ĐỀ THI TUYỂN VÀO CAO HỌC

Theo đề án "Phối hợp đào tạo thạc sĩ toán học trình độ quốc tế"
Của Viện Toán học năm 2007
Môn thi: Đại số
Thời gian: 180 phút

Bài 1. Cho **R** là trường số thực và $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,0)$, $v_3 = (1,1,0)$ là ba vectơ trong không gian vectơ $\mathbf{R}^3$. Xét ánh xạ tuyến tính T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi $T((x,y,z))=(x+z,y+z,x)$.

a) Chứng minh rằng $\{v_1, v_2, v_3\}$ lập thành một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) Xác định ma trận liên kết A của ánh xạ T theo hệ cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ của $\mathbf{R}^3$ và tính định thức của ma trận A.

Bài 2. Cho A, B là hai ma trận thực vuông cấp n và $C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng định thức của ma trận C là một số không âm.

Bài 3. Cho V là một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường số thực **R** và $f : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương :

a) f là một đơn ánh.

b) f là một toàn ánh.

c) f là một đẳng cấu

Bài 4. Cho n và m là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng mọi đồng cấu nhóm $f : \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_m$ đều là đồng cấu không (tức $f(\mathbf{Z}_n) = 0$), trong đó $\mathbf{Z}_n$ và $\mathbf{Z}_m$ là hai nhóm cộng các số nguyên môđunlô n và m, khi và chỉ khi $(n, m) = 1$.

Bài 5. Với mỗi số nguyên tố p ta xét tập hợp các số thực xác định bởi

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid a,b \text{ thuộc tập các số hữu tỷ } \mathbf{Q}\}.$$

Chứng minh rằng:

a) $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ với các phép cộng và nhân hai số thực thông thường là một trường.

b) Trường $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ có đẳng cấu với trường $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$ không, tại sao?