(\mathcal{H}')) = \langle \mathcal{V}' \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V}' \setminus E_v \rangle .$$

Từ Bổ đề 1.31 chúng ta có thể giả sử rằng

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^t) = \langle \mathcal{V}' \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V}' \setminus E_q \rangle ,$$

trong đó $1 \leqslant q \leqslant v$.

Với mỗi số nguyên $s \geqslant 1$, gọi $\mathcal{P}_s$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^p$ của hệ các bất phương trình

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i \leqslant s - 1 & \text{với } j = 1, \ldots, q, \\ \sum_{i \in E_j} x_i \geqslant s & \text{với } j = q+1, \ldots, v, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_p \geqslant 0. \end{cases}$$

Dễ thấy $\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{P}_t \cap \mathbb{N}^p$, nói cách khác $\mathcal{P}_t \cap \mathbb{N}^p \neq \emptyset$. Theo Bổ đề 1.46 chúng ta có $\mathcal{P}_{t+1} \cap \mathbb{N}^p \neq \emptyset$. Gọi $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathcal{P}_{t+1} \cap \mathbb{N}^p$ thì

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} \beta_i \leqslant t & \text{với } j = 1, \ldots, q, \\ \sum_{i \in E_j} \beta_i \geqslant t+1 & \text{với } j = q+1, \ldots, v, \end{cases}$$

Ta suy ra rằng

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H}')^{t+1}) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^t) = \langle \mathcal{V}' \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V}' \setminus E_q \rangle . \tag{2.5}$$

Giả sử ta có $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \ldots, \beta_p, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{Z}^n$. Hiển nhiên $CS_{\boldsymbol{\beta}'} = CS_{\boldsymbol{\alpha}}$. Hơn nữa từ các Đẳng thức (2.4) và (2.5) chúng ta có

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^{t+1}) = \Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H}')^{t+1}) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^t) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t).$$

Mặt khác lại theo Định lý 1.27 ta có

$$\begin{aligned} \dim_k H^d_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^{t+1})_{\boldsymbol{\beta}'} &= \dim_k \widetilde{H}_{d-|CS_{\boldsymbol{\beta}'}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^{t+1}); k) \\ &= \dim_k \widetilde{H}_{d-|CS_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t); k) \neq 0. \end{aligned}$$

Vì vậy ta suy ra rằng $H^d_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^{t+1}) \neq 0$ và do đó

$$\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^{t+1} \leqslant d = \operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^t.$$

Vậy ta có hàm độ sâu của $J(\mathcal{H})$ là hàm giảm. $\square$

Sau khi chỉ ra tính đơn điệu của hàm độ sâu, chúng tôi đưa ra một chặn trên cho chỉ số ổn định độ sâu của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$. Kết quả chính tiếp theo của chương này sẽ là câu trả lời cho Vấn đề 2 mà chúng tôi nói đến ở trên.

Định lý 2.3. *Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là một siêu đồ thị cân bằng trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$. Khi đó*

$$\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^t = n - \ell(J(\mathcal{H})) \text{ với mọi } t \geqslant n.$$

Đặc biệt $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) \leqslant n$.

Để chứng minh định lý chính này, chúng tôi cần đến một kết quả sau về giới hạn của hàm độ sâu của iđêan $J(\mathcal{H})$.

Bổ đề 2.4. *Cho $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị cân bằng trên tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$. Khi đó*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^t = \dim R - \ell(J(\mathcal{H})).$$

Chứng minh. Vì $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng, theo Nhận xét 1.30 ta có $J(\mathcal{H})$ là không xoắn. Vì vậy theo [32, Mệnh đề 10.3.2, trang 198] và [32, Định lý 10.3.13, trang 203], ta thấy bổ đề ngay lập tức được chứng minh. $\square$

Chứng minh. (Định lý 2.3)

Từ Định lý 2.2 và Bổ đề 2.4 ta có

$$\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) = \min\{t \geqslant 1 \mid \operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^t = \dim R - \ell(J(\mathcal{H})\}.$$

Do đó ta phải chứng minh rằng $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) \leqslant n$.

Giả sử $s := \operatorname{dstab}(J(\mathcal{H}))$ và $d := n - \ell(J(\mathcal{H}))$, khi đó tồn tại $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n$ sao cho $H^d_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^s)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$. Định lý 1.27 chỉ ra rằng

$$\dim_k \widetilde{H}_{d-|CS_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s); k) = \dim_k H^d_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^s)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0. \tag{2.6}$$

Do vậy phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s)$ là không acyclic.

Với $CS_{\boldsymbol{\alpha}} = \{i \mid \boldsymbol{\alpha}_i < 0\}$ chúng ta xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Nếu $CS_{\boldsymbol{\alpha}} = \{1, \ldots, n\}$ thì $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s)$ hoặc là chỉ có mỗi tập $\{\emptyset\}$ hoặc là phức trống. Nhưng vì $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s)$ không acyclic, nên $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s) = \{\emptyset\}$. Nhưng khi đó từ Bổ đề 1.26 ta có $J(\mathcal{H}) = 0$. Tuy nhiên điều này không xảy ra do ta đã giả thiết rằng $J(\mathcal{H}) \neq 0$.

Trường hợp 2: $CS_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \{1, \ldots, n\}$, không mất tính tổng quát có thể giả sử rằng $CS_\alpha = \{p+1, \ldots, n\}$ với $1 \leqslant p \leqslant n$. Gọi $S := k[x_1, \ldots, x_p]$ là vành đa thức p biến, $\mathcal{H}' = (\mathcal{V}', E')$ là một siêu đồ thị con của $\mathcal{H}$ với tập đỉnh $\mathcal{V}' = \{1, \ldots, p\}$ và tập cạnh $\mathcal{E}' = \{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq \mathcal{V}'\}$. Theo [8, Mệnh đề 4.3, trang 65], do $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị cân bằng nên $\mathcal{H}'$ cũng là siêu đồ thị cân bằng.

Mặt khác tương tự như Đẳng thức (2.3) trong chứng minh của Định lý 2.2 ta có:

$$J(\mathcal{H})R_F \cap S = J(\mathcal{H}'). \tag{2.7}$$

Đặt $\boldsymbol{\alpha}^* := (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$. Sử dụng Bổ đề 1.26 và Đẳng thức (2.7) chúng ta nhận được

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^s) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s) \text{ với bất kỳ } s \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Kết hợp các Đẳng thức (2.8) và (2.6), ta suy ra rằng

$$\widetilde{H}_{d-|CS_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^s); k) \neq 0.$$

Do đó phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^s); k)$ không là acyclic.

Giả sử rằng $\mathcal{E}' = \{E_1, \ldots, E_k\}$ là tập cạnh của $\mathcal{H}'$, trong đó $k \geqslant 1$. Khi đó từ Đẳng thức (1.8) ta có

$$\Delta(J(\mathcal{H}')) = \langle \mathcal{V}' \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V}' \setminus E_k \rangle .$$

Theo Bổ đề 1.31 ta giả sử rằng:

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^t) = \langle \mathcal{V}' \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V}' \setminus E_q \rangle$$

với $1 \leqslant q \leqslant k$.

Với mỗi số nguyên $l \geqslant 1$, gọi $\mathcal{P}_l$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^p$ của hệ các bất phương trình sau:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i \leqslant l - 1 & \text{với } j = 1, \ldots, q, \\ \sum_{i \in E_j} x_i \geqslant l & \text{với } j = q+1, \ldots, k, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_p \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Theo Bổ đề 1.31 ta có $\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{P}_s$. Vì vậy $\mathcal{P}_s \cap \mathbb{N}^p \neq \emptyset$.

Hơn nữa từ Bổ đề 1.46 suy ra rằng $\mathcal{P}_p \cap \mathbb{N}^p \neq \emptyset$. Vì $p \leqslant n$ ta lại tiếp tục áp dụng Bổ đề 1.46 ta suy ra $\mathcal{P}_n \cap \mathbb{N}^p \neq \emptyset$.

Giả sử $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{P}_n \cap \mathbb{N}^p$. Khi đó $\boldsymbol{\gamma}$ là nghiệm của Hệ (2.9) bằng cách thay l bởi n. Từ Bổ đề 1.31 ta có

$$\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(J(\mathcal{H}')^n) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^s) = \{\mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_k\}. \tag{2.10}$$

Đặt $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{Z}^n$, ta suy ra $CS_{\boldsymbol{\gamma}'} = CS_{\boldsymbol{\alpha}}$. Hơn nữa theo các Đẳng thức (2.8) và (2.10) ta có

$$\Delta_{\boldsymbol{\gamma}'}(J(\mathcal{H})^n) = \Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(J(\mathcal{H}')^n) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}^*}(J(\mathcal{H}')^s) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s).$$

Từ Định lý 1.27 ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}\dim_k H^d_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^n)_{\boldsymbol{\gamma}'} &= \dim_k \widetilde{H}_{d-|CS_{\boldsymbol{\gamma}'}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\gamma}'}(J(\mathcal{H})^n); k)\\ &= \dim_k \widetilde{H}_{d-|CS_{\boldsymbol{\alpha}}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^s); k) \neq 0.\end{aligned}$$

Đặc biệt $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^n \leqslant d$, sử dụng tính chất đơn điệu của hàm độ sâu ta có:

$$\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^n \geqslant \lim_{l\to\infty} \operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^l = d.$$

Do đó $\operatorname{depth} R/J(\mathcal{H})^n = d$, vì vậy $s \leqslant n$, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.14 phát biểu rằng mọi siêu đồ thị unimodular đều là siêu đồ thị cân bằng. Do vậy các Định lý 2.2 và 2.3 cho ta kết quả sau đây về dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết siêu đồ thị unimodular.

Hệ quả 2.5. *Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là một siêu đồ thị unimodular. Khi đó hàm độ sâu của iđêan phủ $J(\mathcal{H})$ là hàm giảm. Đặc biệt,* $\operatorname{dstab}(J(\mathcal{H})) \leqslant n$.

2.3. Dáng điệu hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu dáng điệu của hàm độ sâu của iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần. Trước hết chúng tôi nhắc lại các khái niệm cần thiết liên quan đến đồ thị. Để thuận tiện, đồ thị sẽ được ký hiệu là $G = (V(G), E(G))$ trong đó $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ là tập các đỉnh của G và $E(G) = \{\{i, j\} | i, j \in V(G)\}$ là tập các cạnh của G. Khái niệm đồ thị ở đây luôn được hiểu là đồ thị đơn, tức là đồ thị không có khuyên (có nghĩa nó không chứa cạnh có dạng $\{i, i\}$), không có cạnh bội và không có điểm cô lập.

Một đồ thị G được gọi là *đồ thị hai phần* nếu tập đỉnh $V(G)$ có thể phân hoạch thành $V(G) = V_1 \cup V_2$ với $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sao cho mọi cạnh của G có một đỉnh thuộc V_1 và một đỉnh thuộc V_2. Khi đó (V_1, V_2) được gọi là một song phân hoạch của G.

Chú ý rằng khái niệm về chu trình của đồ thị được hiểu tương tự như Định nghĩa 1.8 về chu trình của siêu đồ thị.

