LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại Viện Toán học Việt Nam. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với thầy PGS. TSKH Hà Huy Vui, thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tôi trong suốt thời gian học tập nghiên cứu vừa qua.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm, Viện Toán học Việt Nam cùng các quý thầy giáo, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy lớp Cao học Toán K20, các bạn học viên đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tôi trong suốt quá trình học cao học và viết Luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và bạn đọc để Luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, tháng 11 năm 2014

Tác giả

Đinh Thị Trang

Mục lục

MỞ ĐẦU

Khai triển Newton - Puiseux là một trong những kết quả cơ bản của toán học. Nói một cách vắn tắt đây là một kết quả về sự tồn tại một hàm ẩn, khi giả thiết cơ bản của Định lý Hàm ẩn quen thuộc không thỏa mãn: khi mọi đạo hàm riêng bậc nhất tại điểm đang xét đều bằng không, tức là điểm đang xét là điểm kỳ dị của hàm.

Cụ thể hơn, cho $f(x, y)$ là một hàm hai biến phức, giải tích trong một lân cận của điểm $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Giả sử $f(0,0) = 0$ và $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Câu hỏi đặt ra là tồn tại hay không một "hàm ẩn" $y(x)$ sao cho $f(x, y(x)) \equiv 0$ với mọi x thuộc một lân cận nào đó của $0 \in \mathbb{C}$. Hơn nữa, có thể nói gì về các tính chất của hàm $y(x)$, và quan trọng hơn, có thuật toán nào để tính hàm $y(x)$ như thế? Các ví dụ đơn giản chỉ ra rằng, hàm $y = y(x)$ như vậy, là không duy nhất, và cũng không phải là một hàm giải tích theo x. Mặc dù vậy, phương pháp Newton - Puiseux cho ta một cách tính hàm $y(x)$ dựa vào lược đồ Newton của hàm $f(x, y)$. Phương pháp này xác định biểu thức của hàm $y(x)$ rất tường minh . Từ đó, có thể hiểu được các tính chất "giải tích" của hàm $y(x)$, cũng như mối quan hệ giữa các hàm $y(x)$.

Nhờ vào tính chất tường minh của phương pháp Newton - Puiseux, khai triển Newton - Puiseux (biểu diễn y qua x) tìm được có nhiều ứng dụng quan trọng trong Giải tích và Hình học.

Trong luận văn này, chúng tôi trước tiên trình bày lại phương pháp Newton - Puiseux, cho phép từ phương trình $f(x, y) = 0$ tính khai triển của y theo x trong trường hợp $f(x, y)$ là hàm giải tích hai biến phức. Tiếp theo, chúng tôi trình bày 2 áp dụng của phương pháp trên:

- Chứng minh kết quả cơ bản của Rellich: nếu đa thức hyperbolic một biến $P_t(x) = x^n + a_1(t)x^{n-1} + \cdots + a_n(t)$ có các hệ số phụ thuộc vào tham số t một cách giải tích, thì nghiệm của đa thức là một hàm giải tích theo t. Đây là một kết quả quan trọng, có nhiều ứng dụng trong Lý thuyết Nhiễu toán tử.

- Chứng minh rằng ánh xạ hoành độ trên một họ đa thức một biến, phụ thuộc giải tích vào một tham số là một ánh xạ proximal chính qui.

Bản luận văn gồm 2 chương:

- Chương 1: Khai triển Newton - Puiseux cho hàm giải tích hai biến phức.

- Chương 2: Hai áp dụng của khai triển Newton - Puiseux trong việc nghiên cứu nghiệm của một họ đa thức phụ thuộc tham số.

Luận văn được viết dựa trên các tài liệu sau đây:

1. Nội dung chương 1 được trình bày theo cuốn sách của E. Brieskorn " Plane algebraic curves".

2. Chứng minh của Định lý Rellich được lấy từ K. Kurdyka, L. Paunescu, Hyperbolic polynomials and multiparameter real - analytic pertubation theory, Duke Math. J. Vol, (4), N.1 (2008), 123- 149.

3. Kết quả về tính proximal chính qui của ánh xạ hoành độ của một họ đa thức một biến lấy từ luận án tiến sĩ "Spectral Abscissa Optimization using Polynomaial Stablity Conditions" của Jonathan A. Cross, University of Washington 2010.

Cuối cùng, mặc dù đã cố gắng nhưng do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp của thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Khai triển Newton - Puiseux

Trong chương này, chúng tôi trình bày phương pháp Newton- Puiseux, cho phép tìm khai triển của "hàm ẩn" $y(x)$, xác định từ phương trình $f(x,y) = 0$, trong đó $f(x,y)$ là một hàm giải tích phức trong lân cận của $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Phương pháp tính các hệ số và số mũ trong khai triển Newton - Puiseux $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/m}$ sẽ được trình bày một cách chi tiết, với ví dụ minh họa cụ thể, trong khi một kết quả quan trọng, nói rằng nếu $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/m}$ là khai triển Newton - Puiseux của $f(x,y) = 0$ thì chuỗi $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ (với $t^m = x$) là hội tụ tại lân cận đủ nhỏ của $0 \in \mathbb{C}$, chỉ được chúng tôi phát biểu mà không chứng minh.

Cho hàm $f(x,y)$ hai biến phức, giải tích trong lân cận đủ nhỏ của $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Giả sử rằng $f(0,0) = 0$.

Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$ thì theo định lý hàm ẩn, tồn tại hàm $y(x)$, giải tích trong lân cận đủ nhỏ của $0 \in \mathbb{C}$ sao cho

$$y(0) = 0 \text{ và } f(x, y(x)) \equiv 0.$$

Như vậy, $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x^i$, và chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x^i$ hội tụ, với x đủ nhỏ. Hơn nữa, hàm $y(x)$ xác định như trên là duy nhất.

Tương tự, nếu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$, ta có thể "giải" x theo y và nhận được một hàm giải tích $x = x(y)$ theo biến y. Câu hỏi đặt ra là, nếu

$$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ và } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

tức là nếu $(0,0)$ là một điểm kỳ dị của $f(x,y)$, thì ta có thể nói gì về sự phụ thuộc của $y(x)$ theo x?

Kết quả cổ điển của Newton và Puiseux nói rằng: khi đó, ta có thể tính được khai triển y theo x, có dạng

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/m}, a_i \in \mathbb{C}, \text{ m là một số nguyên dương .}$$

Phương pháp Newton - Puiseux cho ta cách tìm số mũ i/m và các hệ số a_i trong khai triển nói trên. Điểm mấu chốt trong phương pháp là sử dụng lược đồ Newton.

Hàm giải tích hai biến phức $f(x,y)$ có khai triển thành chuỗi lũy thừa tại lân cận điểm $(0,0)$:

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j.$$

Kí hiệu m là số nhỏ nhất, sao cho tồn tại $(i,j) : i + j = m$, và $a_{\mathrm{ij}} \neq 0$. Giả sử f có bậc là m tại $(0,0)$. Hơn nữa $f(0,y) = y^m +$ các đơn thức có bậc $>$ m..

Đặt $\Delta(f) = \left\{ (i,j) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \, | a_{ij} \neq 0 \right\}$, và $G = conv \left(\bigcup_{p \in \Delta(f)} \left(p + \mathbb{R}_+^2\right) \right)$, bao lồi của tập $\left(\bigcup_{p \in \Delta(f)} \left(p + \mathbb{R}_+^2\right) \right)$.

Biên ∂G của G là một đường gấp khúc gồm hữu hạn đoạn và hai nửa đường thẳng. Phần biên gồm tất cả các đoạn thẳng được gọi là *lược đồ Newton của f*, ký hiệu là $\Gamma(f)$.

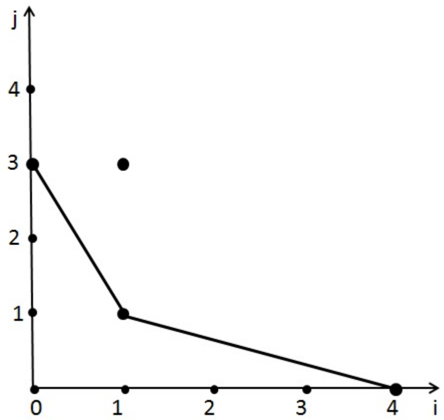
Ví dụ 1.0.1. *Cho hàm*

$$f(x,y) = 2xy + y^3 - x^4 + 5xy^3.$$

Ta có

$$\Delta(f) = \{(1,1),(0,3),(4,0),(1,3)\}.$$

$\Gamma(f)$ *là đường gấp khúc nối các điểm* $(0,3),(1,1),$ *và* $(4,0)$ *(xem hình 1.1).*



Hình 1.1: Lược đồ Newton

Ta sẽ sử dụng $\Gamma(f)$ để tính các số mũ và hệ số xuất hiện trong khai triển của nghiệm $y(x)$ theo x.

