Mục lục

Ký hiệu toán học **3**

Mở đầu **4**

1 Cơ sở toán học **7**

1.1 Bài toán ổn định 7

1.1.1 Bài toán ổn định 7

1.1.2 Phương pháp hàm Lyapunov 9

1.2 Bài toán ổn định cho hệ phương trình vi phân có trễ 10

1.2.1 Bài toán ổn định cho hệ có trễ 10

1.2.2 Bài toán ổn định cho hệ suy biến có trễ 12

1.3 Các mệnh đề bổ trợ 13

2 Ổn định mũ hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến với trễ hằng **15**

2.1 Ổn định mũ hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến với trễ hằng 15

2.2 Ví dụ số minh họa 21

3 Ổn định mũ hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên

với nhiễu phi tuyến **24**

3.1 Ổn định mũ hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến 24

3.2 Ví dụ số 40

Kết luận **43**

Tài liệu tham khảo **44**

Ký hiệu toán học

$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid n chiều với chuẩn $\|.\|$
$\langle x, y\rangle$	Tích vô hướng của hai vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{C}^{m\times n}$	Không gian các ma trận thực, phức cỡ $(m \times n)$
$0_{n\times r}$	Ma trận 0 có chiều $n \times r$
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A
A^T=A	Ma trận đối xứng
A^*	Ma trận liên hợp chuyển vị của ma trận A
$A \geq 0$, $A > 0$	Ma trận nửa xác định dương, xác định dương
$\|\|A\|\|$	Chuẩn Euclid cảm sinh của $A \in C^{m\times n}$
	$\|\|A\|\| = max_i[\lambda_i(A^*A)]^{1/2}$
$\lambda_{\min}(A)$	$\min\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\max}(A)$	$\max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\mu(A)$	Độ lớn của ma trận $A \in C^{m\times n}$: $\mu(A) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A^* + A)$
$*$	Các phần tử đối xứng trong ma trận
$C^1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Không gian Banach các hàm liên tục trên $[-h, 0]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|\varphi\| = \sup\limits_{-h\leq t\leq 0}\{\|\varphi(t)\|, \|\dot{\varphi}(t)\|\}$.
$\mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$	Ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính là $a_1, \ldots, a_n$.

Mở đầu

Lý thuyết ổn định các hệ phương trình vi phân là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng, có nhiều ứng dụng trong thực tế kĩ thuật. Các công trình nghiên cứu về nó được bắt đầu từ những năm cuối thế kỉ XIX bởi nhà toán học người Nga A. M. Lyapunov khi ông nghiên cứu tính ổn định của một chuyển động. Do lý thuyết ổn định được nghiên cứu xuất phát từ những đòi hỏi thực tiễn và nhu cầu phát triển của một số ngành khoa học nên đã hơn một thế kỷ trôi qua nhưng lý thuyết ổn định vẫn là một lĩnh vực toán học được quan tâm và có nhiều kết quả được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như cơ học, vật lý toán, khoa học kỹ thuật công nghệ, sinh thái học ...

Có hai phương pháp chính để nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân, đó là phương pháp số mũ đặc trưng Lyapunov (phương pháp phổ hay phương pháp thứ nhất của Lyapunov) và phương pháp hàm Lyapunov (còn gọi là phương pháp thứ hai của Lyapunov). Trong đó phương pháp hàm Lyapunov là một phương pháp hữu hiệu để nghiên cứu sự ổn định và ổn định hóa của hệ phương trình vi phân. Hầu hết các quá trình vật lý, sinh học, hóa học, kinh tế đều liên quan đến độ trễ thời gian. Không những thế, độ trễ thời gian còn là nguyên nhân trực tiếp dẫn đến tính không ổn định và hiệu suất kém của các hệ động lực. Do đó lớp hệ phương trình vi phân có trễ thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học. Mặt khác, các bài toán xuất phát từ thực tế thường được mô tả bởi các hệ phương trình vi phân suy biến. Vì thế, giải quyết được bài toán về sự ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến có trễ sẽ góp phần