Đồ thị hai phần còn được đặc trưng như sau:

Bổ đề 2.6. ([32, Bổ đề 9.1.1, trang 154]) *Đồ thị G là hai phần nếu và chỉ nếu mọi chu trình của G đều có độ dài chẵn.*

Vì vậy khi G là đồ thị hai phần thì G là siêu đồ thị unimodular bởi kết quả sau:

Mệnh đề 2.7. ([5, Định lý 5, trang 164]) *Mọi siêu đồ thị không có chu trình lẻ đều là siêu đồ thị unimodular.*

Theo Mệnh đề 1.14 dễ thấy mọi đồ thị hai phần đều là siêu đồ thị cân bằng. Kết hợp Định lý 2.2 và Mệnh đề 2.7 ta có kết quả về dáng điệu của depth $R/J(G)^s$, với $J(G)$ là iđêan phủ của đồ thị hai phần như sau:

Mệnh đề 2.8. ([14, Định lý 3.2]) *Cho G là một đồ thị hai phần bất kỳ. Khi đó $J(G)$ có hàm độ sâu giảm.*

Có thể thấy khi G là đồ thị hai phần, dáng điệu của hàm độ sâu là không thay đổi. Tuy nhiên, chúng tôi đã thiết lập được chặn tốt hơn cho chỉ số ổn định độ sâu của $J(G)$, chặn này đạt được đúng như giả thuyết mà J. Herzog, A. Qureshi [35] đưa ra.

Gọi $\upsilon(G)$ là số đỉnh của đồ thị G. Tập con $S \subseteq V(G)$ được gọi là *tập độc lập* của đồ thị G nếu $\{v, w\} \notin E(G)$ với mọi cặp đỉnh $v, w \in S$. Một tập các cạnh $M \subseteq E(G)$ được gọi là một *ghép cặp* của G nếu hai cạnh phân biệt bất kỳ của M đều không có điểm chung. Giả sử $M = \{\{a_i, b_i\} \mid i = 1, \ldots, m\}$ là một ghép cặp khác rỗng của G. Theo định nghĩa trong [15], M là một *ghép cặp có thứ tự* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

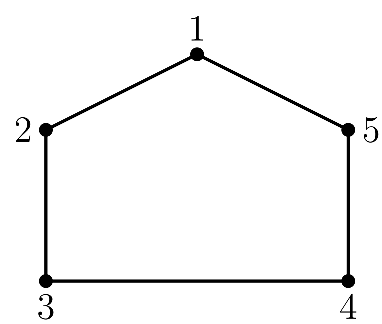
- $\{a_1, \ldots, a_m\}$ là một tập độc lập của G;
- $\{a_i, b_j\} \in E(G)$ thì suy ra $i \leqslant j$.

Luận án có sử dụng một bất biến của đồ thị được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.9. Cho G là một đồ thị, *chỉ số ghép cặp có thứ tự* của đồ thị G được xác định là:

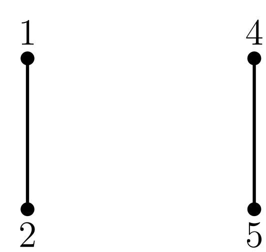
$$\nu_0(G) := \max\{|M| \mid M \subseteq E(G) \text{ là một ghép cặp có thứ tự của } G\}.$$

Ví dụ 2.10. Cho C_5 là một đồ thị chu trình với tập đỉnh là $V(C_5) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và tập cạnh là $E(C_5) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}$.



Hình 2.2: Đồ thị C_5

Khi đó C_5 có một ghép cặp là:



Hình 2.3: Một ghép cặp của C_5

và ghép cặp có thứ tự cũng là $\{\{1,2\};\{4,5\}\}$. Dễ thấy chỉ số ghép cặp có thứ tự của C_5 là 2.

Để chứng minh kết quả chính của mục này, chúng tôi cần đến các bổ đề sau:

Bổ đề 2.11. *Cho G là một đồ thị hai phần với một song phân hoạch (X,Y). Nếu $\upsilon(G) = 2\nu_0(G)$ thì G có một ghép cặp có thứ tự $M = \{\{a_i, b_i\} \mid i = 1,\dots,m\}$, trong đó $m = \nu_0(G)$ sao cho*

$$X = \{a_1,\dots,a_m\} \text{ và } Y = \{b_1,\dots,b_m\}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề bằng quy nạp theo $\nu_0(G)$. Nếu $\nu_0(G) = 1$ thì G là đồ thị chỉ có một cạnh và hiển nhiên bổ đề đúng.

Giả sử $\nu_0(G) = m \geqslant 2$. Đặt $\{\{x_i, y_i\} \mid i = 1,\dots,m\}$ là một ghép cặp có thứ tự của G sao cho

- $\{x_1,\dots,x_m\}$ là một tập độc lập của G;
- $\{x_i, y_j\} \in E(G)$ suy ra $i \leqslant j$.

Vì G là đồ thị hai phần nên $\deg_G(x_m) = 1$. Gọi $H := G \setminus \{x_m, y_m\}$ là một đồ thị con của G. Rõ ràng H cũng là một đồ thị hai phần với $\upsilon(H) = \upsilon(G) - 2 = 2(m-1)$ và $\nu_0(H) = m-1$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Khi $x_m \in X$ thì $y_m \in Y$ và H có một song phân hoạch $(X \setminus \{x_m\}, Y \setminus \{y_m\})$. Do $\nu_0(H) = m-1 < m$, theo giả thiết quy nạp ta có thể thấy rằng đồ thị H có một ghép cặp có thứ tự là $\{\{a_i, b_i\} \mid i = 1,\dots,m-1\}$ sao cho

$$X \setminus \{x_m\} = \{a_1,\dots,a_{m-1}\} \text{ và } Y \setminus \{y_m\} = \{b_1,\dots,b_{m-1}\}.$$

Vì $\deg_G(x_m) = 1, x_m \in X$ và $y_m \in Y$ nên $\{a_1b_1,\dots,a_{m-1}b_{m-1}, x_my_m\}$ là một ghép cặp có thứ tự cần tìm.

Trường hợp 2: Khi $x_m \in Y$ thì $y_m \in X$ và H có một song phân hoạch là $(Y \setminus \{x_m\}, X \setminus \{y_m\})$. Do $\nu_0(H) = m - 1 < m$ nên theo giả thiết quy nạp ta suy rằng H có môt ghép cặp có thứ tự là $\{a_ib_i \mid i = 1, \ldots, m-1\}$ sao cho

$$Y \setminus \{x_m\} = \{a_1, \ldots, a_{m-1}\} \text{ và } X \setminus \{y_m\} = \{b_1, \ldots, b_{m-1}\}.$$

Vì $\deg_G(x_m) = 1, x_m \in Y$ và $y_m \in X$ nên có thể thấy

$$\{y_mx_m, b_{m-1}a_{m-1}, \ldots, b_1a_1\}$$

là một ghép cặp có thứ tự cần tìm và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Trước khi phát biểu và chứng minh kết quả chính của phần này, chúng tôi nêu lại hai bổ đề cần thiết cho chứng minh của định lý chính như sau:

Bổ đề 2.12. ([39, Bổ đề 1.3]) *Cho I là iđêan đơn thức của vành đa thức R và $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sao cho $IR_F \neq R_F$. Gọi $S := k[x_i \mid i \notin F]$ và $J := IR_F \cap S$, khi đó* $\operatorname{depth} R/I \leqslant |F| + \operatorname{depth} S/J$.

Bổ đề 2.13. ([39, Bổ đề 1.4]) *Cho I là iđêan đơn thức của vành đa thức R với* $\operatorname{depth} R/I = d$. *Giả sử rằng $H^d_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$ với $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Gọi $F = CS_{\boldsymbol{\alpha}}$, $S := k[x_i \mid i \notin F]$ và $J := IR_F \cap S$, khi đó* $\operatorname{depth} R/I = |F| + \operatorname{depth} S/J$.

Nhận xét 2.14. Cho G là đồ thị hai phần với $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ và $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ là một véc tơ bất kỳ. Để có thể mô tả $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s)$, với $s \geqslant 1$ một cách chính xác, với mọi cạnh $\{i, j\} \in E(G)$ ta đặt

$$F_{ij} := \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

Khi đó

$$\mathcal{F}(\Delta(J(G)) = \{F_{ij} \mid \{i, j\} \in E(G)\}. \tag{2.11}$$

Kết hợp Bổ đề 1.31 với Đẳng thức (2.11) ta thấy $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s)$ được mô tả cụ thể như sau:

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s) = \left\langle F_{ij} \mid \alpha_i + \alpha_j \leqslant s - 1 \text{ và } \{i, j\} \in E(G) \right\rangle. \tag{2.12}$$

Đối với iđêan phủ liên kết với đồ thị hai phần, chúng tôi chặn trên của chỉ số ổn định độ sâu bởi một chặn tốt hơn, giá trị này phù hợp với giả thuyết mà J. Herzog và A. Qureshi [35] đưa ra là $\operatorname{dstab}(J(G)) < \ell(J(G))$.

Định lý 2.15. *Cho G là một đồ thị hai phần với n đỉnh. Khi đó*

$$\operatorname{depth} R/J(G)^s = n - \nu_0(G) - 1 \text{ với mọi } s \geqslant \nu_0(G).$$

Hơn nữa $\operatorname{dstab}(J(G)) \leqslant \nu_0(G)$.

Chứng minh. Đặt $m := \nu_0(G)$ và $\{\{a_i, b_i\} \mid i = 1, \ldots, m\}$ là một ghép cặp có thứ tự của G. Gọi H là một đồ thị con cảm sinh G trên tập đỉnh $\{a_i, b_i \mid i = 1, \ldots, m\}$. Rõ ràng H cũng là một đồ thị hai phần thỏa mãn $\nu_0(H) = m$ và $v(H) = 2\nu_0(H)$. Theo Bổ đề 2.11 thì H có một ghép cặp có thứ tự $\{\{x_i, y_i\} \mid i = 1, \ldots, m\}$ thỏa mãn $(\{x_1, \ldots, x_m\}, \{y_1, \ldots, y_m\})$ là một song phân hoạch của H.

Không mất tính tổng quát ta hoàn toàn có thể giả thiết rằng $x_i = i$ và $y_i = m + i$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. Đặt $F := \{2m + 1, \ldots, n\}$ và $S := k[x_1, \ldots, x_{2m}]$ là vành đa thức $2m$ biến trên trường k.

