BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

Nguyễn Thu Hiền

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG TUYẾN TÍNH CẤP MỘT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – 2015

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

Nguyễn Thu Hiền

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG TUYẾN TÍNH CẤP MỘT

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn

Hà Nội – 2015

Mục lục

Mở đầu

Hệ phương trình đạo hàm riêng đối xứng cấp một đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết phương trình đạo hàm riêng và trong toán học nói chung. Nhiều quá trình trong tự nhiên và trong kĩ thuật đã được mô hình hóa bởi hệ phương trình đối xứng cấp một. Vì vậy việc nghiên cứu tính giải được của bài toán Cauchy cho phương trình đối xứng cấp một có ý nghĩa thực tiễn. Luận văn nghiên cứu tính giải được của bài toán Cauchy cho hệ phương trình đối xứng cấp một với hệ số không phụ thuộc thời gian.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này Luận văn đã trình bày một số kiến thức cơ bản như: Một số không gian hàm, toán tử làm trơn, nửa nhóm và toán tử sinh, Định lý Hille-Yosida, bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường trong không gian Banach và một số toán tử giả vi phân cấp một.

Chương 2. Hệ phương trình đối xứng cấp một với hệ số không phụ thuộc thời gian. Nội dung chính của Luận văn được trình bày trong chương này bao gồm: Hệ phương trình đối xứng cấp một, cách đưa phương trình truyền sóng về hệ phương trình đối xứng cấp một, bài toán Cauchy cho hệ phương trình đối xứng cấp một trong L^2 và bài toán Cauchy cho hệ phương trình đối xứng cấp một trong W_2^1. Trong mỗi không gian L^2 hoặc W_2^1 Luận văn đã thiết lập bất đẳng thức năng lượng và chứng minh tính toàn ánh của toán tử A lên toàn không gian. Trên cơ sở áp dụng Định lý Hille-Yosida, Luận văn đã chỉ ra tính giải được duy nhất của bài toán Cauchy trong mỗi không gian.

Tài liệu tham khảo chính trong Luận văn là [1] và [2].

Trong suốt thời gian học tập tại Viện Toán - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đến nay, tác giả đã nhận được rất nhiều sự quan tâm và giúp đỡ của quý thầy cô, cán bộ công nhân viên của Viện Toán học, gia đình và bạn bè. Với lòng biết ơn sâu sắc nhất, tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô của Viện Toán học đã cùng với tri thức và tâm huyết của mình để truyền đạt vốn tri thức quý báu cho chúng tôi trong suốt thời gian học tập tại Viện.

Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình làm luận văn.

Luận văn được hoàn thành tại Viện Toán - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Bước đầu đi vào lĩnh vực nghiên cứu khoa học kiến thức của tác giả còn nhiều hạn chế và bỡ ngỡ, mặc dù đã cố gắng hết mình nhưng không tránh khỏi những sơ xuất và thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của quý thầy cô và các bạn đọc để Luận văn được hoàn thiện hơn. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 15 tháng 08 năm 2015

Tác giả luận văn

Nguyễn Thu Hiền

Danh mục kí hiệu

$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\mathbb{R}_+$	với $\forall t \in \mathbb{R}_+$ thì $t \geq 0$
v_t	đạo hàm của hàm v theo biến t
v_{tt}	đạo hàm cấp hai của hàm v theo biến t
$*$	tích chập
A^*	là ma trận chuyển vị của liên hợp phức của ma trận A
$(W_2^1)^*$	không gian đối ngẫu của không gian W_2^1
$[a, b]$	đoạn từ a đến b
$u(x)$	hàm u phụ thuộc vào biến x
$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}$	bao đóng của tập $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}$
$\rightrightarrows$	hội tụ đều
$\sup\limits_{x \in K} f(x)$	supremum của tập $\{f(x) : x \in A\}$
$\mathrm{im} f(x)$	ảnh của hàm số $f(x)$
$\Gamma(f(x))$	đồ thị của hàm $f(x)$
$\mathrm{Re}\, p$	phần thực của số p

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày một số không gian hàm, toán tử làm trơn, nửa nhóm và toán tử sinh của nó, Định lý Hille-Yosida, bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường trong không gian Banach và một số toán tử giả vi phân cấp một được sử dụng trong các chứng minh của chương tiếp theo.

1.1 Một số không gian hàm

Định nghĩa 1.1. *Không gian* $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định và bình phương khả tích trong $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^n)$ được định nghĩa bởi công thức

$$\|f\| = \|f(x)\|_{L^2} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Định nghĩa 1.2. *Không gian $W_2^m = W_2^m(\mathbb{R}^n)$ là không gian bao gồm các hàm $f \in L^2$ mà có đạo hàm riêng đến cấp m đều thuộc L^2.*
Chuẩn trong W_2^m được cho bởi công thức sau

$$\|f\|_m^2 = (\|f(x)\|_{m,L^2})^2 = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f(x)\|_{L^2}^2 ,$$

trong đó, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n; D^\alpha f(x) = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} .... (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} f(x)$.

Định nghĩa 1.3. *Không gian $\mathscr{B}^m = \mathscr{B}^m(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm có đạo hàm riêng liên tục và bị chặn đến cấp m .*
Chuẩn trong $\mathscr{B}^m(\mathbb{R}^n)$ được cho bởi công thức

$$|f(x)|_m = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)| .$$

Định nghĩa 1.4. *Không gian $C^m = C^m(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm có đạo hàm đến cấp m liên tục.*
Sự hội tụ trong C^m được hiểu là hội tụ đều trên các tập compact $K \subset \mathbb{R}^n$ với chuẩn được cho bởi công thức sau

$$|f|_{m,K} = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)| .$$

Định nghĩa 1.5. *Không gian $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ là tập hợp các hàm khả vi vô hạn lần và có giá compact trong $\mathbb{R}^n$, trong đó giá của hàm $f(x)$ kí hiệu là supp f là tập hợp*

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}.$$

Định nghĩa 1.6. *Không gian* $S = S(\mathbb{R}^n)$ là tập hợp tất cả các hàm $f(x) \in C^\infty$ sao cho với mọi đa chỉ số α, β tồn tại $C_{\alpha,\beta} > 0$ và

$$\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Định nghĩa 1.7. *Không gian* $C^m([a,b],E)$. Giả sử E là không gian Banach. *Không gian* $C^m([a,b],E)$ bao gồm các hàm $f(t)$ xác định trên $[a,b]$, nhận giá trị trong E và khả vi liên tục đến cấp m trên $[a,b]$, với chuẩn sau

$$\|f(t)\|_{C^m([a,b],E)} = \sup_{t\in[a,b]} \sum_{k=0}^{m} \left\|f^{(k)}(t)\right\|_E.$$

1.2 Toán tử làm trơn

Định nghĩa 1.8. *Toán tử làm trơn* (kí hệu ρ_δ).

Ta chọn một hàm $\rho(x) \in \mathscr{D}, \rho(x) = 0$ nếu $|x| \geq 1$ và $\int\limits_{|x|\leq 1} \rho(x)\mathrm{dx} = 1$.

Với $\delta > 0$, đặt

$$\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n}\rho\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Khi đó

$\rho_\delta(x) \in \mathscr{D}, \rho_\delta(x) = 0$ nếu $|x| \geq \delta$,

$$\int\limits_{|x|\leq\delta} \rho_\delta(x)\mathrm{dx} = 1.$$

Toán tử làm trơn được định nghĩa như sau

$$u_\delta(x) = u * \rho_\delta = \int\limits_{|y|\leq\delta} \rho_\delta(y)u(x-y)dy.$$

Định lý 1.1. *[1, Bổ đề 1.3]*

Ta có các khẳng định sau

i) $\rho_\delta * u \in C^\infty$.

ii) *Nếu hàm* u *có giá compact thì giá của* $\rho_\delta * u$ *nằm trong* δ*-lân cận của giá của* u.

iii) *Với* $u \in C^m$ *và* $\delta \to 0$ *ta có* $\rho_\delta * u \to u$ *trong* C^m.

iv) *Với* $u \in L^p, p \geq 1$, *ta có* $\rho_\delta * u \to u$ *trong* L^p *trên các tập compact.*

1.3 Nửa nhóm liên tục và toán tử sinh

Cho E là không gian Banach. Giả sử A: $E \to E$ là toán tử tuyến tính đóng, nói chung là không bị chặn. Xét phương trình vi phân thường sau đây trong không gian E

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

với điều kiện ban đầu

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

trong đó $u_0 \in E$, $u(t), f(t) : \mathbb{R}_+ \to E$ trong đó $u(t)$ là ẩn hàm.

