

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH

Đề án phối hợp đào tạo thạc sĩ toán học quốc tế năm học 2010-2011.

(Thời gian 180 phút)

Câu 1. Tìm

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Câu 2. Xét tính hội tụ các biểu thức:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^{2n}}. \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Câu 3. Cho A, B là các tập không giao nhau trong không gian metric (X, ρ) .

- Chứng minh rằng nếu A compact, B đóng thì $\rho(A, B) > 0$.
- Hãy chỉ ra a) không đúng nếu A, B chỉ là các tập đóng.

Câu 4. Cho $f(x) \in C_{[0,1]}^1, f(0) = f(1) = 0$.

- Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = f(x_0)$.
- $\int_0^1 |f(x)| dx \leq \frac{1}{4} \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.

Câu 5. Cho $A : X \rightarrow Y$ là toán tử tuyến tính từ không gian véc tơ tô pô X vào không gian véc tơ tô pô Y . A gọi là bị chặn nếu nó ánh xạ tập bị chặn vào tập bị chặn.

- Chứng minh rằng nếu A là liên tục thì bị chặn.
- Giả sử X có cơ sở lân cận đếm được. Chứng minh rằng nếu A là bị chặn thì liên tục.