Lấy $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}) \in \mathbb{N}^{2m}$ là một véc tơ được xác định như sau:

$$\alpha_j := \begin{cases} j - 1 & \text{với } j = 1, \ldots, m, \\ 2m - j & \text{với } j = m + 1, \ldots, 2m. \end{cases}$$

Vì H có một ghép cặp có thứ tự là $\{\{i, m+i\} \mid i = 1, \ldots, m\}$ và một song phân hoạch

$$(\{1, \ldots, m\}, \{m + 1, \ldots, 2m\}),$$

nên theo Công thức (2.12) ta có:

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(H)^m) = \langle F_{i,m+i} \mid i = 1, \ldots, m \rangle .$$

Đặt $\Lambda := \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(H)^m)$, theo tính chất của đối ngẫu Alexander (xem [12, Bổ đề 5.5.3, trang 241]) ta có

$$\dim_k \widetilde{H}_{m-2}(\Lambda; k) = \dim_k \widetilde{H}_{m-1}(\Lambda^*; k).$$

Hơn nữa do $\Lambda = \langle F_{i,m+i} \mid i = 1, \dots, m\rangle$ nên

$$\Lambda^* = \langle \{1\}, \{m+1\}\rangle * \langle \{2\}, \{m+2\}\rangle * \cdots * \langle \{m\}, \{2m\}\rangle .$$

Do đó $\dim_k \widetilde{H}_{m-1}(\Lambda^*; k) \neq 0$ và ta suy ra rằng $\dim_k \widetilde{H}_{m-2}(\Lambda; k) \neq 0$.

Mặt khác Định lý 1.27 suy ra rằng

$$\dim_k H_{\mathfrak{n}}^{m-1}(S/J(H)^m)_{\boldsymbol{\alpha}} = \dim_k \widetilde{H}_{m-2}(\Lambda; k),$$

trong đó $\mathfrak{n} = (x_1, \dots, x_{2m}) \subset S$ là iđêan thuần nhất cực đại duy nhất của S. Do vậy $H_{\mathfrak{n}}^{m-1}(S/J(H)^m) \neq 0$ và

$$\operatorname{depth} S/J(H)^m \leqslant m - 1. \tag{2.13}$$

Tiếp tục nếu đặt $F := \{2m+1, \dots, n\}$ thì $J(H) = J(G)R_F \cap S$ và $J(H)^m = J(G)^m R_F \cap S$. Cùng với Bất đẳng thức (2.13) và Bổ đề 2.12 ta có

$$\operatorname{depth} R/J(G)^m \leqslant |F| + \operatorname{depth} S/J(H)^m \leqslant (n-2m)+(m-1) = n - \nu_0(G) - 1.$$

Mặt khác theo [15, Hệ quả 3.9] chúng ta đã biết $\ell(J(G)) = \nu_0(G) + 1$. Do vậy từ các Định lý 2.2 và 2.3, ta có thể thấy

$$\operatorname{depth} R/J(G)^m \geqslant n - \nu_0(G) - 1.$$

Vì vậy $\operatorname{depth} R/J(G)^m = n - \nu_0(G) - 1$.

Hơn nữa lại theo các Định lý 2.2 và Định lý 2.3 thì dãy $\{\operatorname{depth} R/J(G)^s\}_{s \geqslant 1}$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $n - \nu_0(G) - 1$. Vì vậy chúng ta có

$$\operatorname{depth} R/J(G)^s = n - \nu_0(G) - 1 \text{ với mọi } s \geqslant m = \nu_0(G).$$

Ta suy ra $\operatorname{dstab}(J(G)) \leqslant \nu_0(G)$. Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 2.16. Theo [15, Hệ quả 3.9] ta có $\ell(J(G)) = \nu_0(G) + 1$. Vì vậy đối với đồ thị hai phần ta có

$$\operatorname{dstab}(J(G)) \leqslant \nu_0(G) \leqslant \ell(J(G)) - 1 < \ell(J(G)).$$

Như vậy, giả thuyết của J. Herzog, A. Qureshi [35] đúng cho iđêan phủ của các đồ thị hai phần.

Trong phần cuối của mục này, chúng tôi xây dựng một ví dụ (Định lý 2.18) để chứng tỏ rằng chặn mà chúng tôi đạt được trong Định lý 2.15 là tối ưu.

Bổ đề 2.17. ([39, Bổ đề 3.5]) *Cho G là một đồ thị với $2m$ đỉnh. Khi đó* $\operatorname{depth} R/J(G) = m-1$ *nếu và chỉ nếu G chứa m cạnh phân biệt.*

Định lý 2.18. *Cho $m \geqslant 1$ là một số nguyên và G là một đồ thị với tập đỉnh là $V(G) = \{1, \ldots, 2m\}$ với tập cạnh*

$$E(G) = \{\{i, m+j\} \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m\}.$$

Khi đó $\nu_0(G) = m$ và $\operatorname{depth} R/J(G)^s = 2m - \nu_0(G) - 1$ *nếu và chỉ nếu $s \geqslant \nu_0(G)$.*

Chứng minh. Rõ ràng rằng $\nu_0(G) = m$, hơn nữa theo Định lý 2.15 ta chỉ phải chỉ ra rằng nếu $\operatorname{depth} R/J(G)^s = m-1$ thì ta có $s \geqslant m$.

Thật vậy, vì $\operatorname{depth} R/J(G)^s = m-1$ nên tồn tại một véc tơ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$ sao cho

$$H_{\mathfrak{m}}^{m-1}(R/J(G)^s)_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0. \tag{2.14}$$

Đầu tiên chúng ta sẽ chứng minh rằng $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^{2m}$. Thật vậy, giả sử đặt $F := CS_{\boldsymbol{\alpha}}$ và $S := k[x_i \mid i \notin F]$, gọi H là một đồ thị con cảm sinh của đồ thị G trên tập đỉnh $[2m] \setminus F$. Khi đó ta có $J(H) = J(G)R_F \cap S$. Theo Bổ đề 2.13 ta suy ra

$$\operatorname{depth} S/J(H)^s = \operatorname{depth} R/J(G)^s - |F| = m - 1 - |F| = \dim S - m - 1.$$

Cùng với các Định lý 2.2 và Định lý 2.3, chúng ta có thể suy ra rằng $\dim S - m - 1 \geqslant \dim S - \nu_0(H) - 1$. Vì vậy $\nu_0(H) \geqslant m$. Từ bất đẳng thức này ta suy ra $\nu_0(H) = m$. Đặc biệt $V(H) = V(G)$ và $CS_{\boldsymbol{\alpha}} = \emptyset$, do đó $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^{2m}$.

Gọi G' là một đồ thị con G bao gồm các cạnh $\{i, j\}$ của G thỏa mãn $\alpha_i + \alpha_j \leqslant s - 1$. Theo Công thức (2.12) thì

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s) = \langle F_{ij} \mid \{i, j\} \in E(G') \rangle .$$

Theo Công thức (2.14) và Định lý 1.27 ta có $\widetilde{H}_{m-2}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s);k) \neq 0$, do vậy phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s)$ không là nón và ta có $V(G') = V(G)$.

Đặt $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^{2m}$, rõ ràng rằng

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(G')) = \langle F_{ij} \mid \{i, j\} \in E(G') \rangle = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s).$$

Vì vậy $\widetilde{H}_{m-2}(\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(G'));k) \neq 0$, cùng với Định lý 1.27 ta suy ra rằng

$$H^{m-1}_{\mathfrak{m}}(R/J(G'))_{\boldsymbol{\beta}} \neq 0,$$

hay $\operatorname{depth} R/J(G') \leqslant m - 1$.

Mặt khác, do $\nu_0(G') \leqslant m$, nên theo hai Định lý 2.2 và 2.3 chúng ta suy ra rằng $\operatorname{depth} R/J(G') \geqslant m - 1$. Vì vậy $\operatorname{depth} R/J(G') = m - 1$ và từ Bổ đề 2.17 ta thấy G' chứa m cạnh phân biệt.

Từ cấu trúc của đồ thị G ta suy ra rằng G' chỉ có m phân biệt như sau:

$$\{1, m+1\}, \{2, m+2\}, \ldots, \{m, 2m\}.$$

Chính vì thế $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s) = \langle F_{1,m+1}, F_{2,m+2}, \ldots, F_{m,2m} \rangle$.

Với mỗi $i = 1, \ldots, m-1$, vì $F_{i,m+i} \in \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^m)$ và $F_{i,m+i+1} \notin \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^m)$, nên theo Công thức (2.12) chúng ta có $\alpha_i + \alpha_{m+i} \leqslant s-1$ và $\alpha_i + \alpha_{m+i+1} \geqslant s$, do đó $\alpha_{m+i} < \alpha_{m+i+1}$. Ta suy ra rằng

$$\alpha_{m+1} < \alpha_{m+2} < \cdots < \alpha_{2m}.$$

Đặc biệt $\alpha_{2m} \geqslant m - 1$, vì $F_{m+1,2m} \in \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(G)^s)$ ta có

$$s - 1 \geqslant \alpha_{m+1} + \alpha_{2m} \geqslant m - 1.$$

Do đó $s \geqslant m$ và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 3

Tính ổn định của chỉ số chính quy

Mục đích chính trong chương này là nghiên cứu tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford của luỹ thừa các iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị unimodular khi lũy thừa của iđêan đủ lớn. Dựa trên tính chất đặc biệt rằng các định thức con của ma trận liên thuộc liên kết với siêu đồ thị unimodular chỉ có giá trị là $-1, 0$ hoặc 1, chúng tôi có thể nghiên cứu chỉ số chính quy của các iđêan này một cách chi tiết. Các kết quả trình bày trong chương này chủ yếu nằm trong [30].

Trong suốt chương này $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức trên trường k và $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular với $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của $\mathcal{H}$.

3.1. Chỉ số chính quy của lũy thừa các iđêan đơn thức không chứa bình phương

Cho I là iđêan thuần nhất của vành đa thức R. Năm 1999, D. Cutkosky, J. Herzog và N. V. Trung [18] đồng thời với V. Kodiyalam [46] đã chứng minh được rằng: tồn tại các số nguyên d, e sao cho $\operatorname{reg}(I^s) = ds + e$ khi $s \geqslant s_0$, với s_0 là giá trị đủ lớn. Sau đó, vào năm 2005, N. V. Trung và H. Wang [56] đã mở rộng kết quả này cho trường hợp tổng quát như sau:

Định lý 3.1. ([56, Định lý 3.2]) *Cho A là một đại số phân bậc chuẩn hữu hạn sinh trên vành Noether A_0, M là $A-$môđun phân bậc hữu hạn sinh và I là một iđêan thuần nhất của A. Khi đó tồn tại các số nguyên $p_M(I)$*

và e sao cho $\operatorname{reg}(I^sM) = p_M(I)s + e$ *với mọi s đủ lớn.*

Nếu V. Kodiyalam [46] chỉ ra rằng hằng số d có thể được xác định thông qua bậc của các phần tử sinh của iđêan I thì việc xác định cụ thể hằng số e và s_0 vẫn là bài toán khó. Chính vì vậy, chúng tôi quan tâm đến hai vấn đề được đưa ra một cách tự nhiên trong [21] như sau:

Vấn đề 1: Tìm chặn trên cho hằng số e;

Vấn đề 2: Tìm chặn trên cho s_0.

Các vấn đề này hiện nay đang thu hút được rất nhiều các nhà nghiên cứu quan tâm đến (xem [3, 4, 6, 7, 25, 27]).

Theo các Công thức (1.3) và (1.5) ta có

$$\operatorname{reg}(I^s) = 1 + \operatorname{reg}(R/I^s) = 1 + \max\{a_i(R/I^s) + i \mid i = 0, \ldots, \dim R/I\}.$$

Vì vậy, một câu hỏi được được đặt ra là: liệu rằng $a_i(R/I^s)$ có là hàm tuyến tính của biến s khi s đủ lớn hay không?