giải quyết được hàng loạt các bài toán thực tiễn có tính ứng dụng cao. Vì các hệ phương trình vi phân suy biến có trễ là sự ghép thành của các hệ phương trình với ma trận trễ với các hệ phương trình đại số nên việc nghiên cứu các hệ như vậy phức tạp hơn việc nghiên cứu các hệ phương trình vi phân thông thường. Đặc trưng chính của hệ phương trình vi phân suy biến có trễ là phương trình đặc trưng của các hệ đó có vô hạn nghiệm nên việc kiểm tra tính ổn định nghiệm của hệ suy biến có trễ rất khó khăn. Cũng giống như với hệ phương trình vi phân thông thường, người ta cũng dùng hai phương pháp đã nêu ở trên để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ suy biến có trễ.

Trong luận văn này chúng tôi sử dụng hai phương pháp đó để nghiên cứu tính ổn định cho một số lớp hệ phương trình vi phân suy biến có trễ. Đó là hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến có trễ hằng và hệ phương trình suy biến có trễ biến thiên và có nhiễu phi tuyến. Luận văn gồm phần mở đầu, phần kết luận, danh mục tài liệu tham khảo và ba chương với nội dung như sau.

Chương một trình bày một số kiến thức cơ sở về bài toán ổn định, phương pháp hàm Lyapunov, bài toán ổn định cho hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân có trễ. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi cũng trình bày lại một số mệnh đề bổ trợ được sử dụng trong việc chứng minh các định lý ở chương sau.

Chương hai trình bày về điều kiện đủ cho tính ổn định của hệ phương trình vi phân suy biến với trễ hằng. Trong đó, Định lý 2.2 sử dụng phương pháp phổ để đánh giá tính ổn định cho hệ phương trình vi phân trong trường hợp trễ hằng với tốc độ mũ α. Kết quả của chương này được chúng tôi tham khảo trong bài báo [13] trong danh mục tài liệu tham khảo.

Chương ba nghiên cứu mở rộng kết quả trong bài báo [10] về tính $\alpha-$ổn định mũ của hệ phương trình vi phân suy biến với trễ biến thiên để đưa ra điều kiện đủ về tính $\alpha-$ổn định mũ của hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến có

trễ với nhiễu phi tuyến. Điều kiện này được cho dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính và các bất đẳng thức này được giải dễ dàng bằng phần mềm Matlab.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Thầy đã nghiêm khắc hướng dẫn, chỉ bảo, và truyền đạt cho tôi niềm đam mê lý thuyết ổn định và điều khiển.

Tôi xin trân trọng cảm ơn tới Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình tôi học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo sau Đại học - Viện Toán học, Phòng Tối ưu và Điều khiển, cùng toàn thể các thầy cô giáo của Viện Toán học, các anh các chị và các bạn lớp cao học K19 đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại đây.

Cuối cùng tôi muốn gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất đến bố mẹ, anh chị và cháu gái tôi, những người luôn ở bên cạnh chia sẻ và giúp đỡ tôi trong lúc tôi gặp khó khăn nhất để tôi có thể hoàn thiện luận văn này.

Hà Nội, tháng 8 năm 2013

Học viên

Nguyễn Thị Huyền Thư

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này, chúng tôi trình bày kiến thức cơ sở về tính ổn định của lớp hệ phương trình vi phân thường, hệ phương trình vi phân có trễ và hệ phương trinh vi phân suy biến có trễ. Ngoài việc trình bày lại phương pháp hàm Lyapunov, chúng tôi cũng nhắc đến một số mệnh đề bổ trợ cho việc chứng minh các định lý ổn định trong các chương tiếp theo.