1.1 Phương pháp Newton - Puiseux

1.1.1 Bước 1:Tìm số hạng đầu tiên trong khai triển của $y(x)$

Giả sử $y(x) = c_0 x^{\gamma_0} +$ các từ với số mũ bậc $> \gamma_0$.

Để $y = c_0 x^{\gamma_0}$ là một nghiệm xấp xỉ của $f(x,y) = 0$, ta sẽ thay $y = c_0 x^{\gamma_0}$ vào $f(x,y)$ và tìm c_0, γ_0 sao cho biểu thức $f(x, c_0 x^{\gamma_0})$ có số hạng đầu tiên (phụ thuộc vào c_0, γ_0) bằng 0.

Ta thấy

$$f(x, c_0 x^{\gamma_0}) = \sum_{(i,j)\in\Delta(f)} a_{\mathrm{ij}} c_0^j x^{i+j\gamma_0}.$$

Trong biểu thức ở vế phải, ký hiệu số mũ của từ đầu tiên là θ, có giá trị xác định bởi

$$\theta = \min_{(i,j)\in\Delta(f)} \{i + j\gamma_0\}.$$

Mệnh đề 1.1.1. *Để nghiệm $y(x)$ của $f(x,y)$ có khai triển bắt đầu với từ có số mũ γ_0, thì giá trị θ xác định ở trên phải đạt được trên một cạnh nào đó của lược đồ Newton $\Gamma(f)$ của hàm f.*

Chứng minh. Ta có $G = conv\left(\bigcup_{p\in\Delta(f)} \left(p + \mathbb{R}_+^2\right)\right)$, bao lồi của tập $\left(\bigcup_{p\in\Delta(f)} \left(p + \mathbb{R}_+^2\right)\right)$
Xét hàm

$$\ell : G \to \mathbb{R}$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta\gamma_0$$

Vì l là một hàm tuyến tính và G là tập lồi nên l đạt *min* trên biên của G:

$$\min_G \{\alpha + \beta\gamma_0\} = \min_{(i,j)\in\Delta(f)} \{i + j\gamma_0\}.$$

Vì mọi đỉnh của $\Gamma(f)$, theo cách dựng, đều thuộc $\Delta(f)$ nên

$$\theta = \min_{(i,j)\in\Gamma(f)} \{i + j\gamma_0\} = \min_{(i,j)\in\Delta(f)} \{i + j\gamma_0\}.$$

Như vậy, θ đạt được hoặc tại một đỉnh (α_0, β_0), hoặc trên một cạnh của $\Gamma(f)$. Để $y = c_0x^{\gamma_0}$ là nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x,y) = 0$ thì giá trị θ không thể đạt được tại một đỉnh, vì nếu không, ta có

$$f(x, c_0x^{\gamma_0}) = a_{\alpha_0,\beta_0}c_0^{\beta_0}x^\theta + \text{ các từ bậc } > \theta.$$

Và ta không có khả năng chọn c_0 để $a_{\alpha_0,\beta_0}c_0^{\beta_0} = 0$.

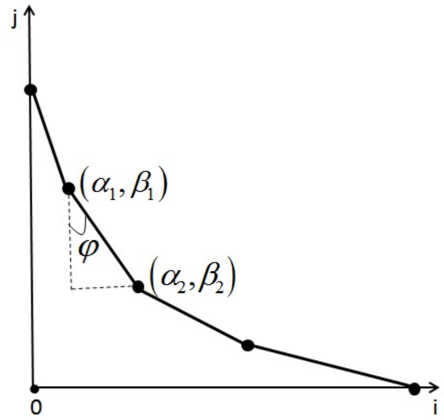
Bởi vậy, nếu $y = c_0x^{\gamma_0}$ là một nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x,y) = 0$, thì giá trị θ phải đạt được trên một cạnh của $\Gamma(f)$. Khẳng định được chứng minh. □

Tiếp theo, ta sẽ sử dụng khẳng định trên để xác định giá trị số mũ γ_0 và hệ số c_0 trong khai triển của $y(x)$.

1. Cách xác định số mũ γ_0

Giả sử giá trị $\theta = \min\limits_{(i,j)\in\Delta(f)} \{i + j\gamma_0\}$ đạt trên cạnh nối hai đỉnh bất kỳ (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\beta_2 > \beta_1$ của $\Gamma(f)$. Ta có:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \beta_1\gamma_0 = \alpha_2 + \beta_2\gamma_0 \\ &\Rightarrow \gamma_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\beta_2 - \beta_1)} = tan\varphi \end{aligned}$$



Hình 1.2: Góc φ

2. Cách chọn hệ số c_0 tương ứng với số mũ γ_0

   Với số mũ γ_0 xác định ở trên, ta có khai triển của $f(x, c_0x^{\gamma_0})$ có dạng

$$f(x, c_0x^{\gamma_0}) = \sum_{\Delta_{1,2}} a_{\mathrm{ij}}c_0^jx^\theta + \text{ các từ với số mũ bậc } > \theta$$

   trong đó $\Delta_{1,2}$ là cạnh nối hai đỉnh (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\beta_2 > \beta_1$. Với cạnh $\Delta_{1,2}$ ta đặt

$$f_{\Delta_{1,2}}(x, y) = \sum_{(i,j)\in\Delta_{1,2}} a_{\mathrm{ij}}x^iy^j.$$

   Xét đa thức một biến: $\varphi_{\Delta_{1,2}} = f_{\Delta_{1,2}}(1, y)$. Vì $\Delta_{1,2}$ là một cạnh nối (α_1, β_1), (α_2, β_2) nên $\varphi_{\Delta_{1,2}}$ là đa thức bậc ≥ 1 theo y.

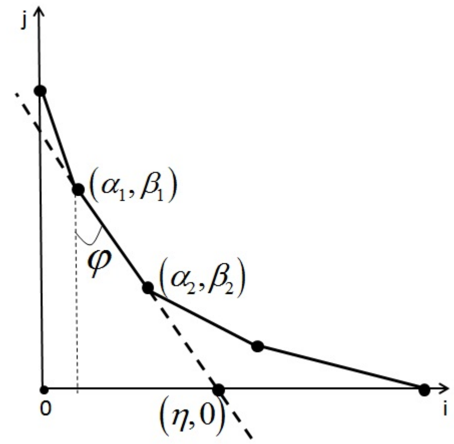
   Từ đó, để $y = c_0x^{\gamma_0}$ là một nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x, y) = 0$ thì c_0 phải là nghiệm của phương trình $\varphi_{\Delta_{1,2}}(y) = 0$.

Nhận xét 1.1.1. *Lược đồ $\Gamma(f)$ có bao nhiêu cạnh thì sẽ có bấy nhiêu khả năng chọn giá trị γ_0.*

Nhận xét 1.1.2. *Phương trình* $\varphi_{\Delta_{1,2}}(y)$ *có bậc* $(\beta_2 - \beta_1)$. *Suy ra có* $(\beta_2 - \beta_1)$ *cách chọn hệ số* c_0 *tương ứng.*

1.1.2 Bước 2: Tìm số hạng thứ 2 trong khai triển: $c_1 x^{\gamma_0+\gamma_1}$

Ta đặt $\gamma_i = \dfrac{p_i}{q_i}, = 1, 2, \cdots$ với p_i và q_i là các số nguyên. Với mỗi cạnh của lược đồ Newton của f ta xác định giao với trục nằm ngang. Gọi giao của cạnh $\Delta_{1,2}$ với trục nằm ngang là $(\eta, 0)$ (xem hình 1.3).



Hình 1.3: Giao với trục nằm ngang

Theo lập luận trên $tan\varphi = \gamma_0$, mặt khác từ hình vẽ 1.3 ta có $tan\varphi = -\dfrac{1}{k}$, ở đây k là hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm (α_1, β_1) và $(\eta, 0)$. Từ đó, ta có $\alpha_1 + \gamma_0\beta_1 = \eta$. Vậy ta có thể phân tích khai triển của $f(x, y)$ dưới dạng $f(x, y) = \sum\limits_{i+j\gamma_0=\eta} a_{\mathrm{ij}} x^i y^j + \sum\limits_{i+j\gamma_0>\eta} a_{\mathrm{ij}} x^i y^j$. Thay $x_1 = x^{1/q_0}$, $y = x^{\gamma_0}(c_0 + y_1) = x_1^{p_0}(c_0 + y_1)$ vào phương trình $f(x, y) = 0$, với $y_1 = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1+\gamma_2} + c_3 x^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} + \cdots$. Khi đó, ta có

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(c_0 + y_1)\right) &= x_1^{\eta q_0}\left(\sum_{i+j\gamma_0=\eta} a_{\mathrm{ij}}(c_0 + y_1)^j + x_1(\cdots)\right) \\
&= x_1^{\eta q_0} f_1(x_1, y_1).
\end{aligned}
$$

trong đó hàm $f_1(x_1, y_1)$ có tính chất giống như hàm f và $\deg f_1 \le \deg f$.