Để giải bài toán (1.1) và (1.2) ta đưa vào khái niệm nửa nhóm sau đây.

Định nghĩa 1.9. *Nửa nhóm liên tục* là tập hợp $\{T_t,\ t \geq 0\}$ thỏa mãn các điều sau

i) $T_t : E \to E$ là các toán tử tuyến tính bị chặn thỏa mãn $\|T_t\| \leq Ce^{\beta t}$ và $\forall u \in E$, $T_t u$ là liên tục theo t (ở đây C, β là những hằng số thích hợp).

ii) $T_0 = Id$, trong đó Id là toán tử đồng nhất trong E.

iii) $T_t T_s = T_{t+s}$ $(t, s \geq 0)$.

Giả sử nửa nhóm liên tục $\{T_t,\ t \geq 0\}$ được cho trước. Ta xét toán tử $A : E \to E$ được định nghĩa bởi công thức sau

$$Au = \lim_{t \to 0_+} \frac{T_t u - u}{t}. \tag{1.3}$$

Khi đó miền xác định $\mathscr{D}(A)$ của toán tử A là tập hợp sau

$$\mathscr{D}(A) = \left\{ u \in E;\ \exists \lim_{t \to 0_+} \frac{T_t u - u}{t} \right\}.$$

Toán tử A được xác định bởi công thức (1.3) được gọi là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$.

Xét biến đổi Laplace của $\{T_t\}$, được cho bởi công thức

$$T_t(e^{-pt})x = \int_0^\infty e^{-pt} T_t x \, dt \quad (x \in E, \operatorname{Re} p = \xi > \beta).$$

Định lý 1.2. *[1, Mệnh đề 5.1]*

Ta có các khẳng định sau

a) $\forall x \in E$, *ta có* $T_t(e^{-pt})x \in \mathscr{D}(A)$ *và* $(pI - A)T_t(e^{-pt})x = x$.

b) *Với mọi* $x \in \mathscr{D}(A)$, *ta có* $T_t(e^{-pt})(pI - A)x = x$.

c) A *là toán tử đóng và* $\mathscr{D}(A)$ *là trù mật trong* E.

1.4 Định lý Hille-Yosida

Định lý Hille-Yosida sau đây cho ta điều kiện đủ để một toán tử đóng là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục nào đó.

Định lý 1.3. *Cho E là không gian Banach, A là toán tử đóng và có miền xác định trù mật trong không gian Banach E. Giả sử tồn tại một số β sao cho với mọi $\lambda > \beta$ tồn tại giải thức $(\lambda I - A)^{-1}$ của A thỏa mãn*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-m}\right\| \leq \frac{1}{(\lambda - \beta)^m} \quad (\lambda > \beta, m = 1, 2, 3....). \tag{1.4}$$

Khi đó tồn tại duy nhất nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$ sao cho A là toán tử sinh.

Chứng minh.

Lấy $A_1 = A - \beta I$, (với $I = Id$) ta có

$$\left\|(\lambda I - A_1)^{-m}\right\| \leq \frac{C}{\lambda^m} \quad (\lambda > 0).$$

Mặt khác, nếu ta có thể chứng minh rằng, đối với nửa nhóm $\{S_t\}$ với $\|S_t\| \leq C$ có A_1 là toán tử sinh thì $T_t = e^{\beta t}S_t$ thỏa mãn điều kiện của định lý.

Do đó ta có thể giả thiết $\beta = 0$, hay

$$\left\|(\lambda I - A)^{-m}\right\| \leq \frac{C}{\lambda^m} \quad (\lambda > 0, m = 1, 2, 3....).$$

Đặt $J_\lambda = \left[I - \dfrac{A}{\lambda}\right]^{-1} \quad (\lambda > 0)$, ta có

1) $\quad \|{J_\lambda}^m\| \leq C \quad (m = 1, 2, 3...)$.

2) $\quad$ Nếu $x \in \mathscr{D}(A)$, thì $AJ_\lambda x = J_\lambda Ax = \lambda(J_\lambda - I)x$.

Từ điều này ta có, với $x \in E$

$$AJ_\lambda x = \lambda(J_\lambda - I)x,$$

$$J_\lambda x \to x \quad (\lambda \to \infty) \quad (x \in E). \tag{1.5}$$

Cho $x \in \mathscr{D}(A)$, có $(J_\lambda - I)x = \dfrac{1}{\lambda}J_\lambda Ax \to 0 \ (\lambda \to +\infty)$.

Từ $\|J_\lambda\| \leq C, \mathscr{D}(A)$ là trù mật trong E, ta có (1.5). Với A, B là những toán tử bị chặn ta định nghĩa

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Ta có

$$\left\|e^A\right\| \leq e^{\|A\|}.$$

Nếu A, B là bị chặn và giao hoán ta có

$$e^{A+B} = e^A + e^B,$$

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Mặt khác, $AJ_\lambda = \lambda(J_\lambda - I)$ là toán tử bị chặn, vì thế

$$e^{tAJ_\lambda} = e^{\{t\lambda(J_\lambda - I)\}} = e^{t\lambda J_\lambda} \cdot e^{-t\lambda I}. \tag{1.6}$$

Từ 1) và 2), cho $t \geq 0$, ta có

$$\left\| e^{tAJ_\lambda} \right\| \leq Ce^{t\lambda}e^{-t\lambda} = C.$$

Hơn nữa $\dfrac{d}{dt}e^{tAJ_\lambda} = AJ_\lambda e^{tAJ_\lambda} = e^{tAJ_\lambda}AJ_\lambda = e^{tAJ_\lambda}J_\lambda A.$

Do $J_\lambda, J_\mu \quad (\lambda, \mu > 0)$ là giao hoán, nên $AJ_\mu (= \mu(J_\mu - I))$ và e^{tAJ_λ} cũng giao hoán.

Đặt $T_t^{(\lambda)} = e^{tAJ_\lambda}$ cho $x \in \mathscr{D}(A)$, ta có

$$(T_t^{(\lambda)} - T_t^{(\mu)})x = \int\limits_0^t \frac{d}{ds}\{T_{t-s}{}^{(\mu)}T_s{}^{(\lambda)}x\}ds = \int\limits_0^t T_{t-s}{}^{(\mu)}T_s{}^{(\lambda)}(J_\lambda - J_\mu)Ax\,ds.$$

Từ công thức (1.5) và (1.6) ta thấy $T_t{}^{(\lambda)}x - T_t{}^{(\mu)}x$ hội tụ đều trong một khoảng hữu hạn với $t \geq 0, \forall x \in E$, khi $\lambda, \mu \to +\infty$. Ta kí hiệu giới hạn của $T_t{}^{(\lambda)}x$ khi $\lambda \to +\infty$ là $T_t x$. Ta có $T_t x$ liên tục với $t \geq 0$ và

1) $\quad \|T_t x\| \leq C\|x\|,$

2) $\quad T_{t+s} = T_t \cdot T_s.$

Để chứng minh 2) ta chú ý $T_{t+s}{}^{(\lambda)}x = T_t{}^{(\lambda)} \cdot T_s{}^{(\lambda)}x$ khi $\lambda \to +\infty$. Do $T_0 x = x$ nên ta suy ra

3) $\quad T_t x \to x$ khi $t \to +0$.

Cuối cùng ta chứng minh A là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$.

Ta giả sử A' là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$, và $A' \supset A$. Thực chất từ Định lý 1.2, cho $\lambda > 0$, $(\lambda I - A')$ là song ánh từ $\mathscr{D}(A')$ vào E với giả thiết $A' \supset A$ thì $(\lambda I - A)$ cũng là một song ánh từ $\mathscr{D}(A')$ vào E. Do đó $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A')$ suy ra $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A')$.
Cho $x \in \mathscr{D}(A)$ ta có

$$T_t^{(\lambda)}x - x = \int_0^t T_t^{(\lambda)} J_\lambda Ax\, dt,$$

vì thế

$$T_t x - x = \int_0^t T_t Ax\, dt \quad \text{khi } \lambda \to +\infty.$$

Do đó

$$\lim_{t \to +0} \frac{(T_t x - x)}{t} = Ax,$$

vậy A là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$.

