Đề thi môn Đại số 2011

Thời gian: 180 phút

1) Cho A là một ma trận hệ số thực vuông cấp n thỏa mãn $A^2 = I$. Chứng minh rằng $\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) = n$, trong đó I là ma trận đơn vị.

2) Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều và $f: V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương:
   a) f là một đơn ánh.
   b) f là một toàn ánh.
   c) f là một song ánh.

3) Cho X và Y là hai nhóm Abel cộng. Ký hiệu Hom(X,Y) là tập tất cả các đồng cấu nhóm từ X vào Y. Chứng minh rằng :
   a) Hom(X,Y) là một nhóm Abel với phép cộng ánh xạ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ với mọi $f, g \in \text{Hom}(X,Y)$ và mọi $x \in X$.
   b) Khi X là nhóm xyclic cấp vô hạn thì hai nhóm Hom(X,Y) và Y là đẳng cấu.

4) Chứng minh các tính chất sau đây đối với vành các số nguyên **Z**:
   a) **Z** là vành iđêan chính.
   b) Một iđêan I của **Z** gọi là iđêan nguyên tố, khi $I \neq \mathbf{Z}$ và với các số nguyên tùy ý a, b thỏa mãn $ab \in I$, ta luôn suy ra $a \in I$ hoặc $b \in I$. Chứng minh rằng I là iđêan nguyên tố khi và chỉ khi hoặc $I = 0$ hoặc tồn tại một số nguyên tố p sao cho $I = p\mathbf{Z}$.

5) Cho A là một nhóm Abel hữu hạn bất khả tổng, tức là không tồn tại hai nhóm con thực sự B, C của A sao cho $A = B + C$. Đặt $I = \{ n \in \mathbf{Z} \mid$ tồn tại một số nguyên dương k sao cho $n^k A = 0 \}$. Chứng minh rằng I là một iđêan nguyên tố của **Z**.