

Đề thi tuyển học viên năm học 2008-2009
 cho Đề án “Phối hợp đào tạo thạc sĩ toán học trình độ quốc tế”
của Viện Toán học
 Môn thi : Đại số
 (Thời gian làm bài :180 phút)

Bài 1

Cho $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ xác định như sau: $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Kí hiệu V là tập nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + x_2 + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_3 + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n-3,1}x_1 + a_{n-3,2}x_2 + \dots + a_{n-3,n-3}x_{n-3} + x_{n-2} + a_{n-3,n}x_n &= 0, \\ a_{n-2,1}x_1 + a_{n-2,2}x_2 + \dots + a_{n-2,n-2}x_{n-2} + x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n &= 0, \end{aligned}$$

trong đó a_{ij} là các số thực. Đặt $W = \varphi^{n-2}(V)$ (ảnh của φ^{n-2}).

Cho E là tập nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + \dots + u_{1n}x_n &= 0, \\ u_{21}x_1 + \dots + u_{2n}x_n &= 0, \end{aligned}$$

Trong đó $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{1n})$ và $u_2 = (u_{21}, \dots, u_{2n})$ là 2 véc tơ độc lập tuyến tính.

Tìm điều kiện cần và đủ để: $W + E = \mathbb{R}^n$.

Bài 2 Cho A và B là 2 ma trận vuông cấp n bất kì trên trường số thực. Chứng minh rằng AB và BA có cùng đa thức đặc trưng.

Bài 3 Cho A là một ma trận trên trường các số thực thỏa mãn điều kiện: tổng của các giá trị tuyệt đối của các phần tử của mỗi cột của ma trận A đều không vượt quá 1.

Chứng minh rằng mọi giá trị riêng λ của A đều thỏa mãn điều kiện: $|\lambda| \leq 1$.

Bài 4 Cho R là nhóm các số thực (với phép cộng) và Z là nhóm con các số nguyên của R . Cho S^1 là nhóm các số phức có mô đun bằng 1 (với phép nhân).

Chứng minh rằng nhóm thương R/Z đẳng cấu với nhóm S^1 .

Bài 5

Cho X là một tập con trong vành giao hoán A có đơn vị. Gọi $I(X)$ là giao của tất cả các ideal chứa tập X .

1) Giả sử rằng X là một tập hữu hạn: $X = \{ x_1, \dots, x_k \}$. Chứng minh rằng $I(X)$ là tập hợp gồm tất cả các phần tử a thuộc A , sao cho tồn tại r_1, \dots, r_k thuộc A để $a = r_1x_1 + \dots + r_kx_k$.

2) Kết quả sẽ thế nào nếu X là một tập có vô hạn phần tử?

3) Hãy tính vành thương $A/I(X)$ cho trường hợp A là vành các đa thức 2 biến trên trường số thực và X là tập hợp gồm 2 đa thức x và y^2 .