Ta lặp lại các bước như trên, tìm được số hạng thứ hai:

- Lập lược đồ Newton của hàm f_1
- Tính số mũ γ_1
- Tính hệ số c_1

1.1.3 Kết quả thu được

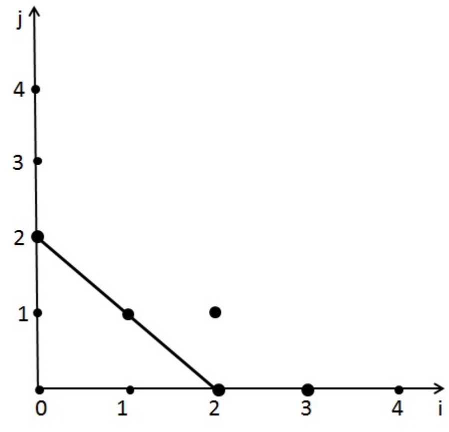
Tiếp tục quá trình trên, ta thu được dãy vô hạn

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{\gamma_0}\left(c_0 + x_1^{\gamma_1}(c_1 + x_2^{\gamma_2}(c_2 + \cdots))\right) \\ &= c_0 x^{\gamma_0} + c_1 x^{\gamma_0} x_1^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_0} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} + \cdots \\ &= c_0 x^{\gamma_0} + c_1 x^{\gamma_0+\gamma_1/q_0} + c_2 x^{\gamma_0+\gamma_1/q_0+\gamma_2/q_0 q_1} + \cdots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ví dụ 1.1.1. *Tìm khai triển Newton - Puiseux của hàm*

$$f(x,y) = y^2 - 2xy + x^2 - 3x^2 y - x^3.$$

1. *Tìm số hạng thứ nhất.*
   Đặt $\Delta(f) = \{(0,2), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0)\}$.
   Ta có lược đồ Newton của f (xem hình 1.4).



Hình 1.4: Lược đồ Newton của f

Xét cạnh Δ_1 *đi qua các điểm:* $\{(0,2), (1,1), (2,0)\}$. *Tính* γ_0, *theo lý luận trên ta có*

$$0 + 2\gamma_0 = 1 + \gamma_0$$
$$\Rightarrow \gamma_0 = 1$$

Tính hệ số c_0 tương ứng

$$\begin{aligned} & f_{\Delta_1}(1,y) = 0 \\ & \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Vậy ta có $c_0 = 1$. Số hạng đầu tiên là: x

2. *Tìm số hạng thứ hai.*

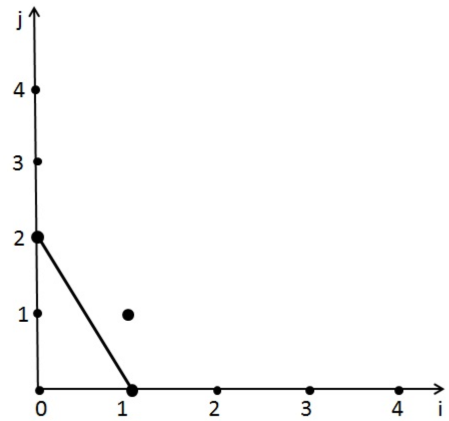
   Từ lược đồ Newton ta có giao điểm của cạnh Δ_1 với trục nằm ngang là: $(2,0)$. Thay $x = x_1$ và $y = x(1 + y_1)$ vào phương trình ban đầu ta được

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x_1^2 \left(y_1^2 - 4x_1 - 3x_1y_1\right) \\ &= x_1^2 f_1(x_1,y_1) \end{aligned}$$

   Xét hàm

$$f_1(x_1,y_1) = y_1^2 - 4x_1 - 3x_1y_1.$$

   - *Ta có lược đồ Newton của f_1 như trong hình 1.5*



Hình 1.5: Lược đồ Newton của f_1

   - *Tính số mũ γ_1.*

     Xét cạnh Δ_2 đi qua các điểm: $(0,2)$, $(1,0)$, ta có

$$\begin{aligned} & 0 + 2\gamma_1 = 1 + 0 \\ & \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- *Tính hệ số c_1 tương ứng*

  Xét phương trình

$$\begin{aligned} & f_{1,\Delta_2}(1, y_1) = y_1^2 - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow y_1 = \pm 2 \end{aligned}$$

  Suy ra, $c_1 = 2$ hoặc $c_1 = -2$.

Trước hết ta xét trường hợp: $c_1 = 2$. Khi đó, số hạng thứ hai là:

$$c_1 x^{\gamma_0 + \gamma_1} = 2x^{3/2}.$$

Từ lược đồ Newton của f_1 giao điểm của cạnh Δ_2 với trục nằm ngang là: $(1, 0)$. Thay lần lượt

$$\begin{cases} x_2 = x_1^{1/2} \\ y_1 = x_2 (2 + y_2) \end{cases}$$

vào khai triển của f_1 ta có

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) &= x_2^2 \left(y_2^2 + 4y_2 - 6x_2 - 3x_2 y_2 \right) \\ &= x_2^2 f_2(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Tương tự, xét hàm $f_2(x_2, y_2)$ ta tính được số mũ $\gamma_2 = 1$ và hệ số $c_2 = 2$ hoặc $c_2 = -3$.

3. *Tiếp tục quá trình trên, trong trường hợp $c_1 = 2a$ thu được 2 khai triển của y theo x như sau:*

$$\begin{aligned} y(x) &= x(1 + y_1) \\ &= x + x\left[x^{1/2}(2 + y_2)\right] \\ &= x + 2x^{3/2} + x^{3/2}\left[x(2 + y_3)\right] + \cdots \\ &= x + 2x^{3/2} + 2x^{5/2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.2}$$

Và

$$
\begin{aligned}
y(x) &= x(1+y_1) \\
&= x + x\left[x^{1/2}(2+y_2)\right] \\
&= x + 2x^{3/2} + x^{3/2}\left[x(-3+y_3)\right] + \cdots \\
&= x + 2x^{3/2} - 3x^{5/2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Tương tự, với trường hợp $c_1 = -2$, ta thu được các khai triển sau:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= x(1+y_1) \\
&= x + x\left[x^{1/2}(-2+y_2)\right] \\
&= x - 2x^{3/2} + x^{3/2}\left[x(1+y_3)\right] + \cdots \\
&= x - 2x^{3/2} + x^{5/2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

và

$$
\begin{aligned}
y(x) &= x(1+y_1) \\
&= x + x\left[x^{1/2}(-2+y_2)\right] \\
&= x - 2x^{3/2} + x^{3/2}\left[x(6+y_3)\right] + \cdots \\
&= x - 2x^{3/2} + 6x^{5/2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Vậy, với hàm f đã cho ta xác định được 4 khai triển Newton - Puiseux xác định bởi các công thức (1.2), (1.3), (1.4) và (1.5) như trên.

1.2 Kết luận

Chuỗi trong công thức (1.1) là chuỗi lũy thừa hữu tỷ tăng dần với biến x. Mẫu chung của các lũy thừa trong chuỗi là một giá trị hữu hạn. Kết quả này được phát biểu trong khẳng định sau:

Mệnh đề 1.2.1. *Tồn tại chỉ số i_0 sao cho γ_i là số nguyên, với mọi $i \geq i_0$. Khi đó $q_i = 1, x_{i+1} = x_i$ với mọi $i \geq i_0$. Như vậy $q_0 q_1 \cdots q_{i_0} = n$ là mẫu chung của tất cả các lũy thừa trong chuỗi nghiệm xấp xỉ $y = y(x)$. Nói cách khác, y được biểu diễn thành chuỗi lũy thừa theo $x^{1/n}$.*

Chứng minh. Thật vậy, (không mất tính tổng quát, ta chứng minh với trường hợp $i = 0$)

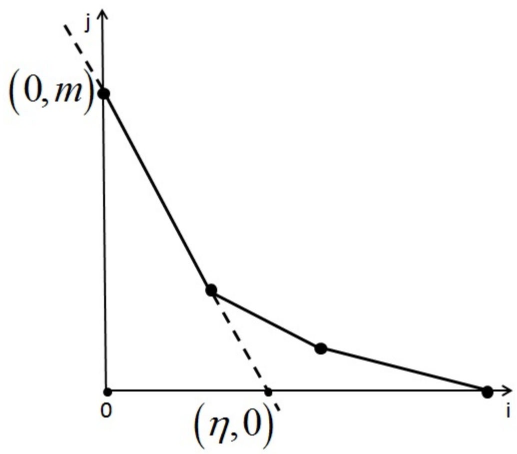
Trong quá trình trên ta thu được dãy đa thức f_i, mỗi đa thức có bậc m_i theo biến y_i. Trong đó dãy số tự nhiên m_i giảm dần

$$m = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng tại bước thứ i, γ_i không nguyên nếu $m_i > m_{i+1}$. Điều đó, tương đương với việc chứng minh: nếu $m_i = m_{i+1}$ thì γ_i là một số nguyên.

