

Chương trình cao học liên kết
Viện Toán học và Đại học Sư phạm Hà nội
Ngành Toán học

ĐỀ THI MÔN THI GIẢI TÍCH
(Thời gian 180 phút)

Câu 1. Cho $f \in C^1[0, 1]$, $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq |f(x)|$ với mọi $x \in (0, 1)$. Chứng minh rằng $f(\cdot)$ là hằng số.

Câu 2. Xét tính hội tụ của dãy số sau:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx^2})}{x^2 + n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Câu 3. Tính tích phân

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Câu 4. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn, $A : X \rightarrow Y$, là toán tử cộng tính: $A(x + y) = A(x) + A(y)$, $x, y \in X$. Chứng minh rằng:

(i) Nếu A liên tục tại 0 thì A liên tục trên toàn X .

(ii) Nếu $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$, thì A liên tục trên toàn X .

Câu 5. Cho $f(\cdot)$ là phiếm hàm tuyến tính khác không trong không gian Banach X . Chứng minh rằng tồn tại không gian con một chiều E sao cho $X = \text{Ker } f \oplus E$.