1.1 Bài toán ổn định

1.1.1 Bài toán ổn định

Xét một hệ thống được mô tả bởi hệ phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

ở đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước. Giả thiết rằng hàm $f(\cdot)$ thỏa mãn điều kiện sao cho với mọi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ thì hệ (1.1) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, x_0) và nghiệm kéo dài được trên $[t_0, +\infty)$. Nghiệm này được ký hiệu là $x(t; t_0, x_0)$. Giả sử $f(t, 0) = 0$, với mọi $t \in \mathbb{R}^+$ nghĩa là ta luôn giả thiết hệ có nghiệm cân bằng $x = 0$. Khi đó ta có các định nghĩa về tính ổn định của nghiệm như sau.

Định nghĩa 1.1 (xem [1, 15]). Nghiệm không của hệ (1.1) được gọi là

(i) *ổn định* nếu với mọi $\epsilon > 0, t_0 \geq 0$ đều tồn tại $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$ sao cho với nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ bất kỳ của hệ (1.1) thỏa mãn $\|x_0\| < \delta$ thì

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0;$$

(ii) *ổn định tiệm cận* nếu nó ổn định và với mỗi $t_0 \geq 0$, tồn tại $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ sao cho với nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ bất kỳ của hệ (1.1), nếu $\|x_0\| < \delta_0$ thì $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0$;

(iii) *ổn định mũ* nếu tồn tại các hằng số $\alpha > 0, N \geq 1$ sao cho với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}^+$, nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ bất kỳ của hệ (1.1) thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq N\|x_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0,$$

số N được gọi là hệ số ổn định Lyapunov, α được gọi là số mũ ổn định. Ngoài ra, α, N được gọi chung là các chỉ số ổn định Lyapunov.

Để ngắn gọn, thay vì nói nghiệm không của hệ (1.1) ổn định (ổn định tiệm cận, ổn định mũ) ta nói hệ (1.1) là ổn định (ổn định tiệm cận, ổn định mũ). Ngay từ những công trình đầu tiên, Lyapunov đã đưa ra tiêu chuẩn cho tính ổn định mũ của hệ tuyến tính dừng

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad t \geq 0, \tag{1.2}$$

dựa vào tính chất tập các giá trị riêng của ma trận A. Cụ thể là hệ (1.2) là ổn định mũ khi và chỉ khi phần thực của tất cả các giá trị riêng của A là âm. Tuy nhiên trong thực tế, các hệ thống thường chứa các tham số không biết trước. Chẳng hạn như ma trận A bị nhiễu thành ma trận $A + \Delta A(t)$. Vì sự phức tạp của tập phổ $\lambda(A + \Delta A(t))$, Lyapunov đã đưa ra một cách tiếp cận dựa trên dạng hàm toàn phương $V(x) = x^T Px$, trong đó P là một ma trận đối xứng, xác định

dương. Hệ (1.2) là ổn định mũ khi và chỉ khi với bất kỳ ma trận Q đối xứng, xác định dương, phương trình Lyapunov : $A^T P + PA = -Q$ có nghiệm P là ma trận đối xứng, xác định dương. Hai kết quả quan trọng này tiêu biểu cho hai phương pháp cơ bản nghiên cứu tính ổn định của một hệ phương trình vi phân. Đó là phương pháp phổ và phương pháp hàm Lyapunov. Trong luận văn này, chúng tôi sẽ sử dụng cả hai phương pháp để nghiên cứu bài toán ổn định.

1.1.2 Phương pháp hàm Lyapunov

Ta nhắc lại khái niệm hàm Lyapunov cho hệ phương trình vi phân (1.1). Cho D là lân cận mở tùy ý của 0. Kí hiệu $\mathcal{K}$ là tập hợp các hàm liên tục tăng chặt $a(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, a(0) = 0$.

Định nghĩa 1.2 (xem [1, tr. 134])**.** Hàm $V : \mathbb{R}^+ \times D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục, thỏa mãn điều kiện $V(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$, được gọi là *hàm Lyapunov* của hệ (1.1) nếu các điều kiện sau được thỏa mãn.