Trong [17] S. Cutkosky đã đưa ra một ví dụ để chỉ ra rằng $\operatorname{reg}(\widetilde{I^n})$ không tiệm cận đến hàm tuyến tính. Do đó có thể thấy bất biến $a_i(R/I^s)$ có thể không là hàm tuyến tính khi s đủ lớn. Tuy nhiên, L. T. Hoa và T. N. Trung [41] đã chỉ ra rằng, nếu I là iđêan đơn thức thì $a_i(R/I^s)$ sẽ tiệm cận đến hàm tựa tuyến tính, được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3.2. ([41, Định nghĩa 1.1]) Hàm $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ được gọi là hàm tựa tuyến tính, nếu tồn tại số nguyên dương N và các số hữu tỷ $a_0, \ldots, a_{N-1}, b_0, \ldots, b_{N-1}$ sao cho với mỗi số nguyên $0 \leqslant i \leqslant N-1$ cho trước, thì với mọi số tự nhiên n mà $n \equiv i(mod\ N), 0 \leqslant i \leqslant N-1$, ta có $f(n) = a_in + b_i$ hoặc $f(n) = -\infty$. Trong trường hợp f không nhận giá trị $-\infty$, ta nói rằng các hàm tuyến tính $f_i(n) = a_in + b_i, i = 0\ldots, N-1$ xác định f.

Vì những lý do đó, đầu tiên luận án quan tâm đến việc chỉ ra dáng điệu tiệm cận của bất biến $a_i(R/I^s)$. Một trong các kết quả chính mà chúng tôi đạt được trong [30] chỉ ra rằng nếu $I = J(\mathcal{H})$, trong đó $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị unimodular thì $a_i(R/I^s)$ là hàm tuyến tính khi $s \geqslant n^2+1$ (Định lý 3.10). Từ kết quả này chúng tôi đưa ra một chặn trên hợp lý (theo nghĩa là hàm tuyến tính của $n = \dim R$) cho vị trí mà tính tiệm cận tuyến tính của $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s$ xảy ra. Cụ thể là khi $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$, trong đó r là hạng của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ thì $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s = d(J(\mathcal{H}))s + e$ (Định lý 3.11).

3.2. Dáng điệu tiệm cận của các bất biến $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ và chỉ số chính quy $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s$

Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị unimodular với tập đỉnh $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$, tập cạnh $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ và $J(\mathcal{H})$ là iđêan phủ của siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $\mathcal{E} \neq \emptyset$, do đó $J(\mathcal{H}) \neq 0$. Ta gọi hạng của $\mathcal{H}$, ký hiệu $\operatorname{rank}(\mathcal{H})$, là lực lượng cực đại của các cạnh của $\mathcal{E}$, tức là:

$$\operatorname{rank}(\mathcal{H}) := \max\{\mid E \mid : E \in \mathcal{E}\}.$$

Ta giả sử rằng $H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^q)_{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$ với $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$ và $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Từ Định lý 1.27 ta có:

$$\dim_k \widetilde{H}_{p-1}(\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H})^q); k) = \dim_k H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^q)_{\boldsymbol{\beta}} \neq 0. \tag{3.1}$$

Do đó phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H})^q)$ không là phức đơn hình acyclic.

Vì $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ với $m \geqslant 1$ nên theo Đẳng thức (1.8) ta có:

$$\Delta(J(\mathcal{H})) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_m \rangle.$$

Hơn nữa ta có thể giả sử

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H})^q) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_k \rangle$$

với $1 \leqslant k \leqslant m$.

Với mỗi $t \geqslant 1$ là một số nguyên bất kỳ, từ Hệ (1.15) ta có $\mathcal{P}_t$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant t-1 & \text{với } j=1,\dots,k,\\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j=k+1,\dots,m,\\ x_1\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Khi đó $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_q$ và theo Bổ đề 1.31 ta có

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H})^t) = \langle \mathcal{V}\setminus E_1,\dots,\mathcal{V}\setminus E_k\rangle = \Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H})^q) \text{ với mỗi } \boldsymbol{\alpha}\in \mathcal{P}_t\cap \mathbb{N}^n.$$

Từ Nhận xét 1.45 ta có $\mathcal{P}_t$ là đa diện lồi. Hơn nữa các đỉnh của $\mathcal{P}_t$ là các đỉnh nguyên theo kết quả sau:

Mệnh đề 3.3. [53, Định lý 19.3, trang 269] *Nếu A là ma trận unimodular hoàn toàn thì với mỗi véctơ nguyên $b\in\mathbb{R}^m$, tập lồi đa diện $\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\leqslant b\}$ chỉ có các đỉnh nguyên.*

Từ Hệ (1.16) ta có $\overline{\mathcal{C}_t}$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$ của hệ các bất phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant t & \text{với } j=1,\dots,k,\\ \sum_{i\in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j=k+1,\dots,m,\\ x_1\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0. \end{cases}$$

Bổ đề 1.41 và Hệ quả 1.44 suy ra rằng $\overline{\mathcal{C}_t}$ là đa diện lồi với các đỉnh nguyên không âm trong $\mathbb{R}^n$.

Chúng tôi giới thiệu một định nghĩa mà chúng tôi dùng nhiều lần trong chứng minh của các kết quả chính của chương này.

Định nghĩa 3.4. Cho $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ là một véctơ và S là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Đặt $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1+\cdots+\alpha_n$, ta gọi

$$\delta(S) := \max\{|\boldsymbol{\alpha}| \mid \boldsymbol{\alpha}\in S\}.$$

Nhận xét 3.5. i) Khi S là đa diện lồi trong $\mathbb{R}^n$ thì $\delta(S)$ đạt được tại một đỉnh nào đó của S (xem [42, Hệ quả 2.14, trang 71]).

ii) Vì $\overline{\mathcal{C}_1}$ là một đa diện lồi với các đỉnh nguyên không âm, do đó theo i) tồn tại một đỉnh $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ của $\overline{\mathcal{C}_1}$ sao cho

$$\delta(C_1) = |\boldsymbol{\gamma}| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$$

Gọi $d := |\boldsymbol{\gamma}|$, do $\overline{\mathcal{C}_1}$ là một đa diện lồi có chiều n nên ta có $d \geqslant 1$. Hơn nữa, $t\boldsymbol{\gamma}$ cũng là một đỉnh của $\overline{\mathcal{C}_t}$ nên $\delta(\overline{\mathcal{C}_t}) = dt$. Ta đã biết $\mathcal{P}_t \subseteq \overline{\mathcal{C}_t}$, nên $\delta(\mathcal{P}_t) \leqslant dt$. Từ Mệnh đề 3.3 và Nhận xét 3.5(i) ta suy ra $\delta(\mathcal{P}_t)$ là số nguyên. Do đó ta có thể đặt

$$\delta(\mathcal{P}_t) = dt - e_t \text{ với } e_t \geqslant 0 \text{ là một số nguyên.} \tag{3.3}$$

Bổ đề sau đây đóng vai trò như một chìa khóa quan trọng cho kết quả chính mà chúng tôi thu được. Nó cho ta thấy $\delta(\mathcal{P}_t)$ cũng là hàm tuyến tính khi t đủ lớn.

Ta nhắc lại rằng nếu $x \in \mathbb{R}$ là một số thực bất kỳ thì $\lceil x \rceil$ là ký hiệu của số nguyên bé nhất sao cho nó lớn hơn hoặc bằng x.

Bổ đề 3.6. *Cho $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ là siêu đồ thị unimodular. Khi đó tồn tại các số nguyên không âm d và e, với $e \leqslant n^2$ sao cho*

$$\delta(\mathcal{P}_t) = dt - e \text{ với } t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1,$$

trong đó $r = \operatorname{rank}(\mathcal{H})$.

Để chứng minh Bổ đề 3.6 chúng ta cần đến kết quả sau:

Bổ đề 3.7. *Nếu $\mathcal{P}_t \neq \emptyset$ thì $\mathcal{P}_{t+1} \neq \emptyset$. Hơn nữa $e_t \geqslant e_{t+1}$.*

Chứng minh. Giả sử $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{P}_t$ sao cho $\delta(\mathcal{P}_t) = |\boldsymbol{\alpha}|$, vì $\boldsymbol{\alpha}$ là một nghiệm của Hệ (3.2) và theo Nhận xét 3.5(ii) ta gọi $\boldsymbol{\gamma}$ là một nghiệm của Hệ (3.2.) khi ta thay t bởi 1. Do đó $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}$ là một véctơ thỏa mãn các ràng buộc sau đây:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} (\alpha_i + \gamma_i) \leqslant t & \text{với } j = 1, \ldots, k, \\ \sum_{i \in E_j} (\alpha_i + \gamma_i) \geqslant t + 1 & \text{với } j = k+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Nói cách khác, ta có $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{P}_{t+1}$. Suy ra $\mathcal{P}_{t+1} \neq \emptyset$ và $\delta(\mathcal{P}_{t+1}) \geqslant |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\gamma}|$. Ta có $\delta(\mathcal{P}_{t+1}) = d(t+1) - e_{t+1}$ và $|\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\gamma}| = d(t+1) - e_t$, nên suy ra $e_t \geqslant e_{t+1}$. □

Chứng minh. Bổ đề 3.6

Gọi d và e_t là các số nguyên được xác định trong Đẳng thức (3.3), theo các Bổ đề 1.46 và Bổ đề 3.7 ta có dãy giảm các số nguyên không âm $e_n \geqslant e_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant 0$. Vì dãy này không thể lùi mãi, nên phải tồn tại một chỉ số $t_0 \geqslant n$ sao cho $e_t = e_{t_0}$ với mọi $t \geqslant t_0$. Ta gọi $e := e_{t_0}$, khi đó

$$\delta(\mathcal{P}_t) = dt - e, \text{ với mọi } t \geqslant t_0.$$

Theo Bổ đề 3.7 chúng ta có

$$\delta(\mathcal{P}_t) \leqslant dt - e \text{ khi } \mathcal{P}_t \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

Gọi s là một số nguyên thỏa mãn $s \geqslant \max\{n^2+e+1, t_0\}$, khi đó $\delta(\mathcal{P}_s) = ds - e$. Ta biết rằng $\mathcal{P}_s$ là một đa diện lồi nên $\delta(\mathcal{P}_s) = |\boldsymbol{\alpha}|$ với $\boldsymbol{\alpha}$ là một đỉnh nguyên của $\mathcal{P}_s$.

$\mathcal{P}_s$ được xác định thông qua hệ bất phương trình tuyến tính như sau:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i \leqslant s-1 & \text{với } j = 1, \ldots, k, \\ \sum_{i \in E_j} x_i \geqslant s & \text{với} j = k+1, \ldots, m, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Theo [53, Công thức 23, trang 104] ta có $\boldsymbol{\alpha}$ là nghiệm duy nhất của hệ các phương trình tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i = s-1 & \text{với } j \in S_1, \\ \sum_{i \in E_j} x_i = s & \text{với } j \in S_2, \\ x_j = 0, & \text{với } j \in S_3, \end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó $S_1 \subseteq \{1, \ldots, k\}$, $S_2 \subseteq \{k+1, \ldots, m\}$ và $S_3 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sao cho $|S_1| + |S_2| + |S_3| = n$.