Ta chứng minh tính duy nhất của nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$.
Giả sử nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$ bất kì nào đó có toán tử sinh là A.
Ta có

$$T_t x - e^{tAJ_\lambda}x = \int_0^t T_{t-s} e^{sAJ_\lambda}(A - AJ_\lambda)x\, ds \quad (x \in \mathscr{D}(A)),$$

ở đây ta sử dụng $AJ_\lambda \supset J_\lambda A$ để thiết lập đẳng thức. Từ đây ta có, $e^{tAJ_\lambda}x \to T_t x$ khi $\lambda \to +\infty$. Vậy $\{T_t\}$ là duy nhất. □

1.5 Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường trong không gian Banach

Định lý sau đây cho ta lời giải của bài toán Cauchy (1.1), (1.2)

Định lý 1.4. *Giả sử A là toán tử đóng có miền xác định $\mathscr{D}(A)$ trù mật trong không gian Banach E. Giả sử A là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục $\{T_t\}$, $f(t)$ và $Af(t)$ thuộc $C^0([0,T],E)$. Khi đó bài toán Cauchy (1.1), (1.2) có duy nhất nghiệm $u(t) \in C^1([0,T],E)$ và được cho bởi công thức sau*

$$u(t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds. \tag{1.7}$$

Chứng minh. Để chỉ ra (1.7) là nghiệm ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A\psi(t) + f(t),$$

ở đây

$$\psi(t) = \int_0^t T_{t-s} f(s)\, ds.$$

Với $\psi \in \mathscr{D}(A)$ và

$$A\psi(t) = \int_0^t T_{t-s} A f(s) ds,$$

A là toán tử đóng và $A\psi(t)$ là liên tục.

Cho $\eta \geq 0$ ta có

$$\frac{\psi(t+\eta) - \psi(t)}{\eta} = \frac{1}{\eta}\int_t^{t+\eta} T_{t+\eta-s} f(s) ds + \frac{T_\eta - I}{\eta}\int_0^t T_{t-s} f(s) ds.$$

Khi $\eta \to +0$, $\psi'_+(t) = f(t) + A\psi(t)$ thì vế phải của phương trình là một hàm liên tục theo t. Dó đó, $\psi'(t) = f(t) + A\psi(t)$.

Ta chứng minh tính duy nhất.

Giả sử $J_\lambda = (I - \dfrac{A}{\lambda})^{-1}, \quad (\lambda \geq 0)$. Ta thấy

$\|J_\lambda^m\| \leq C \quad (m = 1, 2, 3....)$. Với $x \in \mathscr{D}(A), AJ_\lambda x = \lambda(J_\lambda - I)x$. Từ đây ta có $x \in E$, thì $AJ_\lambda x = \lambda(J_\lambda - I)x$, và $J_\lambda x \to x \quad$ (khi $\lambda \to +\infty$). Vậy nghiệm $u_\lambda(t)$ của

$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t) = (AJ_\lambda)u_\lambda(t) + f(t)$$

là nghiệm duy nhất với giá trị ban đầu u_0, do AJ_λ là toán tử bị chặn. Ta đặt $u(t) - u_\lambda(t) = v_\lambda(t)$ cho nghiệm $u(t)$ của bài toán Cauchy (1.1), (1.2). Do đó

$$\frac{d}{dt}v_\lambda(t) = (AJ_\lambda)v_\lambda(t) + (A - AJ_\lambda)u(t).$$

Ta có

$$v_\lambda(t) = \int_0^t {T_{t-s}}^{(\lambda)}(A - AJ_\lambda)u(s)\,ds \quad (u \in \mathscr{D}(A)),$$

(chú ý rằng $v_\lambda(0) = 0$) và

$$v_\lambda(t) = \int_0^t {T_{t-s}}^{(\lambda)}(I - J_\lambda)Au(s)ds.$$

$\left\|{T_{t-s}}^{(\lambda)}(I - J_\lambda)Au(s)\right\|$ là bị chặn đều theo λ và biến s, với biến s thuộc một khoảng bị chặn. Nếu ta cố định s và cho $\lambda \to +\infty$, thì $\left\|{T_{t-s}}^{(\lambda)}(I - J_\lambda)Au(s)\right\| \to 0$, vậy $v_\lambda(t) \to 0$, nghĩa là $u(t)$ là giới hạn của $u_\lambda(t)$. Do đó $u(t)$ là xác định duy nhất. $\square$

1.6 Một số toán tử giả vi phân cấp một

Dưới đây ta trình bày một số vấn đề liên quan đến toán tử giả vi phân để phục vụ vào chứng minh các định lý ở chương tiếp theo.

1.6.1 Biến đổi Fourier

Giả sử $f(x) \in S$. Biến đổi Fourier của $f(x)$, kí hiệu là $\widehat{f}(\xi)$ với $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, được định nghĩa bởi công thức

$$F[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx. \tag{1.8}$$

Ta có công thức nghịch đảo sau đây

$$F^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d(\xi). \tag{1.9}$$

Với mọi $f(x) \in S$ ta có các công thức sau

$$F[D_x^\alpha f(x)] = (2\pi i\xi)^\alpha F[f] \tag{1.10}$$

$$D_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = F\left[(-2\pi i x)^\alpha f(x)\right] \tag{1.11}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi. \tag{1.12}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \tag{1.13}$$

Biến đổi Fourier là một song ánh từ S lên S. Công thức (1.13) cho phép thác triển biến đổi Fourier từ L^2 vào L^2. Biến đổi Fourier là một song ánh và đẳng cự từ L^2 lên L^2, đồng thời các công thức (1.8) - (1.13) vẫn còn đúng.

1.6.2 Toán tử giả vi phân

Trên cơ sở các công thức (1.10) và (1.9) người ta đưa vào toán tử giả vi phân sau đây

$$P(x, D)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} P(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\, d\xi, \tag{1.14}$$

trong đó hàm số $P(x, \xi)$ được gọi là biểu trưng của toán tử $P(x, D)$.

1.6.3 Toán tử $\Lambda(x, D)$

Toán tử $\Lambda(x, D)$ là toán tử giả vi phân với biểu trưng

$$\Lambda(x, \xi) = |\xi|.$$

1.6.4 Toán tử Riesz $R_j(x, D)$.

Toán tử $R_j(x, D)$ là toán tử giả vi phân với biểu trưng

$$R_j(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\xi_j}{|\xi|}$$

Hiển nhiên R_j là một toán tử bị chặn trong không gian L^2.
Ta định nghĩa hàm số $R_j(x) = C_n \cdot \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$, trong đó $C_n = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$.
Khi đó người ta đã chứng minh rằng toán tử giả vi phân $R_j(x, D)$ khi tác động lên u được tính theo công thức sau

$$R_j(x, D)u = R_j(x) * u = C_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}} * u(x). \tag{1.15}$$

Ta cũng có mối quan hệ giữa các toán tử Λ và R_j như sau

$$\Lambda u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} R_j u = \sum_{j=1}^{n} R_j \frac{\partial}{\partial x_j} u.$$

Chương 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG CẤP MỘT VỚI HỆ SỐ KHÔNG PHỤ THUỘC THỜI GIAN

2.1 Hệ phương trình đối xứng cấp một

Định nghĩa 2.1. Giả sử $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp N với các phần tử là các số phức. Ma trận A được gọi là ma trận *ma trận Hermite* nếu $(\overline{A})^T = A$, trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A và $\overline{A}$ là ma trận liên hợp phức của A.

Ví dụ 2.1. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 5 \end{pmatrix}$. Ta có, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}$,

và $\overline{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 5 \end{pmatrix} = A$. Vậy A là ma trận Hermite.

Ví dụ 2.2. Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ có $\overline{A} = A$ và $\overline{A}^T = A$. Vậy A là ma trận Hermite.

Định nghĩa 2.2. Xét hệ phương trình cấp một sau

$$M[u] \equiv \frac{\partial}{\partial t}u - \sum_{k=1}^{n} A_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}u - B(x,t)u = f(x,t). \tag{2.1}$$

Ở đây, u là hàm vector có $u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_N(x,t)$ là N thành phần, f là các hàm vector cột, $A_k(x,t)$ là các ma trận Hermite vuông cấp N. Ta đặt

$$u(x,t) \equiv u(t) = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ \vdots \\ u_N(x,t) \end{bmatrix},$$

kí hiệu

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \|u_j(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Hệ phương trình (2.1) được gọi là *hệ phương trình đối xứng* nếu các ma trận A_k với $k = 1, 2, ..., n$ là ma trận Hermite.

Bài toán Cauchy cho hệ phương trình (2.1): Tìm hàm vector $u(x,t)$ sao cho nó thỏa mãn hệ phương trình (2.1) và thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2.2}$$

trong đó $u_0(x)$ là hàm vector được cho trước.

Để rõ thêm về hệ phương trình đối xứng cấp một, ta xét ví dụ sau

Ví dụ 2.3. Cho hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1(x_1, t) \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_2(x_2, t). \end{cases}$$

Nếu ta đặt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ thì hệ phương trình được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Hệ (2.3) là hệ phương trình đối xứng cấp một.