(i) Hàm $V(t, x)$ là hàm xác định dương theo nghĩa

$$\exists\, a \in \mathcal{K} : \quad V(t, x) \geq a(\|x\|), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D.$$

(ii) $\dot{V}(t, x(t)) := \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x(t)) \leq 0$, với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.1).

Nếu hàm $V(t, x)$ thỏa mãn thêm các điều kiện:

(iii) Tồn tại $b(\cdot) \in \mathcal{K}$ sao cho $V(t, x) \leq b(\|x\|), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D$.

(iv) Tồn tại $c(\cdot) \in \mathcal{K}$ sao cho $\dot{V}(t, x) \leq -c(\|x(t)\|)$ với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.1) thì $V(t, x)$ được gọi là *hàm Lyapunov chặt* của hệ (1.1).

Sau đây là hai định lý về tính ổn định của hệ (1.1).

Định lý 1.3 (xem [1, tr. 135])**.** *Nếu hệ* (1.1) *có hàm Lyapunov ổn định. Hơn nữa, nếu hàm Lyapunov là chặt thì hệ là ổn định tiệm cận đều.*

Định lý 1.4 ([15]). *Giả sử hệ* (1.1) *có hàm Lyapunov thỏa các điều kiện sau:*

(i) $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 > 0 : \lambda_1\|x\|^2 \leq V(t,x) \leq \lambda_2\|x\|^2, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,

(ii) $\exists\, \lambda_3 > 0 : \dot{V}(t,x(t)) \leq -2\lambda_3 V(t,x(t))$ *với mọi nghiệm* $x(t)$ *của hệ* (1.1).

Khi đó hệ (1.1) *là ổn định mũ với các chỉ số ổn định Lyapunov là* λ_3 *và* $N = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$.

1.2 Bài toán ổn định cho hệ phương trình vi phân có trễ

1.2.1 Bài toán ổn định cho hệ có trễ

Như chúng ta đã biết, hệ phương trình vi phân thường (1.1) mô tả mối quan hệ giữa biến thời gian t, trạng thái $x(t)$ của hệ thống và tốc độ thay đổi của trạng thái $x(t)$ tại cùng một thời điểm t. Tuy nhiên, trong thực tế, các quá trình xảy ra trong tự nhiên thường có sự liên quan với quá khứ và ít nhiều mang tính di truyền. Vì vậy lớp hệ phương trình vi thường không miêu tả được hết các quá trình này. Do đó, để mô tả một cách chính xác các quá trình này, người ta thường miêu tả chúng bằng các phương trình vi phân có trễ.

Giả sử h là một số thực không âm. Ký hiệu $\mathcal{C} = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ là không gian Banach các hàm liên tục trên đoạn $[-h,0]$, nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$ và chuẩn của một phần tử $\varphi \in \mathcal{C}$ được cho bởi $\|\varphi\| = \sup\limits_{-h\leq\theta\leq 0} \|\varphi(\theta)\|$. Với $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ và $x \in C([t_0-h, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$, hàm $x_t \in \mathcal{C}$ với $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ được xác định bởi $x_t(s) := x(t+s), s \in [-h,0]$. Như vậy, x_t là một quỹ đạo trên đoạn $[t-h,t]$ của hàm $x(.)$ với chuẩn trong $\mathcal{C}$ được xác định bởi $\|x_t\| := \sup\limits_{s\in[-h,0]} \|x(t+s)\|$. Cho $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}$ là một tập mở và hàm $f : D \to \mathbb{R}^n$. Một phương trình vi phân có trễ trên D là phương trình dạng [8]