Gọi A là ma trận hệ số của Hệ phương trình (3.6) và giả sử $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Khi đó với mỗi i, gọi A_i là ma trận thu được từ ma trận hệ số A bằng cách thay cột thứ i bởi cột vế phải với các phần tử được sắp xếp như sau: $|S_1|$ phần tử đầu tiên là $s-1$, $|S_2|$ phần tử tiếp theo là s, $|S_3|$ phần tử cuối là các số không.

Theo quy tắc nghiệm Cramer chúng ta có

$$\alpha_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \ \text{ với } i = 1, \ldots, n.$$

Vì $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular, nên A là ma trận unimodular hoàn toàn, do đó $\det(A) = \pm 1$. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $\det(A) = 1$. Vì vậy, $\alpha_i = \det(A_i)$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Ta biểu diễn ma trận A_i như sau:

$$A_i = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & s-1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & s-1 & \cdots & * \\ * & * & \cdots & s & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & s & \cdots & * \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

Nếu gọi

$$D_i = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 & \cdots & * \\ * & * & \cdots & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 & \cdots & * \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \end{bmatrix} \text{ và } C_i = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 & \cdots & * \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}, \qquad (3.7)$$

thì ta có $\det(A_i) = \det(D_i)s - \det(C_i)$. Để cho thuận tiện ta gọi $d_i := \det(D_i)$ và $c_i := \det(C_i)$. Vậy

$$\alpha_i = \det(A_i) = d_i s - c_i, \text{ với } i = 1, \ldots, n.$$

Trước khi chứng minh các khẳng định của bổ đề, chúng tôi chứng minh một số các khẳng định khác như sau:

Khẳng định 1: $|c_i| \leqslant |S_1|$, với $i = 1, \ldots, n$.

Thật vậy, nếu xóa cột thứ i của ma trận C_i thì ta thu được ma trận unimodular hoàn toàn. Do đó, bằng cách khai triển định thức của ma trận C_i dọc theo cột thứ i ta thu được $|c_i| \leqslant |S_1|$, với $i = 1, \ldots, n$.

Khẳng định 2: $d = d_1 + \cdots + d_n,\ e = c_1 + \cdots + c_n$ và $e \leqslant n^2$.

Thật vậy, nếu đặt $d' := d_1 + \cdots + d_n$ và $c' := c_1 + \cdots + c_n$. Khi đó $|\boldsymbol{\alpha}| = d's - c'$ và $|c'| \leqslant n|S_1| \leqslant n^2$. Vì $\delta(\mathcal{P}_s) = ds - e$, ta có $ds - e = d's - c'$. Suy ra rằng $(d - d')s = e - c'$. Chú ý rằng $|e - c'| \leqslant e + n^2 < s$. Do vậy $d - d' = 0$ và $e - c' = 0$, nói cách khác $d = d'$ và $e = c'$. Đặc biệt, $e \leqslant n^2$.

Khẳng định 3: Với $i = 1, \ldots, n$ ta có $0 \leqslant d_i \leqslant 1$ và $d_i = 1$ nếu $c_i > 0$. Hơn nữa với $j = 1, \ldots, k$ ta có:

$$\sum_{i \in E_j} d_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \sum\limits_{i \in E_j} c_i \leqslant 0, \\ 1 & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

Thật vậy, vì $\boldsymbol{\alpha} = (d_1 s - c_1, \ldots, d_n s - c_n) \in \mathbb{N}^n$ và $|c_i| \leqslant |S_1| \leqslant n < s$, nên với mọi i ta có

$$d_i \geqslant 0, \text{ và } d_i \geqslant 1 \text{ nếu } c_i > 0. \tag{3.8}$$

Do $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_s$, nên từ Hệ (3.5) ta có

$$\left(\sum_{i \in E_j} d_i\right) s - \sum_{i \in E_j} c_i \leqslant s - 1 \text{ với } j = 1, \ldots, k.$$

Vì $d_i \geqslant 0$ với mọi $i = 1, \ldots, n$ nên ta có $\sum_{i \in E_j} d_i \geqslant 0$. Hơn nữa $\sum_{i \in E_j} |c_i| \leqslant |E_j| n \leqslant rn$ với mọi j và $s \geqslant rn + 1$, ta có hai trường hợp sau:

Nếu $\sum\limits_{i \in E_j} c_i \leqslant 0$ thì $s(\sum_{i \in E_j} d_i - 1) \leqslant -1$ ta suy ra rằng $\sum_{i \in E_j} d_i = 0$ với $j = 1, \ldots, k$.

Nếu $\sum\limits_{i \in E_j} c_i > 0$ thì $s(\sum_{i \in E_j} d_i - 1) \leqslant \sum\limits_{i \in E_j} c_i - 1$. Vì s đủ lớn nên ta có $\sum_{i \in E_j} d_i = 1$ với $j = 1, \ldots, k$.

Do đó ta có:

$$\sum_{i \in E_j} d_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \sum\limits_{i \in E_j} c_i \leqslant 0, \\ 1 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases} \tag{3.9}$$

với $j = 1, \ldots, k$.

Mặt khác, theo Nhận xét 1.45 thì $i \in E_j$ với $j \in \{1, \ldots, k\}$ bất kỳ. Do vậy, theo (3.9) suy ra

$$d_i \leqslant \sum_{u \in E_j} d_u \leqslant 1.$$

Cùng với các Bất đẳng thức (3.8) ta suy ra $d_i = 1$ nếu $c_i > 0$. Do đó khẳng định được chứng minh.

Khẳng định 4: Với $j = k+1, \ldots, m$ ta có

$$\sum_{i \in E_j} d_i \geqslant 1, \text{ và } \sum_{i \in E_j} d_i \geqslant 2 \text{ nếu } \sum_{i \in E_j} c_i > 0. \tag{3.10}$$

Thật vậy, từ Hệ (3.5) ta có

$$\left(\sum_{i\in E_j} d_i\right) s - \sum_{i\in E_j} c_i \geqslant s \text{ với } j = k+1, \ldots, m.$$

Ta suy ra

$$s\left((\sum_{i\in E_j} d_i) - 1\right) \geqslant \sum_{i\in E_j} c_i \text{ với } j = k+1, \ldots, m. \tag{3.11}$$

Vì $\sum_{i\in E_j} d_i \geqslant 0$, $\sum_{i\in E_j} |c_i| \leqslant |E_j|n \leqslant rn$ với mọi j và $s \geqslant rn+1$ nên ta có hai trường hợp sau:

Nếu $\sum\limits_{i\in E_j} c_i \leqslant 0$ từ (3.11), ta suy ra $\sum_{i\in E_j} d_i$ không thể bằng 0. Nói cách khác $\sum_{i\in E_j} d_i \geqslant 1$.

Nếu $\sum\limits_{i\in E_j} c_i > 0$, cũng từ (3.11) ta dễ dàng suy ra $\sum_{i\in E_j} d_i \geqslant 2$.

Khẳng định 5: $|c_i| \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Thật vậy, nếu $|S_1| \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ thì hiển nhiên ta có điều cần phải chứng minh được suy ra từ Khẳng định 1.

Ngược lại, nếu $|S_1| > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ thì rõ ràng $|S_2| < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Đặt E_i là một ma trận thu được bằng cách thay cột thứ i của ma trận A_i bởi một cột với các phần tử như sau: $|S_1|$ phần tử đầu là các số không, $|S_2|$ phần tử tiếp theo là các số 1, $|S_3|$ phần tử cuối cùng là các số không. Khi đó bằng cách khai triển định thức $|E_i|$ dọc theo cột thứ i, ta nhận được kết quả $|\det(E_i)| \leqslant |S_2|$.

Mặt khác, từ (3.7) chúng ta có $\det(D_i) = \det(C_i) + \det(E_i)$. Do đó, $|c_i| \leqslant |d_i| + |\det(E_i)| \leqslant |d_i| + |S_2|$. Cùng với các Khẳng định 3 ta suy ra rằng $|c_i| \leqslant 1 + |S_2| \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Khẳng định 6: $(d_1t - c_1, \ldots, d_nt - c_n) \in \mathcal{P}_t$ với mọi $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$

Tiếp theo ta chứng minh $\delta(\mathcal{P}_t) = dt - e$ với mọi $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Thật vậy, cho t là một số nguyên không âm và ta giả sử

$$\boldsymbol{\alpha}(t) := (d_1t - c_1, \ldots, d_nt - c_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Ta chứng minh rằng $\boldsymbol{\alpha}(t)$ thỏa mãn Hệ (3.2).

Trước hết, vì $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < t$ nên theo Khẳng định 3 ta có $\boldsymbol{\alpha}(t)_i \geqslant 0$ với $i = 1, \ldots, n$.

Tiếp theo, với $j = 1, \ldots, k$, lại từ Khẳng định 3 ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\sum_{i \in E_j} d_i = 0$, cùng với Khẳng định 5 ta thu được

$$\sum_{i \in E_j} \boldsymbol{\alpha}(t)_i = \left(\sum_{i \in E_j} d_i \right) t - \sum_{i \in E_j} c_i = - \sum_{i \in E_j} c_i \leqslant r \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leqslant t - 1.$$

Trường hợp 2: $\sum_{i \in E_j} d_i = 1$ và $\sum_{i \in E_j} c_i \geqslant 1$, khi đó

$$\sum_{i \in E_j} \boldsymbol{\alpha}(t)_i = \left(\sum_{i \in E_j} d_i \right) t - \sum_{i \in E_j} c_i = t - \sum_{i \in E_j} c_i \leqslant t - 1.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp ta đều có $\sum_{i \in E_j} \boldsymbol{\alpha}(t)_i \leqslant t - 1$.

