ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH

Ngày thi: 08/8/2009

Nơi thi: Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Câu 1 (1,5 điểm)

(a) Cho $f(x) = |x|^3,\ x \in \mathbb{R}$. Tính $f'(x),\ f''(x)$ với mọi x, và chứng tỏ rằng $f'''(0)$ không tồn tại.

(b) Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ khả vi sao cho $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$. Chứng tỏ rằng f có một điểm bất động duy nhất trên $\mathbb{R}$ (tức là tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình $f(x) = x$).

Câu 2 (2,5 điểm)

Giả sử rằng $\alpha \in \mathbb{R}$, f là hàm số thực khả vi cấp hai trên khoảng (α, ∞) và $M_0,\ M_1,\ M_2$ tương ứng là các cận trên bé nhất của $|f(x)|,\ |f'(x)|,\ |f''(x)|$ trên (α, ∞).

(a) Chứng minh rằng $M_1^2 \le 4M_0M_2$. (*Gợi ý:* Với mỗi $x \in (\alpha, \infty)$ và với mỗi $h > 0$, theo Định lý Taylor ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h) - f(x)] - hf''(\xi)$$

với $\xi \in (x, x+2h)$.)

(b) Lấy $\alpha = -1$ và

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{nếu } -1 < x < 0, \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} & \text{nếu } 0 \le x < \infty. \end{cases}$$

Bằng cách tính toán các hằng số M_0, M_1 và M_2, hãy chứng tỏ rằng trong trường hợp này ta có đẳng thức $M_1^2 = 4M_0M_2$.

Câu 3 (1,5 điểm)

Cho $F(x)$ là hàm số thực khả vi liên tục, xác định trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sao cho $F(a) < 0,\ F(b) > 0$ và

$$0 < K_1 \le F'(x) \le K_2 \quad (a \le x \le b).$$

Chứng tỏ rằng ta có thể sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp (phương pháp lặp trong chứng minh định lý ánh xạ co) của Banach để tìm nghiệm của phương trình $F(x) = 0$. (*Gợi ý:* Xét hàm bổ trợ $f(x) = x - \lambda F(x)$, và chọn λ sao cho ta có thể quy việc tìm nghiệm của phương trình đã cho về việc tìm nghiệm của phương trình $f(x) = x$, với f là ánh xạ co.)

Câu 4 (2 điểm)

Giả sử A, B là các tập con của không gian mêtric (X, d). Chứng tỏ rằng

(a) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$;

(b) $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B \subset \mathrm{int}(A \cup B)$;

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

(e) Nếu B là tập mở thì $\overline{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}$.

Xây dựng các ví dụ thích hợp để chứng tỏ rằng các bao hàm thức trong (b), (d) và (e) nói chung không có dấu bằng.

Câu 5 (2,5 điểm)

(a) Giả sử $x(t)$ là hàm số thực liên tục, xác định trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, có tính chất $\int_a^b t^n x(t)dt = 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$. Chứng minh rằng $x(t) = 0$ với mọi $t \in [a, b]$.

(b) Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng nếu tồn tại $\mu \in \mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \mu$, thì f là bị chặn và liên tục đều trên $\mathbb{R}^n$.

(c) Cho α, β, γ là các số dương và $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ký hiệu bởi K tập hợp các hàm số liên tục $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sao cho $|f(a)| \leq \gamma$ và

$$|f(x) - f(y)| \leq \beta |x - y|^\alpha$$

với mọi $x, y \in [a, b]$. Chứng minh rằng K là tập compắc trong $C[a, b]$.