Dãy giảm các số tự nhiên không thể là vô hạn, nên các lũy thừa γ_i chỉ đạt giá trị hữu tỷ tại hữu hạn vị trí, và do đó từ chỉ số i_0 nào đó trở đi, thì tất cả các γ_i là số nguyên. Sau đây, ta chỉ ra nếu $m_i = m_{i+1}$, thì γ_i nguyên.

Giả sử xét tại $i = 0$. Ở đây, ta xét trường hợp số mũ γ_0 được tìm tương ứng với cạnh đầu tiên của lược đồ Newton (xem hình 1.6).



Hình 1.6: Lược đồ Newton

Thay lần lượt

$$x = x_1^{q_0}$$

$$y = x_1^{p_0} (c_0 + y_1)$$

vào phương trình $f(x, y) = 0$, theo lập luận trong bước 2 ta có

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}\left(c_0+y_1\right)\right) &= x_1^{\eta q_0}\left(\sum_{i+j\gamma_0=\eta} a_{\mathrm{ij}}(c_0+y_1)^j + x_1\left(\cdots\right)\right)\\
&= x_1^{\eta q_0} f_1\left(x_1, y_1\right).
\end{aligned}
$$

Xét phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $(m, 0)$ và $(\eta, 0)$ là $0 = -\dfrac{1}{\gamma_0}\eta + m$, từ đó ta suy ra $\eta = \lambda_0 m$.

Từ đó cho thấy

$$
f_1\left(0, y_1\right) = \sum_{i+j\gamma_0=\gamma_0 m} a_{\mathrm{ij}}\left(c_0+y_1\right)^j = g\left(c_0+y_1\right).
$$

$$
\Rightarrow deg_{y_1}\left(f_1(0, y_1)\right) = \deg_{y_1}(g) = \deg_{c_0}\left(g\right) = m_1,
$$

trong đó c_0 là một nghiệm khác 0 của phương trình $g\left(c\right) = 0$, và $\deg(g) = m = m_0$. Nếu ta giả sử $-m_1 = m = m_0$, thì g có dạng sau

$$
g\left(c\right) = k(c-c_0)^m, \text{ với } k \neq 0.
$$

Hệ số của c^{m-1} trong đa thức

$$
g\left(c\right) = \sum_{i+j\gamma_0=\gamma_0 m} a_{\mathrm{ij}} c^j
$$

là $a_{i,m-1} \neq 0, i \in \mathbb{N}$ với $i + \gamma_0\left(m-1\right) = \gamma_0 m$. Chứng tỏ rằng

$$
\gamma_0 = i \in \mathbb{N}.
$$

□

Vậy ta có thể biểu diễn nghiệm $y = y\left(x\right)$ thành chuỗi lũy thừa theo $x^{1/n}$

$$
y\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i/n}.
$$

Định nghĩa 1.2.1. *Chuỗi có dạng* $y\left(x\right) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^{i/n}$

được gọi là một khai triển Newton - Puiseux của đường cong có phương trình

$$
f\left(x, y\right) = 0,
$$

và chuỗi này cũng được gọi là khai triển Newton - Puiseux của hàm f.

Nếu đặt $t = x^{1/n}$, ta được chuỗi

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

thì nó là nghiệm của phương trình $f(t^n, y) = 0$.

Sau đây là định lý và các nhận xét quan trọng:

Cho $\varepsilon, \delta > 0$. Đặt

$$U_{\varepsilon,\delta} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : |y| < \varepsilon, |x| < \delta \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{C} : |x| < \delta^{1/m}, m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Định lý 1.2.1. *Cho $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$, f bất khả quy có cấp $m > 0$ theo biến y. Khi đó, tồn tại $\varepsilon_0 > 0$, với $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ và tồn tại $\delta > 0$ sao cho: nếu*

$$X = \{(x, y) \in U_{\varepsilon,\delta} : f(x, y) = 0\}$$

thì tồn tại $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ và ánh xạ

$$\begin{aligned} &\pi : B \to \mathbb{C}^2 \\ &t \mapsto (t^m, y(t)) \end{aligned}$$

là ánh xạ giải tích từ B vào $X = \pi(B)$. Ánh xạ hạn chế

$$\pi|_{B\setminus\{0\}} : B\setminus\{0\} \to X\setminus\{0\}$$

là song ánh giải tích và $\pi^{-1}(0) = \{0\}$.

Nhận xét 1.2.1. *Với hàm $f(x, y)$ được cho trong định lý trên, và giả sử tồn tại chuỗi $y\left(x^{1/m}\right) \in \mathbb{C}\left\{x^{1/m}\right\}$ thỏa mãn phương trình $f(x, y) = 0$, thì đồng thời*

$$y\left(\xi x^{1/m}\right), y\left(\xi^2 x^{1/m}\right), \ldots, y\left(\xi^{m-1} x^{1/m}\right)$$

(với ξ là căn nguyên thủy bậc m của đơn vị) là các chuỗi hội tụ trong $\mathbb{C}\left\{x^{1/m}\right\}$ cũng thỏa mãn phương trình $f(x, y) = 0$.

Mặt khác, các chuỗi trong khai triển Newton - Puiseux của hàm f (hàm f có bậc m có tối đa m nghiệm) thỏa mãn phương trình $f(x, y) = 0$. Do *đó, mỗi chuỗi trong khai triển này phải đồng nhất với một trong m chuỗi ở trên và là chuỗi hội tụ theo biến $t = x^{1/m}$.*

Trường hợp tổng quát, $f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_n^{r_n}$, thì mỗi chuỗi trong khai triển Newton - Puiseux của f sẽ thỏa mãn phương trình $f_k(x, y) = 0$ nào đó trong các thành phần bất khả quy $\{f_k\}, k = 1, 2, \ldots, n$, áp dụng định lý trên đối với từng thành phần f_k và như vậy các chuỗi trong khai triển Newton - Puiseux là hội tụ.

Nhận xét 1.2.2. *Ta biết rằng, m chuỗi nghiệm $y\left(\xi^i x^{1/m}\right) \in \mathbb{C}\left\{x^{1/m}\right\}$, với $i = 0, 1, ..., m-1$ của phương trình $f(x, y) = 0$ là các chuỗi theo $x^{1/m}$. Mặt khác, các chuỗi trong khai triển Newton - Puiseux của f*

$$y\left(x^{1/n}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i/n}, n = q_0 q_1 \cdots q_{i_0} < \infty$$

cũng đồng nhất với các chuỗi trên. Như vậy, mẫu chung của các lũy thừa trong chuỗi là $n = m = q_0 q_1 \cdots q_{i_0}$, và

$$y\left(\xi x^{1/m}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i x^{i/m}$$

(với ξ là căn nguyên thủy bậc m của đơn vị).

Trường hợp tổng quát, $f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_n^{r_n}$, mỗi thành phần bất khả quy f_k được giả sử có bậc $m_k > 0$ theo y. Thì mẫu chung của các lũy thừa trong chuỗi của khai triển Newton - Puiseux ứng với f_k thỏa mãn $m_k = q_0^{(k)} q_1^{(k)} \cdots q_{i_0}^{(k)}$, và

$$y_k\left(\xi x^{1/m_k}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(k)} \xi^i x^{i/m_k}$$

(với ξ là căn nguyên thủy bậc m_k của đơn vị).