Hơn nữa, với $j = k+1, \ldots, m$, theo Khẳng định 4 ta cũng có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\sum_{i \in E_j} d_i = 1$ và $\sum_{i \in E_j} c_i \leqslant 0$, khi đó

$$\sum_{i \in E_j} \boldsymbol{\alpha}(t)_i = \left(\sum_{i \in E_j} d_i \right) t - \sum_{i \in E_j} c_i = t - \sum_{i \in E_j} c_i \geqslant t.$$

Trường hợp 2: $\sum_{i \in E_j} d_i \geqslant 2$, ta đặt $\rho := |\{i \in E_j \mid d_i = 1\}|$. Khi đó $\rho = \sum_{i \in E_j} d_i \geqslant 2$ vì theo Khẳng định 3 ta có hoặc $d_i = 0$, hoặc $d_i = 1$. Chú ý rằng nếu $d_i = 0$ thì $c_i \leqslant 0$, vì ta có $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$. Cùng với Khẳng định 5, ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E_j} \boldsymbol{\alpha}(t)_i &= \left(\sum_{i \in E_j} d_i \right) t - \sum_{i \in E_j} c_i = \rho t - \sum_{i \in E_j : d_i = 1} c_i - \sum_{i \in E_j : d_i = 0} c_i \\ &\geqslant \rho t - \sum_{i \in E_j : d_i = 1} c_i \geqslant \rho t - \rho \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Mặt khác, nếu r là hạng của $\mathcal{H}$, ta có $r \geqslant |E_j| \geqslant \rho$ nên

$$(\rho-1)t \geqslant (\rho-1)\left(r\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right) \geqslant (\rho-1)\left(\rho\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right) \geqslant \rho\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil.$$

Tóm lại, ta có

$$\sum_{i\in E_j}\alpha(t)_i \geqslant \rho t-\rho\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil = t+(\rho-1)t-\rho\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \geqslant t.$$

Vì vậy trong cả hai trường hợp $\sum_{i\in E_j}\boldsymbol{\alpha}(t)_i \geqslant t$. Do đó $\boldsymbol{\alpha}(t)$ là một nghiệm của Hệ bất phương trình (3.2) và $\boldsymbol{\alpha}(t) \in \mathcal{P}_t$. Do đó khẳng định được chứng minh.

Chúng ta quay lại chứng minh khẳng định của bổ đề. Với $t \geqslant r\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1$, theo Khẳng định 6 ta có

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (d_1t-c_1,\ldots,d_nt-c_n) \in \mathcal{P}_t.$$

Cùng với Khẳng định 1, ta có

$$\delta(\mathcal{P}_t) \geqslant |\boldsymbol{\alpha}(t)| = (d_1+\ldots+d_n)t-(c_1\ldots+c_n) = dt-e,$$

và $e \leqslant n^2$. Mặt khác, do $\boldsymbol{\alpha}(t) \in \mathcal{P}_t$ nên $\mathcal{P}_t \neq \emptyset$. Vì vậy theo Bất đẳng thức (3.4) ta có $\delta(\mathcal{P}_t) \leqslant dt-e$. Do đó $\delta(\mathcal{P}_t) = dt-e$, và bổ đề được chứng minh. $\square$

Trước khi đưa ra kết quả về dáng điệu tiệm cận của $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$. Chúng tôi có một bổ đề đưa ra sự so sánh giữa hai hệ số d và e trong biểu diễn của $\delta(\mathcal{P}_t)$.

Bổ đề 3.8. *Giả sử $\delta(\mathcal{P}_t) = dt-e$ với mọi $t \gg 0$. Khi đó $d \leqslant e$.*

Chứng minh. Trước hết ta thấy rằng $\delta(\mathcal{P}_t)$ là giá trị tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max(x_1+\cdots+x_n)$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{i\in E_j} x_i \leqslant t-1 & \text{với } j=1,\dots,k, \\ \sum_{i\in E_j} -x_i \leqslant -t & \text{với } j=k+1,\dots,m, \\ x_1 \geqslant 0,\dots,x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Gọi A là ma trận hệ số của k bất phương trình tuyến tính đầu của Hệ (3.12) và B là ma trận hệ số của $q := m-k$ bất phương trình tiếp theo. Khi đó bài toán đối ngẫu của Bài toán (3.12) là:

$$\min((y_1+\cdots+y_k-z_1-\cdots-z_q)t-(y_1+\cdots+y_k))$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} (y_1,\dots,y_k)A+(z_1,\dots,z_q)B \geqslant \mathbf{1}_n^T, \\ y_1 \geqslant 0,\dots,y_k \geqslant 0, z_1 \geqslant 0,\dots,z_q \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

trong đó $\mathbf{1}_n = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$.

Vì Bài toán (3.13) sẽ xác định một tập lồi đa diện trong $\mathbb{R}^m$ ta gọi $\mathcal{Q}$, suy ra rằng tồn tại một đỉnh $(u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_q)$ của $\mathcal{Q}$ sao cho trong tập lồi đa diện này ta có

$$\min((y_1+\cdots+y_k-z_1-\cdots-z_q)t-(y_1+\cdots+y_k)) = at-b \text{ với } t \gg 0,$$

trong đó $a = u_1+\cdots+u_k-(v_1+\cdots+v_q)$ và $b = u_1+\cdots+u_k$. Vì $u_i \geqslant 0$ và $v_j \geqslant 0$ với mọi i và j nên ta có $a \leqslant b$.

Theo 2) của Nhận xét 1.38 ta có

$$\max\{x_1+\cdots+x_n \mid (x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{P}_t\} = at-b \text{ với } t \gg 0.$$

Do đó, $\delta(\mathcal{P}_t) = dt-e = at-b$ với $t \gg 0$. Từ đó suy ra rằng $d=a$ và $e=b$. Nói cách khác $d \leqslant e$. □

Bổ đề 3.9. *Giả sử rằng $a_p(R/J(\mathcal{H})^s) \neq -\infty$ với $p \geqslant 0$ và $s \geqslant 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương d và e sao cho* *a)* $d \leqslant e \leqslant n^2$;

b) $a_p(R/J(\mathcal{H})^t) \geqslant dt - e$ *với* $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$; *và*

c) Nếu $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$, *thì* $a_p(R/J(\mathcal{H})^s) = ds - e$.

Chứng minh. Vì $a_p(R/J(\mathcal{H})^s) \neq -\infty$ nên tồn tại $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$ sao cho

$$H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^s)_{\boldsymbol{\beta}'} \neq 0 \text{ và } a_p(R/J(\mathcal{H})^s) = |\boldsymbol{\beta}'|.$$

Từ Định lý 1.27 ta có:

$$\dim_k \widetilde{H}_{p-|G_{\boldsymbol{\beta}'}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^s); k) = \dim_k H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^s)_{\boldsymbol{\beta}'} \neq 0. \tag{3.14}$$

Đặc biệt, phức đơn hình $\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^s)$ không là phức acyclic.

Nếu $CS_{\boldsymbol{\beta}'} = [n]$, thì $\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^s)$ hoặc là $\{\emptyset\}$ hoặc là phức trống. Nhưng do $\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^s)$ không là phức acyclic, nên $\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^s) = \{\emptyset\}$. Tuy nhiên theo Công thức (1.10) chúng ta có $J(\mathcal{H}) = 0$ và điều này là mâu thuẫn vì chúng ta đã giả sử $\mathcal{E} \neq \emptyset$, do đó $G_{\boldsymbol{\beta}'} \neq [n]$.

Ta có thể giả sử rằng $CS_{\boldsymbol{\beta}'} = \{m+1, \ldots, n\}$ với $1 \leqslant m \leqslant n$.

Đặt $S := k[x_1, \ldots, x_m]$, gọi $\mathcal{H}'$ là một siêu đồ thị trên tập đỉnh $\mathcal{V}' = \{1, \ldots, m\}$ với tập cạnh $\mathcal{E}' = \{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq \mathcal{V}'\}$. Vì rằng $A(\mathcal{H}')$ là một ma trận con của $A(\mathcal{H})$, nên ta có $\mathcal{H}'$ cũng là siêu đồ thị unimodular. Hơn nữa, theo Đẳng thức (1.7) ta thu được:

$$J(\mathcal{H})R_{G_{\boldsymbol{\beta}'}} \cap S = J(\mathcal{H}'). \tag{3.15}$$

Đặt $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$. Bằng cách sử dụng các Công thức (1.10) và Đẳng thức (3.15) ta có

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H}')^t) = \Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^t) \text{ với } t \geqslant 1 \text{ bất kỳ}. \tag{3.16}$$

Hơn nữa cùng với (3.1), ta suy ra rằng $\widetilde{H}_{p-|CS_{\boldsymbol{\beta}'}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H}')^s); k) \neq 0$. Lại theo Định lý 1.27 ta nhận được

$$H^{p-|CS_{\boldsymbol{\beta}'}|}_{\mathfrak{n}}(S/J(\mathcal{H}')^s)_{\boldsymbol{\beta}} \neq 0,$$

trong đó $\mathfrak{n} = (x_1, \ldots, x_m)$ là iđêan thuần nhất cực đại của S.

Giả sử rằng $\mathcal{E}' = \{E_1, \ldots, E_k\}$, trong đó $k \geqslant 1$, từ Công thức (1.8) ta có

$$\Delta(J(\mathcal{H}')) = \langle \mathcal{V}' \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V}' \setminus E_k \rangle .$$

Theo Bổ đề 1.31 chúng ta có thể giả sử rằng

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H}')^s) = \langle \mathcal{V}' \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V}' \setminus E_q \rangle ,$$

với $1 \leqslant q \leqslant k$.

Giả sử $t \geqslant 1$ là một số nguyên bất kỳ, ta biết $\mathcal{P}_t$ là tập nghiệm trong $\mathbb{R}^m$ của hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} \sum_{i \in E_j} x_i \leqslant t-1 & \text{với } j = 1, \ldots, q, \\ \sum_{i \in E_j} x_i \geqslant t & \text{với } j = q+1, \ldots, k, \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_m \geqslant 0. \end{cases}$$

Rõ ràng $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_s$, theo Hệ bất phương trình (3.2.) và Bổ đề 1.31 ta có

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H}')^t) = \langle \mathcal{V} \setminus E_1, \ldots, \mathcal{V} \setminus E_q \rangle = \Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H}')^s), \tag{3.17}$$

khi $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_t \cap \mathbb{N}^m$.

Cùng với các Bổ đề 3.6, Bổ đề 3.8 và Nhận xét 3.5, ta có tồn tại các số nguyên không âm d và f, trong đó $d \leqslant f \leqslant m^2$, sao cho

$$\delta(\mathcal{P}_t) = dt - f, \text{ với mọi } t \geqslant r \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1.$$

Khi $t \geqslant r \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ là một số nguyên bất kỳ, chúng ta có $\delta(\mathcal{P}_t) = dt - f$. Gọi $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ là một đỉnh nguyên của đa diện lồi $\mathcal{P}_t$ sao cho $\delta(\mathcal{P}_t) = |\boldsymbol{\alpha}|$. Ta đặt $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{Z}^n$, khi đó $CS_{\boldsymbol{\alpha}'} = CS_{\boldsymbol{\beta}'}$. Từ các Đẳng thức (3.16) và (3.17) ta thu được

$$\Delta_{\boldsymbol{\alpha}'}(J(\mathcal{H})^t) = \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}(J(\mathcal{H}')^t) = \Delta_{\boldsymbol{\beta}}(J(\mathcal{H}')^s) = \Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^s).$$

Theo Định lý 1.27 chúng ta có

$$\dim_k H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^t)_{\boldsymbol{\alpha}'} = \dim_k \widetilde{H}_{p-|CS_{\boldsymbol{\alpha}'}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\alpha}'}(J(\mathcal{H})^t); k)$$

$$= \dim_k \widetilde{H}_{p-|CS_{\boldsymbol{\beta}'}|-1}(\Delta_{\boldsymbol{\beta}'}(J(\mathcal{H})^s);k) \neq 0.$$

Nói cách khác, $H^p_{\mathfrak{m}}(R/J(\mathcal{H})^t)_{\boldsymbol{\alpha}'} \neq 0$ và vì vậy

$$a_p(R/J(\mathcal{H})^t) \geqslant |\boldsymbol{\alpha}'| = |\boldsymbol{\alpha}| - (n-m) = dt - (f+n-m) = dt - e,$$

với $e := f + n - m$. Chú ý rằng $d \leqslant f \leqslant e \leqslant m^2 + (n-m) \leqslant n^2$.