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{1.3}$$

Một hàm x được gọi là nghiệm của phương trình vi phân có trễ (1.3) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sao cho $x \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n)$ với $(t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn phương trình (1.3) sao cho mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Cho trước $t_0 \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}$, ta nói $x(t_0, \varphi, f)$ là một nghiệm của phương trình (1.3) với hàm điều kiện ban đầu φ tại t_0 hoặc đơn giản là một nghiệm đi qua điểm (t_0, φ) nếu tồn tại một số $\sigma > 0$ sao cho $x(t_0, \varphi, f)$ là nghiệm của hệ (1.3) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ và $x_{t_0}(t_0, \varphi, f) = \varphi$. Khi t_0 và f đã rõ, ta viết $x(t, \varphi)$ thay cho $x(t_0, \varphi)(t)$. Sự tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu của hệ (1.3) có thể xem trong [8]. Ở đây, chúng tôi giả thiết rằng hàm $f(.)$ thỏa mãn điều kiện sao cho với mỗi điểm $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$, hệ (1.3) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, φ) và nghiệm xác định trên $[t_0, +\infty)$. Chú ý rằng khi $h = 0$, thì hệ (1.3) chính là hệ phương trình vi phân thường (1.1) đã xét trong mục trước. Ta cũng giả thiết $f(t, 0) \equiv 0$, tức là hệ (1.3) luôn có nghiệm không. Khi đó, ta cũng có các khái niệm ổn định, ổn định tiệm cận tương tự hệ phương trình vi phân thường. Tương tự, ta cũng có phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của hệ (1.3). Ta có một tiêu chuẩn ổn định cho hệ (1.3) như sau.

Định lý 1.5 ([8, 12]). *Giả sử $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$. Nếu tồn tại hàm $V : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ sao cho*

(i) $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 > 0 : \lambda_1 \|x(t)\|^2 \leq V(t, x_t) \leq \lambda_2 \|x_t\|^2$,

(ii) $\dot{V}(t, x_t) \leq 0$, *với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ* (1.3),

thì hệ (1.3) *là ổn định và nghiệm của nó là bị chặn, tức là*

$$\exists N > 0 : \|x(t_0, \varphi)(t)\| \leq N \|\varphi\|.$$

Nếu điều kiện (ii) *được thay bằng điều kiện*

(iii) $\exists\, \lambda_3 > 0 : \dot{V}(t, x_t) \leq -2\lambda_3 V(t, x_t)$, *với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ* (1.3), *thì hệ*

(1.3) *là ổn định mũ và nghiệm* $x(t_0, \varphi)(t)$ *của hệ thỏa mãn đánh giá*

$$\|x(t_0, \varphi)(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|\varphi\| e^{-\lambda_3(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0, N > 0.$$

1.2.2 Bài toán ổn định cho hệ suy biến có trễ

Xét một hệ suy biến có trễ sau:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)), \quad t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là ma trận suy biến, $\operatorname{rank} E < n$, A, A_d là các ma trận hệ số với các chiều cho trước. Khi đó, ta có các định nghĩa về sự ổn định của hệ (1.4) như sau.

Định nghĩa 1.6 ([9, 14])**.** Hệ suy biến (1.4) được gọi là *chính quy* nếu đa thức đặc trưng $\det(sE - A)$ là không đồng nhất bằng không.

Định nghĩa 1.7 ([9, 14])**.** Hệ suy biến (1.4) được gọi là *impulse-free* nếu

$$\deg \det(sE - A) = \operatorname{rank}(E).$$

Định nghĩa 1.8 ([14])**.** Hệ suy biến (1.4) được gọi là *ổn định tiệm cận* nếu với bất kỳ $\epsilon > 0$, tồn tại một số $\delta(\epsilon) > 0$ sao cho với bất kỳ hàm điều kiện ban đầu thỏa mãn $\|\varphi\| \leq \delta(\epsilon)$, nghiệm $x(t)$ của (1.4) thỏa mãn $\|x(t)\| \leq \epsilon$ với $t \leq 0$. Hơn nữa $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Định nghĩa 1.9 ([9])**.** Hệ (1.4) được gọi là *ổn định mũ* nếu tồn tại số $\alpha > 0$ và $\gamma > 0$ sao cho với bất kỳ nghiệm $x(t, \varphi)$ của hệ suy biến có trễ thỏa mãn điều kiện sau

