

**ĐỀ THI TUYỂN CAO HỌC NĂM 2012**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**

**Môn thi: Đại số**

*Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề).*

*Người thi không sử dụng tài liệu.*

**Câu I.** Trong không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^n$  ta xét tập hợp  $H$  các vectơ đồng thời trực giao với hai vectơ  $\vec{v}_1 = (1, 2, \dots, n)$ ,  $\vec{v}_2 = (n, \dots, 2, 1)$ .

a) Hãy chứng tỏ rằng  $H$  là không gian vectơ con của  $\mathbb{R}^n$ .

b) Hãy chỉ ra một cơ sở và tính số chiều của không gian vectơ  $H$ .

**Câu II.** Cho ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  có ma trận đối với cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$  là

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

ở đó  $a$  là tham số thực.

a) Với  $a = -3$ , hãy tìm vectơ riêng và giá trị riêng tương ứng của  $f$ .

b) Tìm  $a$  sao cho  $f$  không phải là một đơn cấu, và trong trường hợp  $f$  không là một đơn cấu hãy tìm một cơ sở của  $\text{Im} f$ .

**Câu III.** Cho  $H, K$  là hai nhóm con hữu hạn có cấp nguyên tố cùng nhau của một nhóm nhân  $G$ .

a) Chứng minh rằng  $H \cap K = \{1\}$ , ở đó  $1$  là phần tử đơn vị của nhóm  $G$ .

b) Giả sử thêm rằng  $H, K$  là hai nhóm con chuẩn tắc của  $G$ . Chứng minh rằng một phần tử của  $H$  giao hoán với một phần tử của  $K$ .

**Câu IV.** Cho  $p$  là một số nguyên tố. Xét nhóm nhân  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Với  $n \in \mathbb{N}$ , gọi  $U_{p^n}$  là nhóm con sinh bởi  $\exp(\frac{2\pi i}{p^n})$ . Đặt

$$U_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{p^n}.$$

Chứng minh rằng

a)  $U_{p^\infty}$  là một nhóm con của  $\mathbb{C}^*$ .

b) Nếu  $G$  là một nhóm con của  $U_{p^\infty}$  thì  $G = U_{p^\infty}$  hoặc  $G = U_{p^n}$  với  $n$  nào đó.

c)  $U_{p^\infty}$  là một nhóm không phân tích được, nghĩa là  $U_{p^\infty}$  không đẳng cấu với một tích trực tiếp của hai nhóm không tầm thường.