Lập luận này cũng chỉ ra rằng $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \ldots, \beta_m, -1, \ldots, -1)$ và $|\boldsymbol{\beta}| = \delta(\mathcal{P}_s)$. Do đó, nếu $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ thì $|\boldsymbol{\beta}| = \delta(\mathcal{P}_s) = ds - f$ và

$$a_p(R/J(\mathcal{H})^s) = |\boldsymbol{\beta}'| = |\boldsymbol{\beta}| - (n-m) = ds - (f+n-m) = ds - e.$$

Ta suy ra điều phải chứng minh. □

Định lý sau đây là một kết quả chính thứ nhất mà chúng tôi đạt được. Nó chỉ ra dáng điệu tiệm cận của $a_i(R/J(\mathcal{H})^s)$ theo biến s.

Định lý 3.10. *Cho $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị unimodular và i là số nguyên không âm bất kỳ. Khi đó hoặc $a_i(R/J(\mathcal{H})^s) = -\infty$ với mọi $s \geqslant 1$, hoặc tồn tại các số nguyên dương d và e, với $d \leqslant e$, sao cho $a_i(R/J(\mathcal{H})^s) = ds - e$ với mọi $s \geqslant n^2$.*

Chứng minh. Nếu $n = 1$ thì $R = k[x_1]$ và khi đó $J(\mathcal{H}) = (x_1)$. Do vậy định lý đúng trong trường hợp này.

Vì vậy, chúng ta sẽ giả sử rằng $n \geqslant 2$ và $a_i(R/J(\mathcal{H})^k) \neq -\infty$ với $k \geqslant 1$ nào đó. Theo Bổ đề 3.9 ta có $a_i(R/J(\mathcal{H})^t) \neq -\infty$ với mọi $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Giả sử s_0 là một số nguyên sao cho $s_0 \geqslant n^2$. Ta chú ý rằng $r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leqslant n^2$ khi $n \geqslant 2$, vì vậy $a_i(R/J(\mathcal{H})^{s_0}) \neq -\infty$. Từ Bổ đề 3.9, tồn tại các số nguyên d và e với $d \leqslant e \leqslant n^2$ sao cho

(a) $a_i(R/J(\mathcal{H})^{s_0}) = ds_0 - e$; và

(b) $a_i(R/J(\mathcal{H})^t) \geqslant dt - e$ với mọi $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $a_i(R/J(\mathcal{H})^s) = ds - e$ với mọi $s \geqslant n^2$.

Thật vậy, với $s \geqslant n^2$, lại theo Bổ đề 3.9, tồn tại các số nguyên dương a và b với $a \leqslant b \leqslant n^2$ sao cho

(c) $a_i(R/J(\mathcal{H})^s) = as - b$; và

(d) $a_i(R/J(\mathcal{H})^t) \geqslant at - b$ với mọi $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Từ (b) và (c) ta có $as - b \geqslant ds - e$, hoặc đương tương

$$(a-d)s \geqslant b - e. \tag{3.18}$$

Ta có $1 \leqslant b, e \leqslant n^2$, do đó $|b-e| = \max\{b-e, e-b\} \leqslant n^2 - 1 < s$. Cùng với Bất đẳng thức (3.18), ta có $a \geqslant d$.

Một cách tương tự, từ (a) và (d) ta có $d \geqslant a$ và

$$(d-a)s_0 \geqslant e - b, \tag{3.19}$$

do đó $a = d$. Kết hợp đẳng thức này với các Bất đẳng thức (3.18) và Bất đẳng thức (3.19), ta nhận được $e \geqslant b$ và $b \geqslant e$. Do vậy ta có $b = e$. Khi đó ta có

$$a_i(R/J(\mathcal{H})^s) = as - b = ds - e.$$

Ta suy ra điều cần phải chứng minh. $\square$

Cuối cùng, chúng tôi thu được kết quả chính thứ hai, cũng là kết quả quan trọng nhất của chương này về tính tiệm cận tuyến tính của chỉ số chính quy của luỹ thừa các iđêan phủ $J(\mathcal{H})$.

Định lý 3.11. *Cho $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị unimodular với n đỉnh và có hạng r. Khi đó tồn tại số nguyên không âm $e \leqslant \dim R/J(\mathcal{H}) - d(J(\mathcal{H})) + 1$ sao cho $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^s = d(J(\mathcal{H}))s + e$ với mọi $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.*

Chứng minh. Nếu $n = 1$ hoặc $r = 1$, thì $J(\mathcal{H})$ là iđêan chính và do đó định lý đúng trong các trường hợp này.

Vì vậy, chúng ta sẽ giả sử rằng $n \geqslant 2$ và $r \geqslant 2$.

Đặt $\delta := \dim R/J(\mathcal{H})$, rõ ràng $\delta < n$ vì $J(\mathcal{H}) \neq 0$. Do vậy

$$\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^t) = \max\{a_i(R/J(\mathcal{H})^t) + i \mid i = 0, \ldots, \delta\} \text{ với } t \geqslant 1.$$

Theo Định lý 3.10 ta suy ra rằng, tồn tại các số nguyên t_0, d và e với $e \leqslant \delta - d$ sao cho

$$\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^t = dt + e \text{ với mọi } t \geqslant t_0. \tag{3.20}$$

Theo Công thức (1.5) ta có $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^t = \operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^t + 1$, vì vậy khi so sánh với [46, Theorem 5] ta suy ra rằng $d = d(J(\mathcal{H}))$ và $e \geqslant -1$. Do đó ta có $e \leqslant \delta - d(J(\mathcal{H}))$.

Gọi k là một số nguyên sao cho $k \geqslant \max\{t_0, 2n^2\}$. Ta giả sử rằng $\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^k = a_i(R/J(\mathcal{H})^k) + i$, với $0 \leqslant i \leqslant \delta$. Từ Bổ đề 3.9, tồn tại các số nguyên không âm a và b' với $a \leqslant b' \leqslant n^2$, sao cho $a_i(R/J(\mathcal{H})^k) = ak - b'$ và $a_i(R/J(\mathcal{H})^t) \geqslant at - b'$ với mọi $t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Đặt $b := -b' + i$, khi đó $-n^2 \leqslant b \leqslant i - a \leqslant \delta - a$, $\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^k = ak + b$ và

$$\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^t \geqslant at + b \text{ với mọi } t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1. \tag{3.21}$$

Do $\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^k = ak + b = dk + e$, nên ta có $(d - a)k = b - e$. Cùng với các bất đẳng thức $|b - e| \leqslant |b| + e \leqslant n^2 + \delta + 1 \leqslant n^2 + n < 2n^2 \leqslant k$, ta suy ra rằng $d = a$ và vì vậy $b = e$. Do đó ta thấy Bất đẳng thức (3.21) trở thành

$$\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^t \geqslant dt + e \text{ với mọi } t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1. \tag{3.22}$$

Mục đích tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng các bất đẳng thức kể trên thực chất là các đẳng thức và khi đó định lý là thỏa đáng vì $\operatorname{reg} J(\mathcal{H})^t = \operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^t + 1$ với $t \geqslant 1$.

Thật vậy, để chứng minh điều đó, ta gọi s là một số nguyên sao cho $s \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. Từ những lập luận ở trên, ta có tồn tại các số nguyên c và f với $f \leqslant \delta - c$, sao cho $\operatorname{reg} R/J(H)^s = cs + f$ and

$$\operatorname{reg} R/J(H)^t \geqslant ct + f \text{ với } t \geqslant r\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1. \tag{3.23}$$

Theo các Bất đẳng thức (3.20) và (3.23) ta nhận được $c \leqslant d$.

Vì $\operatorname{reg} R/J(H)^s = cs+f$, theo Bất đẳng thức (3.22) ta có $cs+f \geqslant ds+e$. Vì vậy $(d-c)s \leqslant f-e$. Mặt khác do $c \leqslant d$, nên ta suy ra rằng $f \geqslant e$, đặc biệt $f \geqslant -1$. Rõ ràng rằng $n \leqslant s$ vì $r \geqslant 2$, vì vậy ta có

$$f - e \leqslant (\delta - c) + 1 \leqslant \delta < n \leqslant s.$$

Kết hợp với $(d-c)s \leqslant f-e$ và $c \leqslant d$, ta nhận được $d-c=0$, hay $d=c$. Cùng với Đẳng thức (3.20) và Bất đẳng thức (3.23) chúng ta có $e \geqslant f$, hay $e=f$.

Tóm lại, vì $d=c$ và $e=f$ nên ta có $\operatorname{reg} R/J(\mathcal{H})^s = cs+f = ds+e$. Định lý được chứng minh. □

Khi G là đồ thị hai phần, chúng tôi chặn trên vị trí xảy ra tính tuyến tính của chỉ số chính quy của luỹ thừa các iđêan phủ bởi một giá trị rất đẹp như sau:

Hệ quả 3.12. *Cho G là một đồ thị hai phần với n đỉnh. Khi đó* $\operatorname{reg} J(G)^s$ *là một hàm tuyến tính của s với mọi $s \geqslant n+2$.*

Kết luận

Trong luận án này, bằng các công cụ tổ hợp, chúng tôi đã đạt được một số kết quả chính sau:

- Chứng minh được tính giảm của hàm độ sâu của một số các iđêan đơn thức không chứa bình phương, đồng thời chặn trên được chỉ số ổn định độ sâu của các iđêan đó;
- Chứng minh được tính tiệm cận tuyến tính của bất biến $a_i(R/I^n)$, khi I là iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị;
- Chứng minh được dáng điệu tiệm cận của chỉ số chính quy của lũy thừa các iđêan phủ liên kết với siêu đồ thị cho trước. Hơn nữa, chúng tôi đã chỉ ra chặn trên hợp lý cho vị trí trở thành hàm tuyến tính của chỉ số chính quy khi lũy thừa của iđêan đủ lớn.

Các công trình liên quan đến luận án

1. N. T. Hang and T. N. Trung (2017), *The behavior of depth functions of powers of cover ideals of unimodular hypergraphs*, Ark. Math., Vol. **55**(1), pp. 89-104.

2. N. T. Hang and T. N. Trung (2018), *Regularity of powers of cover ideals of unimodular hypergraphs*, Journal of Algebra, Vol. **513**, pp. 159-176.

3. N. T. Hang, *Stability of depth functions of cover ideals of balanced hypergraphs*, to appear in Journal of Algebra and Its Applications (DOI: 10.1142/S0219498820500553).