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma \|\varphi\| e^{-\alpha t}, \quad \forall t \leq 0.$$

Chúng ta có một số mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.10 ([9, 14]). *Nếu hệ phương trình* (1.4) *là chính quy và impulse-free thì tồn tại duy nhất một nghiệm liên tục trên* $[0, +\infty]$.

Mệnh đề 1.11 ([14]). *Hệ suy biến*

$$E\dot{x}(t) = Ax(t)$$

là chính quy, impulse - free và ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu tồn tại ma trận P *sao cho*

$$EP^T = PE^T \geq 0$$

và

$$AP^T + PA^T < 0.$$

1.3 Các mệnh đề bổ trợ

Chúng tôi đưa ra một số mệnh đề sẽ được sử dụng để chứng minh các kết quả chính trong các chương tiếp theo.

Mệnh đề 1.12 (Schur complement lemma, [2, tr. 7]). *Cho các ma trận đối xứng hằng* X, Y, Z *với số chiều tương thích thỏa mãn* $X = X^T, Y = Y^T > 0$. *Khi đó,*

$$\begin{bmatrix} X & Z^T \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0$$

khi và chỉ khi $X < 0$ *và* $X + Z^T Y^{-1} Z < 0$.

Mệnh đề 1.13 ([7]). *Với bất kì ma trận đối xứng xác định dương* M, *số* $\gamma > 0$ *và hàm vectơ* $\omega : [0, \gamma] \to \mathbb{R}^n$ *khả tích, khi đó bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\left(\int_0^\gamma \omega(s)\,\mathrm{d}s\right)^T M \left(\int_0^\gamma \omega(s)\,\mathrm{d}s\right) \leq \gamma \left(\int_0^\gamma \omega^T(s) M \omega(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Mệnh đề 1.14 ([11]). *Với bất kì ma trận đối xứng xác định dương M, ma trận N bất kì có chiều thích hợp và $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta có bất đẳng thức sau là đúng*

$$2x^T Ny \leq x^T Mx + y^T N^T M^{-1} Ny.$$

Mệnh đề 1.15 (Nguyên lý Rayleigh, [3, tr. 146]). *Cho một ma trận Hermit A và một véc tơ x, đặt*

$$R(x) := \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

Nếu các giá trị riêng của ma trận Hermit A được sắp thứ tự sao cho $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ thì

$$\lambda_1 \leq R(X) \leq \lambda_n.$$

$R(x)$ nhận giá trị cực đại khi x là một véc tơ riêng tương ứng với λ_n và $R(x)$ nhận giá trị cực tiểu khi x là một véc tơ riêng tương ứng với λ_1.

Mệnh đề 1.16 (xem [10]). *Cho $h_2, \lambda, \delta_1, \delta_2$ là các số nguyên dương sao cho $\delta_1 e^{\lambda h_2} < 1$, và $f(t)$ là một hàm liên tục thỏa mãn*

$$0 \leq f(t) \leq \delta_1 \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} f(t+s) + \delta_2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Khi đó bất đẳng thức sau là đúng

$$f(t) \leq \left[\delta_1 e^{\lambda h_2} \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} f(s) + \frac{\delta_2}{1 - \delta_1 e^{\lambda h_2}}\right] e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Chương 2

Ổn định mũ hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến với trễ hằng

Nội dung của chương này là trình bày và chứng minh chi tiết điều kiện đủ cho tính ổn định mũ cho hệ phương trình vi phân suy biến với trễ hằng đã được đưa ra trong [13]. Đồng thời, chúng tôi đưa ra ví dụ số cụ thể bằng việc tự tính toán và dựa trên sự hỗ trợ của phần mềm Matlab.