Ví dụ 2.4. Cho hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - u_3 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - 2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - 3\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - 4\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - u_2 = f_2(x_1, x_2, t) \\ \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - i\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - 3\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - 4\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - 5\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - u_3 = f_3(x_1, x_2, t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Nếu ta đặt $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -i \\ 0 & i & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$

thì hệ phương trình (2.4) được viết dưới dạng vector như sau

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -i \\ 0 & i & 3 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$. Vậy hệ phương trình (2.4) trên là hệ phương trình đối xứng.

2.2 Đưa phương trình truyền sóng về hệ phương trình đối xứng cấp một.

Xét phương trình truyền sóng sau

$$v_{tt} - \sum_{j=1}^{n} v_{x_j x_j} + b_0 v_t + \sum_{j=1}^{n} b_j v_{x_j} + cv = g(x,t); \tag{2.5}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3...., x_n) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R},$$

trong đó $v(x,t) = v(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ là ẩn hàm cần tìm.

Bài toán Cauchy cho phương trình (2.5): Tìm nghiệm $v(x,t) \in C^2$ của phương trình (2.5) sao cho

$$\begin{cases} v(x,0) = v_0(x) \\ v_t(x,0) = v_1(x) \end{cases}$$

trong đó $v_0(x)$ và $v_1(x)$ là các hàm số được cho trước. Để đưa (2.5) về hệ phương trình cấp một ta đặt

$$u_1 = v; \tag{2.6}$$

$$u_2 = v_{x_1}; \tag{2.7}$$

....

$$u_n = v_{x_{n-1}}; \tag{2.8}$$

$$u_{n+1} = v_{x_n}; \tag{2.9}$$

$$u_{n+2} = v_t. \tag{2.10}$$

Khi đó

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \overset{(2.6)}{=} \frac{\partial v}{\partial t} \overset{(2.10)}{=} u_{n+2}; \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} \overset{(2.7)}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial x_1}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial v}{\partial t}) \overset{(2.10)}{=} \frac{\partial u_{n+2}}{\partial x_1}; \tag{2.12}$$

....

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \overset{(2.8)}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}) = \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(\frac{\partial v}{\partial t}) \overset{(2.10)}{=} \frac{\partial u_{n+2}}{\partial x_{n-1}}; \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial x_n}) = \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial v}{\partial t}) \overset{(2.10)}{=} \frac{\partial u_{(n+2)}}{\partial x_n}; \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{(n+2)}}{\partial t} &\overset{(2.10)}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial t}) = v_{tt} \overset{(2.5)}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial v}{\partial x_j}) + b_0 v_t + \sum_{j=1}^{n} b_j v_{x_j} + cv + g \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} u_{j+1} - b_0 u_{n+2} - b_1 u_2 - b_2 u_3 - .... - b_n u_{n+1} - cu_1 + g.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{\partial u_{n+2}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x_j} - b_0 u_{n+2} - b_1 u_2 - b_2 u_3 - .... - b_n u_{n+1} - cu_1 + g. \tag{2.15}$$

Viết lại các phương trình (2.11)-(2.15) dưới dạng ma trận, ta có

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} +$$

$$\ldots\ldots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_n} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} & -b_n & -b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}.$$

Ta đặt

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} & -b_n & -b_0 \end{bmatrix},$$

trong đó $A_j(x,t)$ là ma trận vuông cấp $(n+2)$ có phần tử ở cuối hàng thứ $(j+1)$ và cuối cột thứ $(j+1)$ đều bằng 1, các vị trí còn lại bằng 0. Ta nhận được hệ phương trình đối xứng cấp một dưới dạng ma trận sau đây

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x,t)u + f(x,t). \tag{2.16}$$

Dữ kiện Cauchy cho hệ (2.16) tại thời điểm $t = 0$ là hàm vector sau đây

$$u(x,0) = \begin{bmatrix} u_1(y,0) \\ u_2(y,0) \\ u_3(y,0) \\ \cdots \\ u_n(y,0) \\ u_{n+1}(y,0) \\ u_{n+2}(y,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0(x) \\ \frac{\partial v_0(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_0(x)}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial v_0(x)}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial v_0(x)}{\partial x_n} \\ v_1(x) \end{bmatrix} = u_0(x).$$

2.3 Bài toán Cauchy cho hệ phương trình đối xứng cấp một trong không gian L^2

2.3.1 Bất đẳng thức năng lượng trong không gian L^2

Định lý 2.1. *Giả sử hệ phương trình (2.1) là hệ đối xứng, $f(t) \in C^0([0,T], L^2)$ và $u(t) \in C^0([0,T], W_2^1)$ là nghiệm của hệ phương trình*

(2.1). Hơn nữa ta giả sử $u(t) \in C^1([0,T], L^2)$. Khi đó ta có bất đẳng thức năng lượng sau

$$\|u(t)\| \le e^{\gamma t}\|u(0)\| + \int_0^t e^{\gamma(t-s)}\|f(s)\|\,ds. \tag{2.17}$$

Ở đây γ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T và các hệ số của phương trình nhưng không phụ thuộc $u(t)$ và $f(t)$.

Chứng minh.

Do $\|u(t)\|^2 = (u(t), u(t))$ nên

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = \left(\frac{d}{dt}u(t), u(t)\right) + \left(u(t), \frac{d}{dt}u(t)\right).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\left(u(t), \frac{d}{dt}u(t)\right) &= \sum_k \left(u, A_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}u\right) + (u, Bu + f) \\
&= -\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(A_k(x,t)u), u\right) + (u, Bu + f) \\
&= -\left\{\sum_k \left(A_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}, u\right) + \sum_k \left(\frac{\partial A_k(x,t)}{\partial x_k}u, u\right)\right\} \\
&\quad + (u, Bu + f).
\end{aligned}$$

Để có công thức trên ta đã sử dụng công thức tích phân từng phần sau đây

$$\left(u, \frac{\partial}{\partial x_k}v\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k}u, v\right). \tag{2.18}$$

Thật vậy, $u \in W_2^1$ nên ta có thể lấy một dãy $\rho_j(x)$ từ trong $\mathscr{D}$ sao cho $\rho_j(x) \to u(x) \in W_2^1$ khi $j \to +\infty$, do đó

$$\left(u, \frac{\partial}{\partial x_k}v\right) = \lim_{j\to\infty}\left(\rho_j(x), \frac{\partial}{\partial x_k}v\right) = -\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\rho_j(x), v\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k}u, v\right).$$

Vậy

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = -\sum_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}u, u\right) + 2\mathrm{Re}(Bu, u) + 2\mathrm{Re}(u, f).$$

Suy ra

$$2\|u(t)\|\frac{d\|u(t)\|}{dt} \le \alpha\|u(t)\|^2 + 2\|f(t)\|\|u(t)\|.$$

Do đó

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\| \le \gamma\|u(t)\| + \|f(t)\| \quad (0 \le t \le T).$$

Nhân cả hai vế với $e^{-\gamma t}$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|e^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t}\|u(t)\| \le e^{-\gamma t}\|f(t)\|,$$

suy ra

$$\left(\|u(t)\|e^{-\gamma t}\right)' \le e^{-\gamma t}\|f(t)\|.$$

Hay ta có thể viết

$$\left(\|u(s)\|e^{-\gamma s}\right)' \le e^{-\gamma s}\|f(s)\|,\ 0 \le s \le T.$$

Ta lấy tích phân hai vế từ 0 đến t ta được

$$\|u(t)\|e^{-\gamma t} - \|u(0)\| \le \int_0^t e^{-\gamma s}\|f(s)\|\,ds.$$

Nhân hai vế với $e^{\gamma t}$

$$\|u(t)\| \le \|u(0)\|e^{\gamma t} + e^{\gamma t}\int_0^t e^{-\gamma s}\|f(s)\|\,ds.$$

Suy ra bất đẳng thức (2.17). □

Chú ý rằng ta đã giả thiết $u(t) \in W_2^1$, song ở bất đẳng thức (2.17) chỉ có chuẩn của $u(t)$ trong L^2 được áp dụng. Thực tế với giả thiết $u \in L^2$ ta có thể suy ra bất đẳng thức (2.17) bằng việc sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *[1, Bổ đề 6.1] Giả sử $a \in \mathscr{B}^1, u \in L^2$ và ρ_δ là toán tử làm trơn. Khi đó hoán tử C_δ được định nghĩa như sau*

$$\begin{aligned} C_\delta u &= \rho_\delta * \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x) \left(\rho_\delta * \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ &= \left[\rho_\delta *, a \frac{\partial}{\partial x_j} \right] u. \end{aligned}$$

Ta có

(1) $\quad \|C_\delta u|\,| \leq C \|u\|$*, ở đây C là hằng số chỉ phụ thuộc vào ρ.*

(2) $\quad C_\delta u \to 0$ *trong L^2 khi $\delta \to +0$.*

Hệ quả 2.1. *Với điều kiện trên của Bổ đề, và $u \in W_2^1$, ta có*

(1) $\quad \|C_\delta u\|_1 \leq C_1 \|u\|_1 \quad (\|u\|_1 = \|u\|_{W_2^1})$,

(2) $\quad C_\delta u \to 0$ *trong W_2^1.*

Chứng minh.