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Xêmina Đại số và Lý thuyết số - Viện Toán học
- Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học: 10/2015; 10/2016; 10/2017; 10/2018
- Hội nghị Đại số - Hình học - Tôpô (Buôn Ma Thuột): 10/2016
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán (Thái Nguyên): 01/2017
- Hội nghị quốc tế về Đại số giao hoán (TP Hồ Chí Minh): 09/2017
- Hội nghị Đại số giao hoán và các liên hệ với Tổ hợp, Hình học rời rạc và Lý thuyết kỳ dị (Hà Nội - Hạ Long): 09/2017
- Đại hội Toán học toàn quốc (Nha Trang - Khánh Hòa): 08/2018
- Hội nghị Toán học Việt - Mỹ (Quy Nhơn - Bình Định): 06/2019

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] L. T. Hoa, *Chỉ số chính quy Castelnuovo - Mumford và ứng dụng*, Luận án Tiến sĩ Khoa học, Trung tâm Khoa học Tự nhiên và Công nghệ Quốc gia, 1995.

[2] L. T. Hoa, Đại số máy tính - Cơ sở Grobner, Nhà xuất bản Đại học Quóc gia Hà Nội, 2003.

Tiếng Anh

[3] A. Alilooee, S. Beyarslan, S. Selvaraja (2019), " Regularity of powers of Unicyclic graphs", *Rocky Mountain J. Math.*, **49**, pp. 699 – 728.

[4] A. Banerjee (2015), "The regularity of powers of edge ideals", *J. Algebraic Combin.*, **41**, pp. 303 – 321.

[5] C. Berge (1989), *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*, North-Holland, New York.

[6] D. Berlekamp (2012), "Regularity defect stabilization of powers of an ideal", *Math. Res. Lett.*, **19**(1), pp. 109 – 119.

[7] S. Beyarslan, H. T. Hà, T. N. Trung (2015), "Regularity of powers of forests and cycles", *J. Algebraic Combin.*, **42**(4), pp. 1077 – 1095.

[8] A. Bretto (2013), *Hypergraphs theory: An introduction*, Springer international publishing, Switzerland.

[9] M. Brodmann (1979), “Asymptotic stability of $Ass(M/I^nM)$”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **74** , pp. 16–18.

[10] M. Brodmann (1979), “The Asymptotic nature of the Analytic spread”, *Math. Proc. Cambridge Philos Soc.*, **86** , pp. 35–39.

[11] M. Brodmann (1979), R. Y. Sharp (1998), *Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press.

[12] W. Brun, J. Herzog (1993), *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, Cambridge.

[13] M. Chardin (2015), “Regularity stabilization for the powers of graded M-primary ideals”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **143**(8), pp. 3343–3349.

[14] A. Constantinescu, M. R. Pournaki, S. A. Seyed Fakhari, N. Terai, S. Yassemi (2015), “Cohen-Macaulayness and limit behavior of depth for powers of cover ideals”, *Communications in Algebra*, **43**, pp. 143–157.

[15] A. Constantinescu, M.Varbaro (2011), “Koszulness, Krull dimension, and other properties of graph-related algebras”, *J. Algebraic Combin.*, **34**, pp. 375–400.

[16] R. C. Cowsik, M. V. Nori (1976), “Fibers of blowing up”, *J. Indian Math. Soc.*, **40**, pp. 217–222.

[17] S. Cutkosky (2000), “Irrational asymptotic behaviour of Castelnuovo-Mumford regularity”, *J. Reine Angew. Math.*, **522** , pp. 93 – 103.

[18] S. Cutkosky, J. Herzog, N. V. Trung (1999), “Asymptotic behavior of the Castelnuovo-Mumford regularity”, *Compositio Math.*, **118** , pp. 243 – 261.

[19] D. Eisenbud (1995), *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry; Graduate Texts in Math.*, Springer- Verlag.

[20] D. Eisenbud, C.Huneke (1983), "Cohen-Macaulay Rees algebras and their specialization", *J. Algebra*, **81**, pp. 202-224.

[21] D. Eisenbud, B. Ulrich (2012), "Notes on regularity stabilization', *Proc. Amer. Math. Soc.* **140**(4), pp. 1221 – 1232.

[22] D. R. Fulkerson, A. J. Hoffman, R. Oppenhein, *On Balanced matries*, Math. Programming Stud., **1** (1974), 120–132.

[23] D. H. Giang, L. T. Hoa (2010), "On local cohomology of a tetrahedral curve", *Acta Math. Vietnam.*, **35**, pp. 229-241.

[24] I. Gitler, E.Reyes, R. H. Villarreal (2009), "Blowup algebras of square–free monomial ideals and some links to combinatorial optimization problems", *Rocky Mountain J. Math.*, **39**(1), pp. 71–102.

[25] H. T. Hà (2011), "Asymptotic linearity of regularity and a^*-invariant of powers of ideals", *Math. Res. Lett.*, **18**(1), pp. 1–9.

[26] H. T. Hà, H. D. Nguyen, N. V. Trung, T. N. Trung, "Depth funtions of powers of homogeneous ideals", *arXiv:1904.07587v1.*

[27] H. T. Hà, N. V.Trung, T. N. Trung (2016), "Depth and regularity of powers of sums of ideals", *Math. Z.*, **282**(3-4), pp. 819–838.

[28] N. T. Hang, "Stability of depth functions of cover ideals of balanced hypergraphs", to appear in Journal of Algebra and Its Applications (DOI: 10.1142/S0219498820500553).

[29] N. T. Hang, T. N. Trung (2017), "The behavior of depth functions of powers of cover ideals of unimodular hypergraphs", *Ark. Math.*, **55**(1), pp. 89-104.

[30] N. T. Hang, T. N. Trung (2018), "Regularity of powers of cover ideals of unimodular hypergraphs", *J. Algebra*, **513**, pp. 159-176.

[31] J. Herzog, T. Hibi (2005), “The depth of powers of an ideal”, *J. Algebra*, **291**, pp. 534–550.

[32] J. Herzog, T. Hibi (2010), *Monomial ideals*, GTM 260, Springer.

[33] J. Herzog, T. Hibi, N. V. Trung (2009), “Vertex cover algebras of unimodular hypergraphs”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137**, pp. 409–414.

[34] J. Herzog, T. Hibi, N. V. Trung, X. Zheng (2008), “Standard graded vertex cover algebras, cycles and leaves”, *Trans. Amer. Math. Soc*, **360**, pp. 6231 - 6249.

[35] J. Herzog, A. A. Qureshi (2015), “Persistence and stability properties of powers of ideals”, *J. Pure Appl. Math. Adv. Appl.*, **219**, pp. 530 - 542.

[36] J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu (2013), “The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal”, *J. Algebraic Combin.*, **37**(2), pp. 289- 312.

[37] J. Herzog, M. Vladoiu (2013), “Squarefree monomial ideals with constant depth function”, *J. Pure Appl. Algebra*, **217** (9), pp. 1764–1772.

[38] L. T. Hoa (2002), “Asymptotic behavior of reduction numbers”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**, pp. 3151-3158.

[39] L. T. Hoa, K. Kimura, N.Terai, T. N. Trung (2017), “Stability of depths of symbolic powers of Stanley-Reisner ideals”, *J. Algebra*, **437**, pp. 307-323.

[40] L. T. Hoa , E. Hyry (2003), “On local cohomology and Hilbert function of powers of ideals”, *Manuscripta Math.*, **112**, 77-92.

[41] L. T. Hoa, T. N. Trung (2010), “Partial Castelnuovo-Mumford regularities of sums and intersections of powers of monomial ideals”, *Math. Proc. Cambridge Philos Soc.*, **149**, pp. 1–18.

[42] Hoang Tuy (2016), *Convex Analysis and Global Optimization*, Springer International Publishing.

[43] M. Hochster (1977), "Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes", *in B. R. Mc- Donald and R. A. Morris (eds.), Ring theory II, Lect. Notes in Pure and Appl. Math.* **26**, M. Dekker, pp. 171–223.

[44] T. Kaiser, M. Stehlík, R. Škrekovski (2014), "Replication in critical graphs and the persistence of monomial ideals", *J. Combin. Theory Ser. A*, **123**, pp. 239–251.

[45] A. V. Jayanthan, N. Narayanan, S. Selvaraja (2018), "Regularity of Powers of Bipartite Graphs", *J. Algebraic Combin.*, **47**, pp. 17–38.

[46] V. Kodiyalam (2000), "Asymptotic behaviour of Castelnuovo-Mumford regularity", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**, pp. 407 – 411.

[47] H. Matsumura (1986), *Commutative ring theory*, Cambridge University Press.

[48] S. McAdam, P. Eakin (1979), "The asymptotic Ass", *J. Algebra*, **61**, pp. 71 – 81.

[49] E. Miller, B. Sturmfels (2005), *Combinatorial commutative Algebra*, Springer.

[50] N. C. Minh, N. V. Trung (2009), "Cohen-Macaulayness of powers of two-dimensional squarefree monomial ideals", *J. Algebra*, **322**, pp. 4219–4227.

[51] L. D. Nam, M. Varbaro (2016), "When does depth stabilize early on?" *J. Algebra*, **445**, pp. 181–192.

[52] I. Peeva (2011), *Graded Syzygies*, Springer-Verlag.

[53] A. Schrijver (1998), *Theory of linear and integer programming*, John Wiley & Sons.

[54] Y. Takayama (2005), “Combinatorial characterizations of generalized Cohen-Macaulay monomial ideals”, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*, **48**, pp. 327–344.

[55] N. V. Trung (2007), “Castelnuovo-Mumford regularity and related invariants”, *Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. 4, Ramanujan Math. Soc., Mysore*, pp. 157-180.

[56] N. V. Trung, H. Wang (2005), “On the asymptotic linearity of Castelnuovo-Mumford regularity”, *J. Pure Appl. Algebra*, **201**(1–3), pp. 42–48.

[57] T. N. Trung (2009), “Regularity index of Hilbert function of powers of ideals”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (9), pp. 2169 – 2174.

[58] T. N. Trung (2016), “Stability of depths of powers of edge ideals”, *J. Algebra*, **452**, pp. 157–187.

[59] R. Villarreal (2001), *Monomial Algebras*, Springer-Verlag.

Bảng thuật ngữ

Tiếng Việt	Tiếng Anh
chiều đầy đủ	full dimensional
chu trình	cycle
số ghép cặp có thứ tự	ordered matching number
đa diện lồi	polytope
đồ thị	graph
đồ thị hai phần	bipartite graph
đồ thị rừng	forest graph
đối giá	co-support
đồng điều đơn hình rút gọn	reduced homology
ghép cặp	matching
ghép cặp có thứ tự	ordered matching
giải tự do tối tiểu	minimal free resolution
iđêan cạnh	egde ideal
iđêan phủ	cover ideal
không mặt	nonface
không xoắn	torsion free
iđêan đơn thức không chứa bình phương	squarefree monomial ideal
ma trận liên thuộc	incidence matrix
mặt cực đại	facet
phủ đỉnh	vertex cover

phức bậc	degree complex
phức đơn hình	simplicial complex
phức nón	cone complex
phức rút gọn	reduced chain complex
siêu đồ thị	hypergraph
siêu đồ thị cân bằng	balanced hypergraph
siêu phẳng	hyperplane
siêu phẳng tựa	supporting hyperplane
tập độc lập	independence set
tập lồi đa diện	convex polyhedron