2.1 Ổn định mũ hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến với trễ hằng

Xét hệ phương trình vi phân

$$E\dot{x}(t) = \tilde{A}_0 x(t) + \tilde{A}_1 x(t-\tau_1),\ \forall t \geq 0 \tag{2.1-a}$$

$$x(t) = \varphi(t), \qquad \forall t \in [-\tau_1, 0] \tag{2.1-b}$$

với $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái của hệ, $\tilde{A}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tilde{A}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, đối số trễ rời rạc τ_1 là hằng số không âm cho trước, E là ma trận vuông suy biến với

$n > r := \text{rank}(E) > 0$ và $\varphi(t)$ là hàm giá trị ban đầu.

Ta chọn hai ma trận không suy biến $Q_1 \in R^{n\times n}$ và $Q_2 \in R^{n\times n}$ sao cho

$$Q_1EQ_2 = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right].$$

Đặt

$$z(t) = Q_2^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \forall t \in [-\tau_1, 0].$$

Khi đó $Q_2z(t) = x(t)$ hay $Q_2\dot{z}(t) = \dot{x}(t)$. Thay vào $(2.1-a)$ ta có

$$EQ_2\dot{z}(t) = E\dot{x}(t) = \tilde{A}_0x(t) + \tilde{A}_1x(t-\tau_1).$$

Nhân cả hai vế của phương trình trên với Q_1 ta có

$$\begin{aligned} Q_1EQ_2\dot{z}(t) = Q_1E\dot{x}(t) &= Q_1\tilde{A}_0x(t) + Q_1\tilde{A}_1x(t-\tau_1) \\ &= Q_1\tilde{A}_0Q_2z(t) + Q_1\tilde{A}_1Q_2z(t-\tau_1). \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, đặt

$$Q_1\tilde{A}_0Q_2 = A_0 := \begin{bmatrix} A_{0,11} & A_{0,12} \\ A_{0,21} & A_{0,22} \end{bmatrix}, \quad Q_1\tilde{A}_1Q_2 = A_1 := \begin{bmatrix} A_{1,11} & A_{1,12} \\ A_{1,21} & A_{1,22} \end{bmatrix},$$

Ta có hệ $(2.1-a)$ tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} &= A_0 \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} z_1(t-\tau_1) \\ z_2(t-\tau_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{0,11} & A_{0,12} \\ A_{0,21} & A_{0,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,11} & A_{1,12} \\ A_{1,21} & A_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t-\tau_1) \\ z_2(t-\tau_1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Suy ra hệ này tương đương với hệ

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= A_{0,11}z_1(t) + A_{0,12}z_2(t) + A_{1,11}z_1(t-\tau_1) + A_{1,12}z_2(t-\tau_1), \\ 0 &= A_{0,21}z_1(t) + A_{0,22}z_2(t) + A_{1,21}z_1(t-\tau_1) + A_{1,22}z_2(t-\tau_1), \end{cases}$$

và $z(t) = Q_2^{-1}\varphi(t) := \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$ với mọi $t \in [-\tau_1, 0]$.

Chú ý 2.1. Để đảm bảo cho tính chính quy, tính impulse-free, sự tồn tại nghiệm tương thích với điều kiện ban đầu trong hệ (2.1), ta giả sử $\det(sE - \tilde{A})$ không đồng nhất bằng 0, $\deg\det(sE - A_0) = \operatorname{rank}(E)$ và

$$A_{0,21}z_1(0) + A_{0,22}z_2(0) + A_{1,21}z_1(-\tau_1) + A_{1,22}z_2(-\tau_1) = 0.$$

Bây giờ ta xét tiêu chuẩn ổn định mũ cho hệ suy biến (2.1).