Nhận xét 1.2.3. *Từ khai triển Newton - Puiseux cho m chuỗi nghiệm theo $x^{1/m}$ của phương trình $f(x, y) = 0$, ta viết gọn: $y\left(\xi x^{1/m}\right), \xi^m = 1$, là các chuỗi nghiệm đó. Vậy ta có thể viết phân tích của f ở dạng*

$$f(x, y) = \prod_{\xi^m = 1} \left(y - y\left(\xi x^{1/m}\right)\right).$$

Trường hợp tổng quát, $f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_n^{r_n}$*, mỗi thành phần bất khả quy* f_k *được giả sử có bậc* $m_k > 0$ *theo* y*. Thì*

$$f_k(x,y) = \prod_{\xi^{m_k}=1} \left(y - y_k\left(\xi x^{1/m}\right)\right).$$

Cho trước mầm đường cong tại 0, xác định bởi hàm $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ giải tích trên lân cận của 0, ta xác định được các chuỗi hội tụ $y\left(\xi x^{1/m}\right) \in \mathbb{C}\left\{x^{1/m}\right\}$ là nghiệm của phương trình $f(x,y) = 0$.

Điều ngược lại cũng đúng, có nghĩa là cho trước chuỗi hội tụ $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ và số m nguyên dương, ta hoàn toàn xác định được mầm đường cong tại 0, xác định bởi hàm giải tích f trên lân cận của 0, f có bậc m theo y, nhận $y(t)$ là nghiệm của phương trình $f(t^m, y) = 0$.

Kết quả được phát biểu trong định lý sau:

Định lý 1.2.2. *Cho* $m \in \mathbb{N}^*$ *và chuỗi hội tụ* $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$*. Tập* X *ảnh của ánh xạ:* $t \mapsto (t^m, y(t))$ *là nghiệm của hàm giải tích*

$$f(x,y) = \prod_{\xi^m=1} \left(y - y\left(\xi x^{1/m}\right)\right)$$

trên lân cận của $0 \in \mathbb{C}^2$.

Chương 2

Hai áp dụng của khai triển Newton - Puiseux trong việc nghiên cứu nghiệm của một họ đa thức phụ thuộc tham số

2.1 Định lý Rellich

Định nghĩa 2.1.1. *Đa thức* $P(z) = z^d + \sum\limits_{i=1}^{d} a_i z^{d-i}, a_i \in \mathbb{R}$*, được gọi là đa thức hyperbolic, nếu mọi nghiệm của phương trình* $P(z) = 0$ *đều là nghiệm thực.*

Định lý 2.1.1. (Rellich 1937) *Xét đa thức hyperbolic*

$$P(x, z) = z^d + a_1(x) z^{d-1} + ... + a_d(x) \tag{2.1}$$

với a_i *là các hàm giải tích thực trong khoảng mở* $I \subset \mathbb{R}$*. Khi đó, tồn tại các hàm giải tích* $f_i : I \to \mathbb{R}$ *sao cho*

$$P(x, z) = \prod_{i=1}^{d} [z - f_i(x)], x \in I, z \in \mathbb{R}.$$

Để chứng minh định lý này, trước tiên ta cần đến kết quả sau:

Bổ đề 2.1.1. ([3, Bổ đề 3.1]) *Cho* $R(x,z) = z^r + \sum\limits_{k=1}^{r} c_k(x) z^{r-k}$ *với* $c_k(x)$ *là các hàm giải tích trong một tập mở* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. *Giả sử rằng với* $x_0 \in \Omega$, *đa thức* $z \mapsto R(x_0, z)$ *được phân tích thành* $R(x_0, z) = P_{x_0}(z) Q_{x_0}(z)$, *trong đó bậc* $\deg P_{x_0} = p$ *và* $\deg Q_{x_0} = q$, $r = p + q$. *Hơn nữa, giả sử rằng* $P_{x_0}(z)$ *và* $Q_{x_0}(z)$ *không có nghiệm chung trong* $\mathbb{C}$. *Khi đó, tồn tại lân cận* $U \subset \Omega$ *của* x_0 *và các hàm giải tích* $a_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, \cdots, p$; $b_j : U \to \mathbb{R}, j = 1, \cdots, q$ *sao cho*

$$R(x,z) = P(x,z) Q(x,z), x \in U, z \in \mathbb{R},$$

với $P(x,z) = z^p + \sum\limits_{i=1}^{p} a_i(x) z^{p-i}$, $Q(x,z) = z^q + \sum\limits_{j=1}^{q} b_j(x) z^{q-j}$. *Hơn nữa,* $P(x_0, z) = P_{x_0}(z)$ *và* $Q(x_0, z) = Q_{x_0}(z)$.

Cho $P(z) = z^d + \sum\limits_{i=1}^{d} a_i(x) z^{d-i}$ là đa thức với các hệ số thực. Giả sử $z_1, z_2, \cdots, z_d$ là các nghiệm (trong $\mathbb{C}$) của P. Theo công thức Viete, ta có

$$a_1 = z_1 + z_2 + \cdots + z_d.$$

Làm phép biến đổi $z \mapsto z - \dfrac{a_1}{d}$, ta có thể giả sử rằng $a_1 = 0$.

Bổ đề 2.1.2. *Cho* $P(z) = z^d + a_2 z^{d-2} + \cdots + a_d$ *là một đa thức với hệ số thực (ở đây* $a_1 = 0$*). Giả sử các nghiệm của* P *là* $z_1, z_2, \cdots, z_d$, *với* $z_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., d$. *Khi đó*

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_d^2 = -2a_2$$

Chứng minh. Theo công thức Viete, ta có

$$a_2 = \sum_{i<j} z_i z_j$$

do đó $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_d^2 = a_1^2 - 2a_2 = -2a_2$.

□

Hệ quả 2.1.1. *Cho* $P(z)$ *là một đa thức hyperbolic có dạng như trong Bổ đề 2.1.2. Khi đó,* $a_1 = a_2 = 0$ *khi và chỉ khi* $P(z) = z^d$.

Chứng minh. Thật vậy, vì $P(z)$ là đa thức hyperbolic nên mọi nghiệm $z_1, z_2, \cdots, z_d$ đều là số thực. Nếu $a_1 = a_2 = 0$, thì theo bổ đề trên

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_d^2 = -2a_2 = 0$$

nên $z_1 = z_2 = \cdots = z_d = 0$ và $P(z) = z^d$.

□

Với các bổ đề trên, ta bắt đầu chứng minh Định lý Rellich.

Chứng minh.

- Bước 1:

  Ta có thể giả sử rằng $a_i(0) = 0, \forall i$. Thực vậy, nếu $P(0,z) = (z-c)^d$, khi đó, làm phép biến đổi $z \mapsto z - c$, ta có thể giả sử là $c = 0$ và bởi vậy $a_i(0) = 0, \forall i$. Nếu $P(0,z) \neq (z-c)^d$, khi đó

  $$P(0,z) = (z-c)^p P_2(z), 0 < p < d$$

  và $P_2(c) \neq 0$. Áp dụng Bổ đề 2.1.1, ta có

  $$P(x,z) = P_1(x,z) P_2(x,z)$$

  trong đó P_1 và P_2 có dạng (2.1) với các hệ số là các hàm giải tích thực trong một lân cận của $0 \in \mathbb{R}$. Bởi vậy, ta có thể chứng minh Định lý cho P_1 và P_2 , là những đa thức bậc nhỏ hơn.

- Bước 2:

  Ta viết

  $$P(x,z) = z^d + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) z^{d-i} = \prod_{i=1}^{d} [z - f_i(x)], x > 0$$

  với $f_i(x), i = 1, \cdots, d$ là khai triển Newton - Puiseux của $P(x,z) = 0$. Theo bước 1, $a_i(0) = 0$, bởi vậy $f_i(0) = 0$. Áp dụng phép biến đổi $z \mapsto z - \dfrac{a_1(x)}{d}$ ta có thể giả thiết thêm rằng $a_1(x) \equiv 0$. Gọi $z_1(x), z_2(x), \cdots, z_d(x)$ là các nghiệm của $z \mapsto P(x,z)$. Theo Bổ đề 2.1.2:

  $$z_1(x)^2 + z_2(x)^2 + \cdots + z_d(x)^2 = -2a_2(x)$$

với mọi x trong một lân cận đủ nhỏ của $0 \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết, $z_j(x)$ là các số thực, bởi vậy từ đẳng thức trên ta suy ra $a_2(x) < 0$. Vì $a_2(x)$ là hàm giải tích tại lân cận của điểm 0, và vì $a_2(x) < 0$ với $\forall x$, nên từ đầu tiên trong khai triển Newton - Puiseux của $a_2(x)$ phải có số mũ chẵn. Tức là ta có thể viết

$$a_2(x) = x^2 b(x)$$

với $b(x)$ là một hàm giải tích trong lân cận của $0 \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + \cdots + f_d(x)^2 = x^2 b(x).$$

Ta gọi bậc tại 0 của $f_i(x)$ với $i = 1, 2, \cdots, d$ là số mũ bậc nhỏ nhất trong khai triển của $f_i(x)$, từ đẳng thức trên ta có thể chứng minh được rằng:

Bổ đề 2.1.3. *Bậc của $f_i(x)$ với $i = 1, 2, \cdots, d$ tại 0 là lớn hơn hoặc bằng 1.*

Từ đó, theo công thức Viete

$$a_i(x) = (-1)^i \sum_{k_1 < \cdots < k_i} z_{k_1} \cdots z_{k_i}.$$

Ta có:

Bổ đề 2.1.4. *Bậc của $a_i(x)$ tại $x = 0$ là lớn hơn hoặc bằng i.*

Bây giờ ta có thể đi đến kết luận của Định lý Rellich. Ta sẽ chứng minh là số mũ của mọi từ trong khai triển Newton - Puiseux $f_i(x)$ đều là các số nguyên dương.

