

Đề thi tuyển sinh cao học trình độ quốc tế
năm 2007 Viện Toán học
Môn thi: Giải tích toán học
Đề số 1. Thời gian làm bài: 180 phút

1. Chứng minh rằng dãy số

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

là phân kỳ.

2. Chứng minh rằng nếu dãy số thực x_n ($n = 1, 2, \dots$) hội tụ thì dãy các trung bình cũng hội tụ tới cùng giới hạn. Khẳng định ngược lại có đúng không?
3. Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0).$$

4. Chứng minh rằng nếu như chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ hội tụ đều trên khoảng $[a, b]$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ cũng hội tụ đều trên khoảng $[a, b]$.
5. Hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ trong không gian tuyến tính L gọi là *tương đương* nếu tồn tại $a, b > 0$ sao cho $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$ với mọi $x \in L$. Chứng minh rằng nếu L là hữu hạn chiều thì bất kỳ hai chuẩn nào trên nó đều tương đương.
-
6. Chỉ ra ví dụ một dãy các hình cầu đồng lòng nhau trong không gian metric đầy đủ mà có giao là rỗng.