Lấy $C_\delta u = u^\delta(x)$ ta có

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u^\delta(x) = \rho_\delta * \left(\frac{\partial a}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial a}{\partial x_k} \left(\rho_\delta * \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \left[\rho_\delta *, a \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Bằng việc sử dụng Bổ đề 2.1 ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 2.2. *(Friedrichs)*

Cho $u(t)$ là nghiệm của phương trình (2.1) sao cho $u(t) \in C^0([0, T], L^2)$ và $u(t) \in C^1([0, T], (W_2^1)^*)$. Khi đó bất đẳng thức năng lượng (2.17) vẫn đúng.

Chứng minh.

Với $\rho_\delta(x)$ trên $u(t)$ ta thấy rằng $u_\delta(t) = \rho_\delta \underset{(x)}{*} u(t) \in C^1([0, T], W_2^1)$. Ta có

$$\begin{aligned} C_\delta u &= \sum_k \left\{ \rho_\delta(x) \underset{(x)}{*} (A_k \frac{\partial}{\partial x_k} u) - A_k (\rho_\delta \underset{(x)}{*} \frac{\partial}{\partial x_k} u) \right\} + \{ \rho_\delta \underset{(x)}{*} Bu - B(\rho_\delta \underset{(x)}{*} u) \} \\ &= \sum_k \left[\rho_\delta *, A_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] u + [\rho_\delta *, B] u. \end{aligned}$$

Từ phương trình (2.1) ta thu được đẳng thức thỏa mãn với u_δ như sau. Trước tiên ta xét với $\rho_\delta *$ trong vế trái của phương trình (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\delta = \sum_k \rho_\delta \underset{(x)}{*} \left(A_k \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) + \rho_\delta \underset{(x)}{*} Bu + \rho_\delta \underset{(x)}{*} f,$$

vì thế

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\delta = \sum_k A_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_\delta + Bu_\delta + f_\delta + C_\delta u, \tag{2.19}$$

ở đây

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\delta * u(t)\right) = \rho_\delta \underset{(x)}{*} \frac{\partial u}{\partial t},$$

sau đó ta áp dụng Định lý 2.1 vào công thức (2.19) ta được

$$\|u_\delta(t)\| \le e^{\gamma t}\|u_\delta(0)\| + \int\limits_0^t e^{\gamma(t-s)}\{\|f_\delta(s)\| + \|C_\delta u(s)\|\}\, ds.$$

Mặt khác, từ Bổ đề 2.1 ta có $\|C_\delta u(s)\| \to 0 \quad (\delta \to 0)$. Bây giờ ta áp dụng Định lý Lebesgue về giới hạn để tính kết của quả trên; tích phân trong vế phải tiến về

$$\int\limits_0^t e^{\gamma(t-s)}\|f(s)\|\, ds$$

khi $\delta \to 0$.

Như vậy ta đã chứng minh bất đẳng thức (2.17) bằng phương pháp làm trơn và tiến tới giới hạn. □

2.3.2 Toán tử A trong không gian L^2

Bây giờ chúng ta giả sử rằng

$$M[u] \equiv \frac{\partial}{\partial t}u - \sum_{k=1}^n A_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}u - B(x)u = f(x,t)$$

có tất cả các hệ số không phụ thuộc vào t, và A_k cũng là các ma trận Hermite. Hơn thế nữa ta giả sử

$$A_k(x) \in \mathscr{B}^1 \quad \text{với } k = 1, 2, ...n.$$

Ta đặt

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + B(x), \tag{2.20}$$

và

$$\mathscr{D}(A) = \{u; u \in L^2, Au \in L^2\},$$

là miền xác định của A.

Định lý 2.3. *Tồn tại hằng số dương β và hằng số dương ε_0 đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức sau là đúng với mọi λ, $|\lambda| \le \varepsilon_0$*

$$\|(I - \lambda A)u\| \ge (1 - \beta\,|\lambda|)\,\|u\|\,, \forall u \in \mathscr{D}(A). \tag{2.21}$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh (2.21) cho trường hợp $u \in W_2^1 \subset \mathscr{D}(A)$. Ta có

$$\begin{aligned}\|(I - \lambda A)u\|^2 &= ((I - \lambda A)u, (I - \lambda A)u)\\ &= \|u\|^2 - \lambda\{(Au, u) + (u, Au)\} + \lambda^2\,\|Au\|^2\,.\end{aligned}$$

Từ tính đối xứng của A_k, sử dụng tính chất (2.18) và thế (2.20) vào biểu thức trên ta có

$$\begin{aligned}(u, Au) = \left(u, \sum_k A_k\frac{\partial}{\partial x_k}u + Bu\right) &= \sum_k\left(u, A_k\frac{\partial}{\partial x_k}u\right) + (u, Bu)\\ &= -\sum_k\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(A_k(x)u), u\right) + (u, Bu).\end{aligned}$$

Do đó tồn tại hằng số dương β với

$$\|(I - \lambda A)u\|^2 \ge (1 - \beta\,|\lambda|)\,\|u\|^2\,.$$

Vì vậy tồn tại ε_0 đủ nhỏ sao cho

$$\|(I - \lambda A)u\| \geq (1 - \beta |\lambda|) \|u\|, \quad \forall |\lambda| \leq \varepsilon_0.$$

Ta chỉ ra công thức (2.21) là đúng đối với $u \in \mathscr{D}(A)$ tùy ý. Sử dụng toán tử làm trơn ρ_δ, ta có

$(I - \lambda A)(\rho_\delta * u) = \rho_\delta * (I - \lambda A)u - \lambda\{A(\rho_\delta * u) - \rho_\delta * (Au)\}$.

Từ Bổ đề 2.1 ta có

$C_\delta u = A(\rho_\delta * u) - \rho_\delta * (Au) \to 0$ trong L^2 $(\delta \to +0)$.

Vì $\rho_\delta * u \in W_2^1$, ta thấy

$$\|(I - \lambda A)(\rho_\delta * u)\| \geq (1 - \beta |\lambda|) \|\rho_\delta * u\|.$$

Nếu $\delta \to +0$ ở cả hai vế của bất đẳng thức trên thì bất đẳng thức này tiến tới các số hạng của hai vế (2.21) tương ứng. Vậy ta kết luận (2.21) đúng với $u \in \mathscr{D}(A)$. $\square$

Định lý 2.4. *Toán tử $(I - \lambda A)$ $(\lambda \neq 0, |\lambda| \leq \varepsilon$, với ε là một số dương đủ bé, là một song ánh từ $\mathscr{D}(A)$ vào L^2.*

Chứng minh.

1) Trước hết ta chứng minh A được xác định ở công thức (2.20) là một toán tử đóng. (Ta nhắc lại khái niệm toán tử đóng.A là toán tử đóng nếu $u_m \in \mathscr{D}(A), u_m \to u, Au_m \to v$ thì $u \in \mathscr{D}(A)$ và $Au = v$.) Thực chất, từ $u_n \to 0$ nó kéo theo rằng $Au \to 0$ trong $({W_2}^1)^*$ và nếu $Au_n \to v_0$ trong L^2 thì $v_0 = 0$ vì đơn ánh từ $L^2 \to ({W_2}^1)^*$ thực chất là một song ánh. Ở đây $({W_2}^1)^*$ là không gian đối ngẫu của không gian ${W_2}^1$.

Ta chứng minh rằng $(I - \lambda A)\mathscr{D}(A)$ là không gian đóng trong L^2. Thật vậy, ta có dãy $u_m \subset \mathscr{D}(A)$ sao cho $(I - \lambda A)u_m \to v_0$. Khi đó từ công thức (2.21) ta có $\{u_m\}$ là một dãy Cauchy. Do đó, $u_m \to u_0 \in L^2$ và do đó

Au_m cũng có giới hạn. Từ A là một toán tử đóng nên ta có $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ và $Au_n \to Au_0$. Nghĩa là $v_0 = (I - \lambda A)u_0$.