Ta viết

$$f_i(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^i x^{t/r}.$$

Theo Bổ đề 2.1.3, ta có $\alpha_1^i = \alpha_2^i = \cdots = \alpha_{r-1}^i = 0$, và bởi vậy

$$\frac{f_i(x)}{x} = \sum_{t=r} \alpha_t^i x^{t/r-1}$$

là bị chặn trong một lân cận của $0 \in \mathbb{R}$. Ta thấy $\dfrac{f_i(x)}{x}$ chính là khai triển Newton - Puiseux của các nghiệm của

$$\widetilde{P}(x,z) = z^d + \sum_{i=1}^{d} \frac{a_i(x)}{x} z^{d-i}.$$

Và $\widetilde{a_i}(x) = \dfrac{a_i(x)}{x}$ là các hàm giải tích tại $0 \in \mathbb{R}$, theo Bổ đề 2.1.4. Vì vậy, ta lại có thể giả sử theo bước 1, là $\widetilde{a_i}(0) = 0$. Từ đây, theo Bổ đề 2.1.3, ta có

$$\alpha_t^i = 0, t = r+1, r+2, \cdots, 2r-1$$

Tiếp tục quá trình này, ta thấy rằng mọi từ có số mũ t với t không phải là bội số của r, đều có hệ số $\alpha_t^i = 0$.

Tóm lại, ta có thể viết $f_i(x)$ như là một chuỗi lũy thừa hội tụ:

$$f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{rt}^i x^n.$$

Lập luận trên được tiến hành cho trường hợp $x > 0$. Nhưng kết quả lại cho ta thấy rằng f_i là các hàm $f_i(x)$ giải tích trong lân cận của $0 \in \mathbb{R}$, bởi vậy ta suy ra rằng với $x < 0$, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_d(x)$ là nghiệm của đa thức $x \to P(x,z)$. Ta có

$$P(x,z) = z^d + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) z^{d-i} = \prod_{i=1}^{d} [z - f_i(x)]$$

với f_i là các hàm giải tích trong lân cận của $0 \in \mathbb{R}$.

$\square$

2.2 Proximal chính quy của ánh xạ hoành độ

2.2.1 Một số định nghĩa và kí hiệu

1. Nón trực giao chính quy

   Cho tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ và $\overline{x} \in C$.

Định nghĩa 2.2.1. *Epigraph của hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là tập tất cả các điểm nằm trên biên hoặc phần trên của đồ thị*

$$epi(f) = \{(x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} : f(x) \leq y\}.$$

Định nghĩa 2.2.2. *Nón pháp chính quy của C tại $\overline{x}$ là tập hợp các phần tử $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$\langle v, x - \overline{x} \rangle \leq o(|x - \overline{x}|), \forall x \in C.$$

Kí hiệu là $\hat{N}_C(\overline{x})$ là nón pháp chính quy của C tại $\overline{x}$.

Định nghĩa 2.2.3. *Nón trực giao của C tại $\overline{x}$, kí hiệu là $N_C(\overline{x})$, là tập hợp các phần tử $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho, tồn tại các dãy $x^\eta \to \overline{x}, v^\eta \to v$ với $x^\eta \in C$ và $v^\eta \in \hat{N}_C(\overline{x}^\eta)$.*

Định nghĩa 2.2.4. *Tập C được gọi là chính quy Clarke tại $\overline{x}$ nếu C là một tập đóng địa phương tại $\overline{x}$ và $\hat{N}_C(\overline{x}) = N_C(\overline{x})$.*

2. Dưới gradient chính quy

Định nghĩa 2.2.5. *Ta nói v là một dưới gradient chính quy của hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tại $\overline{x} \in dom(f)$, kí hiệu $v \in \hat{\partial} f(\overline{x})$ nếu*

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle v, x - \overline{x} \rangle + o(|x - \overline{x}|).$$

Ta có

$$\hat{\partial} f(\overline{x}) = \left\{ v | (v, -1) \in \hat{N}_{epi(f)}(\overline{x}, f(\overline{x})) \right\}.$$

Định nghĩa 2.2.6. *Ta nói v là một dưới gradient của hàm f tại $\overline{x}$, kí hiệu $v \in \partial f(\overline{x})$, nếu tồn tại các dãy $x^\eta \to \overline{x}$, $v^\eta \to v$ với $v^\eta \in \hat{\partial} f(x^\eta)$. Ta có*

$$\partial f(\overline{x}) = \left\{ v : (v, -1) \in N_{epi(f)}(\overline{x}, f(\overline{x})) \right\}.$$

3. Proximal dưới gradient và tính proximal chính quy

Định nghĩa 2.2.7. *Một vector v được gọi là một proximal dưới gradient của hàm f tại $\overline{x}$, kí hiệu là $v \in \partial_{prox} f(\overline{x})$, nếu:*

- $f(\overline{x}) < \infty$,

- *Tồn tại $\rho > 0, \delta > 0$ sao cho nếu $|x - \overline{x}| \leq \delta$, thì*

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle v, x - \overline{x} \rangle - \frac{1}{2}\rho|x - \overline{x}|^2.$$

Định nghĩa 2.2.8. *Một hàm f là nửa liên tục dưới nếu mọi $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, ta có $\inf(f(x)) \to f(\overline{x})$ khi $x \to \overline{x}$. Ta có f là nửa liên tục dưới khi và chỉ khi $epif$ là một tập đóng.*

Định nghĩa 2.2.9. *Một hàm f được gọi là proximal chính quy tại $\overline{x}$ với $\overline{v} \in \partial f(\overline{x})$, nếu:*

- *f hữu hạn và nửa liên tục dưới tại $\overline{x}$,*
- *tồn tại $\varepsilon > 0, \rho \geq 0$ sao cho: Nếu $v \in \partial f(x)$, $|v - \overline{v}| < \varepsilon, |x - \overline{x}| < \varepsilon, |x' - \overline{x}| < \varepsilon$ và $f(x) < f(\overline{x}) + \varepsilon$, thì*

$$f(x') \geq f(x) + \langle v, x' - x \rangle - \frac{\rho}{2}|x' - x|^2.$$

Ta nói f là proximal chính quy tại $\overline{x}$ nếu f là proximal chính quy tại $\overline{x}$ với mọi $\overline{v} \in \partial f(\overline{x})$.

2.2.2 Tính roximal chính quy của ánh xạ hoành độ

Định nghĩa 2.2.10. *Cho A là ma trận phức vuông cấp n. Hoành độ phổ của A được định nghĩa bởi*

$$\alpha(A) := \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \det(\lambda I - A) = 0\}.$$

Định nghĩa 2.2.11. *Gọi M^n là tập hợp các đa thức monic bậc n. Ánh xạ hoành độ đa thức được định nghĩa bởi*

$$a : M^n \to \mathbb{R},$$

$$a(p) = max\{\mathrm{Re}(z) : p(z) = 0\}.$$

Nhận xét 2.2.1. *Với mỗi ma trận A, hoành độ phổ và ánh xạ hoành độ có mối liên hệ như sau:*

$$\alpha(A) = a(\det(\lambda I - A)).$$

Định lý 2.2.1. ([3, Định lý 5.26]) *Cho ánh xạ*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to M^n \\ t &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, z^i + z^n \end{aligned}$$

trong đó mỗi $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là một hàm giải tích. Cho ánh xạ hoành độ a : $M^n \to \mathbb{R}$. Khi đó, ánh xạ hợp $a \circ f$ là proximal chính quy.

