

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 2011

Đề án phối hợp đào tạo thạc sĩ toán học quốc tế
(Thời gian 180 phút)

Câu 1. Tìm giá trị tích phân

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$$

Câu 2. Cho $f(\cdot)$ là một hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng

$$\exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = f(x_0).$$

Câu 3. Xét tính hội tụ các chuỗi sau:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2010}{2011} \right)^{n-1}; \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{e^{\sin^2 x} + n^4 x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Câu 4. Cho X là không gian metric, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm song ánh liên tục. Chứng minh rằng nếu tập $M \subset X$ không có điểm cô lập, thì $f(M)$ cũng không có điểm cô lập. Mệnh đề còn đúng không nếu f chỉ liên tục nhưng không song ánh.

Câu 5. Cho A là toán tử tuyến tính từ không gian tuyến tính định chuẩn X vào không gian tuyến tính định chuẩn Y . Chứng minh rằng:

(a) A là liên tục khi và chỉ khi $\exists k > 0 : \|Ax\| \leq k\|x\|, \forall x \in X$.

(b) Giả sử A là toàn ánh. A có toán tử ngược A^{-1} liên tục khi và chỉ khi

$$\exists k > 0 : \|Ax\| \geq k\|x\|, \quad \forall x \in X.$$