2) Im$(I - \lambda A)$ là trù mật trong L^2, vì nếu không, tồn tại $\psi \neq 0$ ($\in L^2$) và $((I - \lambda A)u, \psi) = 0, \forall u \in \mathscr{D}(A)$. Điều này đúng với $u \in \mathscr{D}$, do đó

$$(I - \lambda A^*)\psi = 0; \quad A^*\psi = -\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(A_k\psi) + B^*\psi.$$

Mặt khác, $A^*\psi \in L^2$. Từ

$$A^*\psi = -\sum A_k \frac{\partial}{\partial x_k}\psi - \sum \frac{\partial A_k}{\partial x_k}\psi + B^*\psi,$$

ta có $\psi \in \mathscr{D}(A^*)$. Đối với $(I - \lambda A^*)$ ta cũng thu được bất đẳng thức cùng dạng với công thức (2.21) được thiết lập với $|\lambda| \leq \varepsilon'$. Suy ra, $\psi = 0$ điều này mâu thuẫn (với $\psi \neq 0$).
Do đó nếu ta đặt $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, \varepsilon')$ trong mệnh đề này thì điều này kéo theo $(I - \lambda A)\mathscr{D}A = L^2$ từ kết quả (1) và (2) trên. □

2.3.3 Sự tồn tại duy nhất nghiệm trong L^2.

Định lý 2.5. *Giả sử các ma trận $A_k(x)$ là Hermite và $A_k(x) \in \mathscr{B}^1, B(x) \in \mathscr{B}^0$. Giả sử $u_0(x) \in L^2, f(t) \in C^0([0,T], L^2)$. Khi đó bài toán Cauchy (2.1) và (2.2) có duy nhất nghiệm $u(x,t) \in C^0([0,T], L^2) \cap C^1([0.T], (W_2^1)^*)$ đồng thời bất đẳng thức năng lượng (2.17) được thỏa mãn.*

Chứng minh. Hệ phương trình (2.1) có thể viết được dưới dạng phương trình vi phân thường sau đây trong không gian L^2

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \tag{2.22}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.23}$$

Để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (2.22), (2.23), ta sẽ chứng minh toán tử A là toán tử sinh của nửa nhóm $\{T_t\}$ nào đó. Theo Định lý 2.4 có $(I-\lambda A)$ là song ánh nên tồn tại toán tử nghịch đảo $(I-\lambda A)^{-1}$ ta viết lại công thức (2.21) như sau

$$\left\|(I-\lambda A)^{-1}u\right\| \leq \frac{1}{1-\beta\,|\lambda|}\,\|u\|\,,\ |\lambda| < \varepsilon_0. \tag{2.24}$$

Mặt khác nếu ta đặt $\mu = \lambda^{-1}$ ta có,

$$\begin{aligned}(I-\lambda A)^{-1} &= \left[\lambda(\lambda^{-1}I - A)\right]^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}I-A)^{-1}\\ &= \mu(\mu I - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Do đó

$$\left\|(\mu I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\mu|\,(1-\beta\,|\lambda|)} = \frac{1}{(|\mu|-\beta)},$$

với $|\mu| \geq \frac{1}{\varepsilon_0}$. Suy ra thỏa mãn giả thiết của Định lý Hille-Yosida, vậy tồn tại duy nhất nửa nhóm $\{T_t\}$ với A là toán tử sinh. Cho $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ $(\subset L^2)$ và hàm số $f(t)$, $Af(t) \in C^0([0,T], L^2)$ tồn tại duy nhất nghiệm $u(t) \in C^1([0,T], L^2)$. Song ta không biết $Af(t)$ có thuộc $C^0([0,T], L^2)$ hay không.

Để khắc phục điều trên ta giả sử $u_0 \in W_2^1$ $(\subset \mathscr{D}(A))$ và $f(t) \in C^1([0,T], W_2^1)$. Khi đó giả thiết của Định lý 2.5 được thỏa mãn.

Bây giờ với u_0 bất kì và $f(t)$ mà thỏa mãn giả thiết của Định lý, chúng ta có thể sử dụng toán tử làm trơn ρ_δ để có $(u_0)_\delta = \rho_\delta * u_0$ và $f_\delta(t) = \rho_\delta * f(t)$. Điều này cũng thỏa mãn các giả thiết. Do đó tồn tại nghiệm $u_\delta(t) \in C^1([0,T], L^2)$ Nhưng nếu như áp dụng bất đẳng thức (2.17) vào $u_\delta(t) - u'_\delta(t)$ khi đó cố định số $T \quad (>0)$. Ta có

$$\max_{0\leq t\leq T}\|u_\delta(t) - u_{\delta'}(t)\|_1 \leq C(T)\left[\left\|u_0^{(\delta)} - u_0^{(\delta')}\right\|_1 + \int\limits_0^T \|f_\delta(t) - f_{\delta'}(t)\|_1\,dt\right].$$

Do đó, khi $\delta \to +0, \{u_\delta(t)\}$ là dãy Cauchy trong $C^0([0,T], L^2)$ nghĩa là

$$u_\delta(t) \to u(t) \in C^0([0,T], L^2).$$

Mặt khác nếu ta áp dụng quá trình lấy giới hạn với

$$u_\delta(t) = {u_0}^{(\delta)} + \int_0^t \{Au_\delta(s) + f_\delta(s)\}\mathrm{ds},$$

ta được

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \{Au(s) + f(s)\}\mathrm{ds},$$

ở đây phép lấy tích phân được thực hiện với tô pô của L^2. Từ đây

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t)$$

là đúng theo nghĩa của tô pô trong L^2. □

2.4 Bài toán Cauchy cho hệ phương trình đối xứng cấp một trong không gian W_2^1

2.4.1 Bất đẳng thức năng lượng trong không gian W_2^1.

Định lý 2.6. *Giả sử hệ phương trình (2.1) có nghiệm $u \in C^0([0,T], W_2^1)$ và $u \in C^1([0,T], L^2)$. Giả sử $A_k(x) \in \mathscr{B}^2$ là các ma trận Hermite, $B(x) \in \mathscr{B}^1$. Khi đó ta có bất đẳng thức năng lượng với chuẩn trong W_2^1 như sau*

$$\|u(t)\|_1 \leq e^{(\gamma_1 t)} \|u(0)\|_1 + \int_0^t e^{\{\gamma_1(t-s)\}} \|f(s)\|_1 \, ds, \tag{2.25}$$

Chứng minh. Trước tiên ta cần ta chứng minh (2.25) với điều kiện mạnh hơn sau đây đối với $u(t) : u \in C^0([0,T], W_2^2)$ và $u \in C^1([0,T], W_2^1)$.

Nếu ta tác động $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = D_i$ lên

$$\frac{d}{dt}u(t) = A\,u(t) + f(t),$$

thì ta được

$$\frac{d}{dt}D_i u(t) = A(D_i u) + (D_i A)u + D_i f \quad (i = 1, 2, 3, ..., n),$$

ở đây

$$D_i A = \sum (D_i A_k)\frac{\partial}{\partial x_k} + D_i B.$$

Nếu $f \in C^0([0, T], W_2^1)$, chúng ta có thể áp dụng bất đẳng thức năng lượng (2.17) với $D_i u(t)$. Bây giờ ta có

$$\frac{d}{dt}\left\|D_i u(t)\right\|^2 \leq \gamma' \left\|D_i u(t)\right\|^2 + 2\left\|D_i u(t)\right\|(||D_i f(t)\| + C\left\|u(t)\right\|_1).$$

Với kết quả này ta xét

$$\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|^2 \leq \gamma' \left\|u(t)\right\|^2 + 2\left\|u(t)\right\| \cdot \left\|f(t)\right\|$$

và

$$\left\|u(t)\right\|_1{}^2 = \left\|u(t)\right\|^2 + \sum \left\|D_i u(t)\right\|^2.$$

Ta có

$$\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_1{}^2 \leq 2\gamma_1 \left\|u(t)\right\|_1{}^2 + 2\left\|u(t)\right\|_1 \cdot \left\|f(t)\right\|_1.$$

Từ điều này với $0 \leq t \leq T$ ta có

$$\left\|u(t)\right\|_1 \leq e^{(\gamma_1 t)}\left\|u(0)\right\|_1 + \int_0^t e^{\{\gamma_1(t-s)\}}\left\|f(s)\right\|_1 \mathrm{ds}, \tag{2.26}$$

ở đây γ_1 xác định theo T.

