Đề thi môn Đại số 2010

Thời gian: 180 phút

1) Cho m, n là hai số nguyên dương với $m < n$ và A là một ma trận thực cấp (m,n) (m dòng, n cột) có hạng là m. Chứng minh rằng:
   a) Có thể thêm n-m dòng vào ma trận A để được một ma trận vuông B cấp n có định thức $\det(B) \neq 0$.
   b) Tồn tại một ma trận C cấp (n,m) (n dòng, m cột) sao cho $AC = I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp m. C xác định duy nhất hay không, tại sao?

2) Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường K và V^* là không gian đối ngẫu của V, tức $V^* = \mathrm{Hom}(K,V)$. Với mỗi tập con S của V^*, xét tập hợp $\mathrm{Ann}(S) = \{v \in V \mid f(v) = 0, \forall f \in S\}$. Chứng minh rằng :
   a) Ann(S) là một không gian con của V.
   b) Giả sử W_1 và W_2 là hai không gian con của V^* thì $W_1 = W_2$ khi và chỉ khi $\mathrm{Ann}(W_1) = \mathrm{Ann}(W_2)$.

3) Cho n là một số nguyên dương, $X = \langle x \rangle$ là nhóm xyclic sinh bởi phần tử x có cấp n và $Y = \langle y \rangle$ là nhóm xyclic sinh bởi phần tử y có cấp 2n. Với mỗi số nguyên dương k ta xét một tương ứng $f_k: X \to Y$ xác định bởi $f_k(x^m) = y^{km}$, với mọi số nguyên m. Chứng minh rằng f_k là một đồng cấu nhóm khi và chỉ khi k là một số chẵn.

4) Chứng minh các tính chất sau đây đối với vành các số nguyên **Z**:
   a) **Z** là vành iđêan chính.
   b) Một iđêan I của **Z** gọi là iđêan nguyên tố, khi $I \neq \mathbf{Z}$ và với các số nguyên tùy ý a, b mà $ab \in I$ luôn suy ra hoặc $a \in I$ hoặc $b \in I$. Chứng minh rằng I là iđêan nguyên tố khi và chỉ khi hoặc $I = 0$ hoặc tồn tại một số nguyên tố p sao cho $I = p\mathbf{Z}$.

5) Cho A là một nhóm Abel thỏa mãn các tính chất : mọi tập con khác rỗng các nhóm con của A luôn có ít nhất một nhóm con nhỏ nhất theo quan hệ thứ tự bao hàm và không tồn tại hai nhóm con thực sự B, C nào của A sao cho $A = B + C$. Đặt $I = \{n \in \mathbf{Z} \mid \exists k > 0, n^k A = 0\}$. Chứng minh rằng I là một iđêan nguyên tố của **Z**