ĐỀ THI TUYỂN CAO HỌC QUỐC TẾ
Viện Toán học, năm học 2009-2010
(Thời gian: 180 phút)

1. Cho hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, trong đó $A \in M(n, \mathbb{Z})$ và $b \in \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$.

   a) Chứng tỏ rằng nếu $|A| = \pm 1$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm nguyên duy nhất. Hãy chứng tỏ đó không phải là điều kiện cần.

   b) Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên x_0. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để x_0 là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình là $|A| \neq 0$.

2. Cho $U \subseteq \mathbb{R}^4$ là không gian con sinh bởi

   $$(1, 0, -1, 1),\ (1, 2, 3, 4),\ (4, 3, 2, 1),$$

   và $V \subseteq \mathbb{R}^4$ là không gian con sinh bởi

   $$(1, 2, 2, 1),\ (3, 1, 3, 1),\ (4, 3, 5, 2).$$

   Tìm $\dim(U \cap V)$.

3. Cho $A \in M(n, \mathbb{R})$. Ta định nghĩa

   $$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots,$$

   trong đó E là ma trận đơn vị. Chứng minh rằng:

   a) Với mọi A, ma trận e^A hoàn toàn xác định.

   b) Nếu A có giá trị riêng thực thì e^A cũng có giá trị riêng thực. Tìm ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

   c) Với mọi A ta đều có $|e^A| > 0$.

4. Chứng tỏ rằng nhóm $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ có thể viết thành tổng trực tiếp của hai nhóm con thực sự, nhưng không viết thành tổng trực tiếp của ba nhóm con thực sự.

5. Ta nói một vành (kết hợp và có đơn vị) g có ước của 0 nếu tồn tại $a, b \neq 0$ để $ab = 0$. Trong trường hợp ngược lại, ta nói nó không có ước của 0. Hãy cho ví dụ một vành giao hoán vô hạn có ước của 0 và một vành không giao hoán không có ước của không.

6. Chứng minh rằng tập hợp $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} |\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ lập thành một trường. Hãy tìm phần tử khả nghịch của $1 + 3\sqrt[3]{4}$.