Sau đó công thức (2.26) cũng được chứng minh cho trường hợp u trong giả thiết của Định lý 2.6 bằng phương pháp làm trơn. $\square$

2.4.2 Toán tử A trong không gian W_2^1

Xét như miền xác định của A như sau

$$\mathscr{D}(A) = \{u; u \in W_2^1, Au \in W_2^1\}. \tag{2.27}$$

Mặt khác đối với tính trơn của các hệ số, ta giả sử các ma trận $A_k(x)$ và $B(x)$ thảo mãn các điều kiện

$$A_k \in \mathscr{B}^2, \quad B \in \mathscr{B}^1. \tag{2.28}$$

Định lý 2.7. *Giả sử miền xác định $\mathscr{D}(A)$ như (2.27), các ma trận A_k là Hermite và thỏa mãn (2.28), và $u \in \mathscr{D}(A)$. Khi đó bất đẳng thức sau được thỏa mãn trong W_2^1*

$$\|(I - \lambda A)u\|_1 \geq (1 - \beta_1 |\lambda|) \|u\|_1 \quad (\beta_1 > 0, \forall \lambda : |\lambda| < \varepsilon_1), \tag{2.29}$$

trong đó β_1 là số dương nào đó, ε_1 là số dương đủ nhỏ.
Chứng minh.
Chứng minh tương tự như trong trường hợp L^2. □

Để chứng minh Định lý 2.8 dưới đây, ta cần chứng minh hai bổ đề sau

Bổ đề 2.2. *[1, Mệnh đề 2.12] Giả sử f là hàm thuần nhất có bậc $-n$, tức là $f(\lambda(x)) = \lambda^{-n} f(x)$, $\forall \lambda \geq 0$, và thỏa mãn các điều kiện sau $\int\limits_{|x|=1} f(x) dS_x = 0$, ở đây $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Khi đó $F[v.p.f(x)](\xi) = K(\xi)$ là hàm thuần nhất bậc 0 và $\int\limits_{|\xi|=1} K(\xi) dS_\xi = 0$ ở đây $K \in C^m(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ $(m = 0, 1, 2, ...)$, trong đó tích phân trong biến đổi Fourier hiểu theo nghĩa giá trị chính.*

Bổ đề 2.3. *Cho $a \in \mathscr{B}^2$, và toán tử giả vi phân Λ. Khi đó hoán tử $Cu = (a(x)\Lambda - \Lambda a(x))\, u$ là một toán tử bị chặn trong L^2.*

Chứng minh.

Để chứng minh điều này ta chỉ cần xét trường hợp $u \in \mathscr{D}$. Ta viết

$$\begin{aligned}(Cu)(x) &= \sum_j a(x)R_j\frac{\partial}{\partial x_j}u - R_j\frac{\partial}{\partial x_j}(a(x)u)\\ &= \sum_j (a(x)R_j - R_j a(x))\frac{\partial}{\partial x_j}u - \sum_j R_j\frac{\partial a}{\partial x_j}u.\end{aligned}$$

hạng tử cuối là một toán tử bị chặn do vậy ta chỉ cần kiểm tra hạng tử đầu.

Xét công thức (1.15), ta đặt

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(x) &= \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} \{a(x)-a(y)\}R_j(x-y)\frac{\partial}{\partial y_j}u(y)\,dy\\ &= \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} [a(x)-a(y)]R_j(x-y)u(y)cos\gamma_j\,dS_\varepsilon\\ &+ \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{\partial a}{\partial y_j}(y)R_j(x-y)u(y)\,dy\\ &+ \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} [a(x)-a(y)]\left(\frac{\partial}{\partial x_j}R_j\right)(x-y)u(y)\,dy.\end{aligned}$$

Nếu ta cho $\varepsilon \to +0$ thì số hạng đầu tiên tiến tới một hàm có thể đánh giá ước lượng bởi $C\,|a(x)|_1\,|u(x)|$ do dó chuẩn trong L^2 của số hạng đầu tiên được ước lượng bởi $C\,|a(x)|_1 \cdot \|u\|$. Số hạng thứ hai ta có thể viết là $v.p.R_j(x) * a_{x_j}(x)u(x)$. Cuối cùng ta ước lượng số hạng thứ ba, ta viết tách thành hai tích phân như sau

$$\int\limits_{\varepsilon\leq|x-y|\leq 1} dy + \int\limits_{|x-y|\geq 1} dy,$$

ở đây tích phân thứ hai không thể vượt quá

$$2\,|a(x)|_0 \left|\left[\frac{\partial}{\partial x_j}R_j(x)\right]_{|x|\geq 1}\right| * |u(x)|$$

về giá trị tuyệt đối của nó. Mặt khác,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} R_j(x) = 0\,(|x|^{-n-1}),$$

do vậy tổng của các số hạng có thể ước lượng bởi $C'\,|a(x)|_0\,\|u\|$ với chuẩn trong L^2. Nếu ta đặt $a(x) - a(y) = \sum a_{x_i}(x)(x_i - y_i) + b(x,y)$, thì từ việc $|b(x,y)| \le |b|_2\,|x-y|^2$,

ta có ước lượng

$$\left|\sum_i a_{x_i}(x) \int\limits_{\varepsilon \le |x-y| \le 1} (x_i - y_i)\frac{\partial R_j}{\partial x_j}(x-y)u(y)\,dy\right|$$
$$+ |a|_2 \int\limits_{|x-y|\le 1} |x-y|^2 \left|\frac{\partial R_j}{\partial x_j}(x-y)\right| |u(y)|\,dy.$$

Số hạng thứ hai của biểu thức này cũng không có vấn đề gì nên ta chỉ kiểm tra số hạng đầu. Thấy $x_j \dfrac{\partial R_j(x)}{\partial x_j}$ là hàm số thuần nhất bậc $(-n)$ và trung bình tích phân của nó là 0. Ta phải chỉ ra rằng thực chất biến đổi Fuorier của $v.p. \left[x_i \dfrac{\partial R_j(x)}{\partial x_j}\right]_{|x|\le 1}$ là một hàm bị chặn. Để thấy điều này ta đặt $x_i \dfrac{\partial R_j(x)}{\partial x_j} = K(x)$. Vì trung bình hình cầu của $K(\xi)$ là 0, ta có

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon \le |x| \le 1} e^{-2\pi i x\xi} K(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\Omega} K(\omega)\,d\omega \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{(-2\pi i r\rho cos\gamma)}}{r} dr,$$
$$= \int\limits_{\Omega} K(\omega) d(\omega) \int\limits_{0}^{1} \frac{e^{(-2\pi i r\rho cos\gamma)}}{r} dr.$$

Từ điều này ta thấy nó bị chặn với $|\xi| = \rho < 1$.

Tiếp theo chúng ta chứng minh bị chặn khi $|\xi| \to +\infty$ để làm điều này ta dùng Bổ đề 2.2 ta có $F\,[v.p.K(x)]$ là bị chặn, do đó ta phải chứng minh $F\left[(K(x))_{|x|\geq 1}\right]$ là bị chặn trong $|\xi| \geq 1$. Để kết thúc trước hết ta xét hàm $\alpha(r) \in C^\infty$ với $\alpha(r) = 0$ trong $r \leq 2$ và bằng 1 trong $r \geq 3$. Ta thấy rằng,

$$F\left[(K(x))_{|x|\geq 1}\right] = F\left[\alpha(r)K(x)\right] + F\left[(1-\alpha(r))(K(x))_{|x|\geq 1}\right].$$

Ta thấy số hạng thứ hai là một hàm bị chặn theo ξ, mặt khác số hạng đầu bị chặn vì

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\{a(r)K(x)\}\right]$$

là một hàm bị chặn, là biến đổi Fourier của một hàm trong L^1, vì thế $2\pi i\xi_j \times F\left[a(r)K(x)\right]$ $(j = 1, 2, ...n)$ là bị chặn. Cuối cùng ta thấy nó bị chặn với $|\xi| \geq 1$. $\square$

Định lý 2.8. *Giả sử miền xác định của A được cho bởi (2.27), và giả sử (2.28) được thỏa mãn. Khi đó $(I - \lambda A)$với$|\lambda| < \varepsilon_1$ là một song ánh từ $\mathscr{D}(A)$ vào W_2^1.*

Chứng minh. Theo Định lý 2.4 ta có ảnh của $(I - \lambda A)\mathscr{D}(A)$ là đóng, vì thế để chứng minh ảnh này trùng với W_2^1 chúng ta chỉ ra tính trù mật của nó.