Chứng minh. Từ Bổ đề 2.1.1 phần chứng minh Định lý Rellich ta có:

Cho $P_t(z)$ là một đa thức monic một tham số với các hệ số $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là các hàm giải tích, $a_n = 1$. Giả sử tại $t = 0$, P_t có m nghiệm $z_1, z_2, \ldots, z_m$ với số bội lần lượt là $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Khi đó trên một lân cận của $t = 0$, ta có thể phân tích P_t như sau

$$P_t(z) = \prod_{j=1}^{m} q_{j_t}(z - z_j)$$

trong đó các hệ số q_j là các hàm giải tích theo t. Dựa vào điều này, để chứng minh định lý ta chỉ cần xét bài toán theo từng cụm nghiệm:

Bổ đề 2.2.1. *Theo mỗi cụm nghiệm, ánh xạ hoành độ địa phương có dạng*

$$a(t) = \begin{cases} s_1(t) + c_1|t|^{q_1} + \cdots, & \textit{khi } t \geq 0 \\ s_2(t) + d_1|t|^{r_1} + \cdots, & \textit{khi } t \leq 0 \end{cases}, \tag{2.2}$$

trong đó s_1 và s_2 là các hàm C^2 với $s_1(0) = s_2(0) = 0; s'_1(0) \leq s'_2(0)$; $c_1, d_1 \geq 0$ và q_1, r_1 là các số hữu tỷ dương nhỏ hơn 2.

Chứng minh. Ánh xạ hoành độ là cực đại của các phần thực của các nghiệm, đầu tiên ta lấy cực đại trong mỗi cụm nghiệm rồi lấy cực đại trên tất cả các cụm nghiệm. Xét đa thức monic $P_t(z)$ tương ứng các nghiệm trong một cụm nghiệm đơn. Không giảm tổng quát, ta giả sử $t = 0$. Giả sử rằng đa thức $P_t(z)$ có m nghiệm tại gốc. Chuỗi Puiseux cho các nghiệm được viết như sau

$$R_k(t) = \alpha_{k,1} t^{l_{k,1}} + \alpha_{k,2} t^{l_{k,2}} + \cdots, \text{ với } k = 1, 2, \ldots, m.$$

Các từ với lũy thừa nhỏ nhất của t xác định dáng điệu địa phương của các nghiệm. Nói riêng, dáng điệu của các phần thực của các nghiệm được xác định bởi lũy thừa nhỏ nhất của t mà các hệ số không phải là số thuần ảo. Giả sử các từ đó là

$$\begin{array}{c} \alpha_{1,j_1} t^{l_{1,j_1}} \text{ cho nghiệm } R_1(t) \\ \alpha_{2,j_2} t^{l_{2,j_2}} \text{ cho nghiệm } R_2(t) \\ \cdots \end{array}$$

Giả sử một từ với lũy thừa t nhỏ nhất ở nghiệm thứ k: $\alpha_{k,j_k} t^{l_{k,j_k}}$.

- Nếu số mũ nguyên, nghiệm là một hàm thuộc lớp C^1 trong một lân cận của 0. Nếu $l_{k,j_k} \geq 2$ thì nghiệm là hàm thuộc lớp C^2 và ta có thể chọn c_1, d_1 bằng 0.

  Nếu $l_{k,j_k} = 1$, thì ta cần xét từ bậc cao để biết ánh xạ hoành độ là hàm thuộc lớp C^2 hoặc là nó chứa từ có cấp tăng với t là một lũy thừa phân số.

- Nếu số mũ không nguyên, thì ta cần xét $t \geq 0$ và $t \leq 0$ là riêng biệt. Không giảm tổng quát, giả sử $t \geq 0$. Trường hợp $t \leq 0$ được xét một cách tương tự. Vì tổng của các nghiệm $R_j(t)$ phải bằng $-a_{n-1}$, là hàm giải tích, nên một số nghiệm với lũy thừa cùng bậc của t phải triệt tiêu lẫn nhau. Nói riêng, nếu $\operatorname{Re}(\alpha_{k,j_k}) < 0$ thì cần có nghiệm k' tương ứng với số hạng $\operatorname{Re}(\alpha_{k',j_{k'}}) > 0$. Do đó, với $t \geq 0$, ánh xạ hoành độ cho các nghiệm dáng điệu giống như $c_1 t^{l_{k,j_k}}$ với $c_1 > 0$.

$\square$

Bổ đề 2.2.2. *Một cách địa phương, ánh xạ hoành độ của một đa thức tùy ý có dạng*

$$a(t) = \begin{cases} s_1(t) + c_1 |t|^{q_1} + \cdots, & \text{khi } t \geq 0 \\ s_2(t) + d_1 |t|^{r_1} + \cdots, & \text{khi } t \leq 0 \end{cases},$$

trong đó s_1 và s_2 là các hàm thuộc lớp C^2 với $s_1(0) = s_2(0) = 0; {s'}_1(0) \leq {s'}_2(0)$; $c_1, d_1 \geq 0$ và q_1, r_1 là các số hữu tỷ dương nhỏ hơn 2.

Chứng minh. Giả sử rằng có k tập của nghiệm. Ta thấy cực đại mỗi tập liên kết có ánh xạ hoành độ

$$a_i(t) = s_i(t) + \begin{cases} c_i |t|^{q_i} + \cdots, & \text{khi } t \geq 0 \\ d_i |t|^{r_i} + \cdots, & \text{khi } t \leq 0 \end{cases}$$

Đầu tiên ta xét $t \geq 0$. Trên miền này, với t đủ nhỏ, một trong các hàm s_i sẽ là lớn nhất. Vì vậy, hàm cực đại là khả vi lớp C^2. Nếu tồn tại $q_i < 2$, ta có

$$a(t) = s_1(t) + c_1|t|^{q_1} + \cdots$$

ở đây s_1 là hàm thuộc lớp C^2 và q_1 là số hữu tỷ dương nhỏ hơn 2.
Lập luận tương tự với $t \leq 0$. Chú ý rằng khi ta lấy cực đại của mỗi s_i, các hạng tử với số mũ lớn nhất sẽ quyết định cấp tăng của s_i khi $t \geq 0$ và các hạng tử với số mũ âm sẽ quyết định cấp tăng của s_i khi $t \leq 0$. Do đó, ${s'}_1(0) \leq {s'}_2(0)$. □

Cuối cùng, ta cần chỉ ra rằng các hàm có công thức (2.1) là proximal chính quy tại 0. Ta chứng minh điều này qua 2 bước sau:

Bước 1

Xét trường hợp $s_1 = s_2 = 0$. Ánh xạ a có các dạng sau

$$a(t) = 0 \tag{2.3}$$

$$a(t) = \begin{cases} 0, \text{ với } t \geq 0 \\ d_i|t|^{r_i} + \cdots, \text{ khi } t \leq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$a(t) = \begin{cases} c_i|t|^{q_i} + \cdots, \text{ khi } t \geq 0 \\ 0, \text{ khi } t \leq 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$a(t) = \begin{cases} c_i|t|^{q_i} + \cdots, \text{ khi } t \geq 0 \\ d_i|t|^{r_i} + \cdots, \text{ khi } t \leq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Ta sẽ chứng minh rằng một hàm của (2.4) là proximal chính quy. Việc chỉ ra các dạng còn lại là proximal chính quy ta sử dụng lập luận tương tự.

Bổ đề 2.2.3. *Hàm*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ khi\ x \geq 0 \\ d|x|^q + \cdots, \ khi\ , x \leq 0 \end{cases},$$

trong đó $d > 0$ và số hữu tỷ $q < 2$, là proximal chính quy tại $x = 0$.