Giả sử ảnh của $(I - \lambda A)\mathscr{D}(A)$ không trù mật, khi đó tồn tại một $\psi_1 \in {W_2}^1 \quad (\psi_1 \neq 0)$ với

$$((\Lambda + 1)(I - \lambda A)u, (\Lambda + 1)\psi_1) = 0 \quad (u \in \mathscr{D}(A)),$$

trong đó Λ là toán tử giả vi phân như mục 1.6.3.

Ta đặt $(\Lambda + 1)\psi_1 = \psi \in L^2$, vì thế

$$\psi \neq 0. \tag{2.30}$$

Ta có

$$(I - \lambda A^*)(\Lambda + 1)\psi = 0.$$

Từ mối quan hệ này ta có thể viết lại như sau

$$(\Lambda+1)\left[\psi+\lambda\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(A_k\psi)\right]+\lambda(C\psi-B^*(x)\Lambda\psi)=0,$$

$$-C=\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\Lambda A_k(x)-A_k(x)\Lambda),$$

nghĩa là

$$\psi+\lambda\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(A_k(x)\psi)+\lambda K\psi=0, \tag{2.31}$$

ở đây $K=(\Lambda+1)^{-1}[C-B^*(x)(\Lambda+1)]$, và $((\Lambda+1)^{-1}u\widehat{)}(\xi)=(|\xi|+1)^{-1}\widehat{u}(\xi)$. Ta có K là một toán tử bị chặn trong L^2. Thật vậy, $(\Lambda+1)^{-1}C$ là bị chặn vì từ Bổ đề 2.3 $(\Lambda+1)^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}, (\Lambda A_k(x)-A_k(x)\Lambda)$ là những toán tử bị chặn. Với $u,v\in L^2$, ta có

$$\begin{aligned}\left|(u,(\Lambda+1)^{-1}B^*\Lambda v)\right| &= \left|(B(\Lambda+1)^{-1}u,\Lambda v)\right| \le \left\|B(\Lambda+1)^{-1}u\right\|_1\|\Lambda v\|_*\\ &\le \|B(x)\|\left\|(\Lambda+1)^{-1}u\right\|_1\|v\|_{L^2}\\ &\le C\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Với $\|\cdot\|_*$ là chuẩn trong không gian đối ngẫu của không gian W_2^1 và $\|B(x)\|$ là chuẩn của toán tử $B(x): {W_2}^1\to {W_2}^1$, vì thế $(\Lambda+1)^{-1}B^*(x)\Lambda$ cũng bị chặn. Từ điều này và công thức (2.31) chúng ta có thể áp dụng bất đẳng thức (2.21). Vế trái của đẳng thức (2.31) với chuẩn trong L^2 lớn hơn

$$(1-\beta'|\lambda|)\|\psi\|-|\lambda|\|K\|\|\psi\|=\{1-(\beta'+\|K\|)|\lambda|\}\|\psi\|.$$

Do đó, nếu $|\lambda|<(\beta'+\|K\|)^{-1}$ thì $\psi=0$, điều này trái với giả thiết (2.30). Vậy $(I-\lambda A)$ có ảnh của nó là đóng và trù mật trong ${W_2}^1$. Vậy $(I-\lambda A)$ là một song ánh từ $\mathscr{D}(A)$ vào ${W_2}^1$. $\square$

2.4.3 Định lý tồn tại duy nhất nghiệm trong W_2^1

Định lý 2.9. *Giả sử trong phương trình (2.1), $A_k(x)$ là ma trận Hermite, và thỏa mãn $A_k \in \mathscr{B}^2$, $B \in \mathscr{B}^1$. Giả sử cho trước giá trị ban đầu bất kì $u_0 \in W_2^1$, và $f(t) \in C^0([0,T], W_2^1)$ (với $f(t)$ là vế phải của hệ phương trình (2.1). Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $u(t)$ của phương trình (2.1) sao cho thỏa mãn $u(t) \in C^0([0,T], {W_2}^1)$ và $u(t) \in C^1([0,T], L^2)$. Hơn nữa bất đẳng thức năng lượng (2.25) vẫn đúng.*

Chứng minh. Từ bất đẳng thức (2.29) và Mệnh đề 2.4 thì ta có thể kiểm tra điều kiện của định lý Hille-Yosida như sau (với $E = W_2^1$).

Ta luôn chọn được số ε_1 trong W_2^1 như sau, từ Định lý 2.7 ta có bất đẳng thức (2.29), vì theo Định lý 2.8 ta có toán tử $(I - \lambda A)$ là một song ánh nên luôn tồn tại ánh xạ ngược $(I - \lambda A)^{-1}$, ta viết lại bất đẳng thức (2.29) như sau

$$\left\|(I - \lambda A)^{-1} u\right\|_1 \le \frac{1}{1 - \beta_1 |\lambda|} \|u\|_1 .$$

Mặt khác nếu ta đặt $\mu_1 = \lambda^{-1}$ thì,

$$\begin{aligned}(I - \lambda A)^{-1} &= \left[\lambda(\lambda^{-1} I - A)\right]^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda^{-1} I - A)^{-1} \\ &= \mu_1(\mu_1 I - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Do đó

$$\left\|(\mu_1 I - A)^{-1}\right\|_1 \le \frac{1}{|\mu_1| (1 - \beta_1 |\lambda|)} = \frac{1}{(|\mu_1| - \beta_1)},$$

với $|\mu_1| \ge \frac{1}{\varepsilon_1}$. Suy ra thỏa mãn giả thiết của Định lý Hille-Yosida. Giả sử $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ $(\subset W_2^1)$ và hàm số $f(t)$, $Af(t) \in C^0([0,T], W_2^1)$. Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $u(t) \in C^1([0,T], W_2^1)$. Song ta không biết $Af(t)$ có thuộc vào $C^0([0,T], W_2^1)$. Để khắc phục điều trên ta giả sử $u_0 \in W_2^2$ $(\subset \mathscr{D}(A))$ và $f(t) \in C^1([0,T], W_2^2)$. Khi đó giả thiết của Định lý 2.9 được thỏa mãn.

Bây giờ với u_0 bất kì và $f(t)$ mà thỏa mãn giả thiết của Định lý, chúng ta có thể sử dụng toán tử làm trơn ρ_δ để có $(u_0)^\delta = \rho_\delta * u_0$ và $f_\delta(t) = \rho_\delta * f(t)$. Điều này cũng thỏa mãn các giả thiết. Do đó tồn tại nghiệm $u_\delta(t) \in C^1([0,T], W_2^1)$ Nhưng nếu như áp dụng bất đẳng thức (2.25) vào $u_\delta(t) - u'_\delta(t)$ khi đó cố định số T (> 0). Ta có

$$\max_{0\le t\le T} \|u_\delta(t) - u_{\delta'}(t)\|_1 \le C(T)\left[\left\|u_0^{(\delta)} - u_0^{(\delta')}\right\|_1 + \int\limits_0^T \|f_\delta(t) - f_{\delta'}(t)\|_1 \, dt\right].$$

Do đó, khi $\delta \to +0, \{u_\delta(t)\}$ là dãy Cauchy trong $C^0([0,T], {W_2}^1)$ nghĩa là

$$u_\delta(t) \to u(t) \in C^0([0,T], W_2^1).$$

Mặt khác nếu ta áp dụng quá trình lấy giới hạn trong công thức

$$u_\delta(t) = {u_0}^{(\delta)} + \int\limits_0^t \{Au_\delta(s) + f_\delta(s)\}\mathrm{ds},$$

thì ta được

$$u(t) = u_0 + \int\limits_0^t \{Au(s) + f(s)\}\mathrm{ds},$$

ở đây phép lấy tích phân được thực hiện với tô pô của L^2. Từ đây

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t)$$

là đúng theo nghĩa của tô pô trong L^2.

□

Kết luận

Luận văn đã trình bầy các vấn đề chính sau đây:

- Luận văn đã mô tả một số không gian hàm, toán tử làm trơn, nửa nhóm liên tục và toán tử sinh của nó, đã nêu và chứng minh Định lý Hille-Yosida, phát biểu bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường trong không gian Banach, đưa vào một số toán tử giả vi phân.
- Luận văn xét hệ phương trình đối xứng cấp một, trình bầy chứng minh các bất đẳng thức năng lượng trong không gian L^2 và W_2^1. Trên cơ sở ứng dụng Định lý Hille-Yosida, Luận văn đã chứng minh tính giải được duy nhất của bài toán Cauchy cho phương trình đối xứng cấp một trong không gian L^2 và W_2^1.

Tài liệu tham khảo

[1] Sigeru Mizohata, (1973), *The theory of partial differential equations*, Cambridge at the University Press

[2] François Treves, (1975), *Basic linear partial differential equations*, Academic Press