Chứng minh. Ta xét trường hợp $q < 1$, vì nếu không thì f là hàm lồi và bởi vậy là proximal chính quy. Dưới gradient của f là

$$\partial f(x) = \begin{cases} 0, \text{ khi } x < 0 \\ [0, \infty), \text{ khi } x = 0 \\ d_q x^{q-1} + \cdots, \text{ khi } x > 0 \end{cases}$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng mỗi $v \in [0, \infty)$ là một proximal dưới gradient của f tại $\overline{x} = 0$. Cố định $v \in [0, \infty)$. Ta cần chỉ ra có $\rho \geq 0$ và $\delta > 0$ sao cho nếu $|x - \overline{x}| < \delta$, thì

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle v, x - \overline{x} \rangle - \frac{\rho}{2} |x - \overline{x}|^2.$$

Ở đây, ta có thể chọn $\rho = 0$, sao cho tại $\overline{x} = 0$, ta cần chỉ ra tồn tại $\delta > 0$, sao cho: nếu $|x| < \delta$, thì $f(x) \geq vx$. Nếu $x < 0$, $f(x) = 0$, vì thế $0 \geq vx$ là luôn đúng. Xét $x > 0$, ta cần có

$$dx^q + \cdots \geq vx.$$

Khi x là đủ nhỏ, hạng tử dx^q là lớn hơn (vì nó chứa lũy thừa nhỏ nhất của x) mọi hạng tử khác, và $dx^q > 0$ do $d > 0$. Do đó, ta có thể chọn δ đủ nhỏ sao cho nếu $x < \delta$ thì

$$dx^q + \cdots \geq vx.$$

Định nghĩa 2.2.12. *Ta gọi một f - attentive địa phương hóa của ánh xạ dưới vi phân ∂f quanh điểm $(\overline{x}, \overline{v})$ là ánh xạ T xác định bởi*

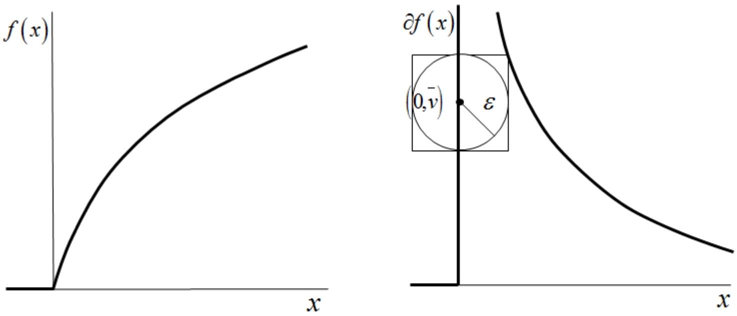
$$T(x) = \begin{cases} \{v \in \partial f(x) \,|\, |v - \overline{v}| < \varepsilon\}, \text{ nếu } |x - \overline{x}| < \varepsilon \text{ và } |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon \\ \emptyset \text{ nếu ngược lại} \end{cases}$$

Đến đây, ta cần kết quả sau của Rockafellar ([2, Theorem 5.23]):

Định lý 2.2.2. *Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hữu hạn và địa phương tại $\overline{x}$, và lấy $\overline{v} \in \partial f(\overline{x})$ là một proximal dưới gradient. Thì các điều kiện sau là thỏa mãn*

- *f là proximal chính quy tại $\overline{x}$ với $\overline{v}$.*
- *∂f có f - attentive địa phương hóa T xung quanh $(\overline{x}, \overline{v})$ sao cho $T + \rho I$ là đơn điệu với một số $\rho \geq 0$.*

Trở lại với chứng minh, với bất kỳ điểm $(0, \overline{v})$ trên đồ thị của ∂f, cần tìm được hình cầu $B\left((0, \overline{v}), \varepsilon\right)$ giao với đồ thị chỉ với $x \leq 0$. Hình cầu như thế sẽ cho ta f - attentive địa phương hóa T của ∂f (xem hình 2.1). Bây giờ, ta chỉ ra sự tồn tại ε. Xét hình vuông độ dài cạnh là 2ε tâm tại $(0, \overline{v})$. Ta đi tìm ε sao cho hình vuông sẽ tiếp xúc với đồ thị của ∂f (với $x > 0$) chỉ tại đỉnh $(\varepsilon, \overline{v} + \varepsilon)$.



Hình 2.1: $f(x)$ và ∂f

Khi đó

$$\overline{v} + \varepsilon \leq \partial f\left(\varepsilon\right) = dq\varepsilon^{q-1} + \cdots .$$

Khi ε nhỏ, hạng tử $dq\varepsilon^{q-1}$ tiến tới vô hạn (do $q < 1$) và lớn hơn tất cả các hạng tử khác. Vì $q - 1$ là lũy thừa nhỏ nhất của hạng tử này. Do đó, tồn tại ε sao cho bất đẳng thức trên thỏa mãn. Khi đó, hình cầu với bán kính ε sẽ chỉ giao với ∂f khi $x = 0$. Trên hình cầu này, T là đơn điệu, bởi vậy f là proximal chính quy tại 0 với $\overline{v}$.

□

Bước 2

Cuối cùng ta cần chứng minh rằng, tổng của một hàm khả vi dưới cấp 2 với một hàm proximal chính quy là một hàm proximal chính quy.

Bổ đề 2.2.4. *Giả sử f là liên tục và proximal chính quy tại $\overline{x}$ với $\overline{v} \in \partial f\left(\overline{x}\right)$. Cho g là một hàm khả vi dưới cấp 2 xung quanh $\overline{x}$. Thì $f + g$ là* *proximal dưới gradient tại $\overline{x}$ với*

$$\overline{v} + \nabla g\left(\overline{x}\right) \in \partial(f+g)\left(\overline{x}\right).$$

Chứng minh. Vì f là proximal chính quy, tồn tại $\varepsilon_f > 0, \rho_f \geq 0$ sao cho $v \in \partial f\left(x\right), |v-\overline{v}| < \varepsilon_f, |x-\overline{x}| < \varepsilon_f, |x'-\overline{x}| < \varepsilon_f$ và $f\left(\overline{x}\right)+\varepsilon_f > f\left(x\right)$ thì

$$f\left(x'\right) \geq f\left(x\right) + \langle v, x'-x\rangle - \frac{\rho_f}{2}|x'-x|^2.$$

Đặt $h = f+g$. Ta cần chỉ ra tồn tại $\varepsilon > 0, \rho \geq 0$ sao cho : Nếu $v \in \partial h\left(x\right)$, $|v-\overline{v}| < \varepsilon, |x-\overline{x}| < \varepsilon, |x'-\overline{x}| < \varepsilon$ và $h\left(x\right) < h\left(\overline{x}\right)+\varepsilon$ thì

$$h\left(x'\right) \geq h\left(x\right) + \langle v, x'-x\rangle - \frac{\rho}{2}|x'-x|^2.$$

Chọn $\varepsilon = \varepsilon_f$. Với x bất kỳ $|x-\overline{x}| \leq \varepsilon$, ta có thể viết g như sau

$$g\left(x'\right) = g_{conv}\left(x\right) - \frac{\rho_x}{2}|x'-x|^2$$

trong đó, g_{conv} là hữu hạn và lồi, $\rho_x \geq 0$. Vì tập $\{x : |x-\overline{x}| \leq \varepsilon\}$ là compact, tồn tại lân cận trên đúng $\rho_g = \sup_x(\rho_x)$. Đặt $\rho = \rho_f + \rho_g$. Lấy x, x' tùy ý sao cho

$$|x-\overline{x}| < \varepsilon \qquad\qquad |x'-\overline{x}| < \varepsilon.$$

Cho $v_h \in \partial h\left(x\right)$ với $|v_h - \overline{v}_h| < \varepsilon$. Lưu ý v_h có thể viết dưới dạng: $v_h = v_f + \nabla g\left(x\right)$ trong đó $v_f \in \partial f\left(x\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}
h\left(x'\right) &= f\left(x'\right) + g\left(x'\right)\\
&\geq f\left(x\right) + \langle v_f, x'-x\rangle - \frac{\rho_f}{2}|x'-x|^2 + g_{conv}\left(x'\right) - \frac{\rho_g}{2}|x'-\overline{x}|^2\\
&\geq f\left(x\right) + \langle v_f, x'-x\rangle - \frac{\rho_f}{2}|x'-x|^2 + g\left(x\right) + \langle \nabla g\left(x\right), x'-x\rangle - \frac{\rho_g}{2}|x'-x|^2\\
&= f\left(x\right) + g\left(x\right) + \langle v_f + \nabla g\left(x\right), x'-x\rangle - \frac{\rho_f+\rho_g}{2}|x'-x|^2\\
&= h\left(x\right) + \langle v_h, x'-x\rangle - \frac{\rho_h}{2}|x'-x|^2
\end{aligned}$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

□

□

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày các vấn đề sau:

1. Phương pháp Newton - Puiseux áp dụng với hàm giải tích 2 biến phức,
2. Chứng minh kết quả cơ bản của Rellich về tính giải tích của các nghiệm của họ đa thức hyperbolic phụ thuộc giải tích vào một tham số,
3. Trình bày chứng minh kết quả nói rằng: ánh xạ hoành độ của một họ đa thức một biến, phụ thuộc giải tích vào tham số là một ánh xạ proximal chính quy.

Tài liệu tham khảo

[1] E. Brieskorn, Plane algebraic curves.

[2] Jonathan A. Cross, Spectral Abscissa Optimization using Polynomaial Stablity Conditions, University of Washington 2010.

[3] K. Kurdyka and L. Paunescu, Hyperbolic polynomials and multiparameter real - analytic pertubation theory, Duke Math. J. Vol, (4), N.1 (2008), 123- 149.