Định lý 2.2 ([13]). *Hệ* (2.1) *là ổn định mũ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $\mu(A_{0,11}) + \|A_{0,12}\| + \|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\| < 0.$

(ii)
$$\frac{1}{2}\min_i \left|\lambda_i\left(A_{0,22} + A_{0,22}^*\right)\right| > \|A_{0,21}\| + \|A_{1,21}\| + \|A_{1,22}\|.$$

Chứng minh. Đặt

$$f_1(x) := \mu(A_{0,11}) + x + \|A_{0,12}\| + e^{\tau_1 x}(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|),$$
$$f_2(x) := \frac{1}{2}\min_i \left|\lambda_i\left(A_{0,22} + A_{0,22}^*\right)\right| - \|A_{0,21}\| - e^{\tau_1 x}(\|A_{1,21}\| + \|A_{1,22}\|).$$

Từ điều kiện (i) và (ii) ta thấy $f_1(0) < 0$ và $f_2(0) > 0$. Mặt khác ta có

$$f_1^{'}(x) = 1 + \tau_1 e^{\tau_1 x}(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|) > 0,$$

và $f_1(0) < 0, f_1(\infty) = \infty$. Suy ra $f_1(\cdot)$ là hàm tăng ngặt và do đó phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm dương, kí hiệu nghiệm đó là α_1.
Thêm nữa, nếu $\|A_{1,21}\|^2 + \|A_{1,22}\|^2 \neq 0$ thì ta có $f_2'(x) < 0$. Mặt khác $f_2(0) > 0$ và $f_2(\infty) = -\infty$ nên $f_2(x)$ là hàm giảm ngặt và $f_2(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm

dương, kí hiệu là α_3. Đặt

$$\alpha_2 := \begin{cases} \alpha_3 & \text{nếu } f_2(0) > 0 \quad \text{và } (||A_{1,21}||^2 + ||A_{1,22}||^2) \neq 0. \\ \infty, & \text{trường hợp còn lại .} \end{cases}$$

và $\alpha = \beta - \epsilon$, trong đó $\beta := \min\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$ và ϵ là một số dương đủ nhỏ sao cho $\epsilon < \beta$.

Vì $f_1(0) < 0, f_2(0) > 0$ và $f_1(x)$ là một hàm tăng ngặt với $f_1(\infty) = \infty$ nên

$$f_1(\beta) = \mu(A_{0,11}) + \beta + \|A_{0,12}\| + e^{\tau_1\beta}(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|) \leq 0. \tag{2.3}$$

Hơn nữa do $f_2(x)$ là hàm giảm nên

$$f_2(\beta) = \frac{1}{2}\min\left|\lambda_1\left(A_{0,22} + A_{0,22}^*\right)\right| - \|A_{0,21}\| - e^{\tau_1\beta}(\|A_{1,21}\| + \|A_{1,22}\|) \geq 0. \tag{2.4}$$

Theo (2.2), đa thức đặc trưng của hệ (2.1) là

$$\det\left\{\lambda\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{0,11} & A_{0,12} \\ A_{0,21} & A_{0,22} \end{bmatrix} - e^{-\tau_1\lambda}\begin{bmatrix} A_{1,11} & A_{1,12} \\ A_{1,21} & A_{1,22} \end{bmatrix}\right\}.$$

Giả sử λ là một nghiệm đặc trưng của hệ, khi đó tồn tại một véc tơ khác không $\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ với $v_a \in \mathbb{C}^r$ và $v_b \in \mathbb{C}^{n-r}$ sao cho

$$\left\{\lambda\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{0,11} & A_{0,12} \\ A_{0,21} & A_{0,22} \end{bmatrix} - e^{-\tau_1\lambda}\begin{bmatrix} A_{1,11} & A_{1,12} \\ A_{1,21} & A_{1,22} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\lambda I_r v_a - A_{0,11}v_a - A_{0,12}v_b - e^{-\tau_1\lambda}(A_{1,11}v_a + A_{1,12}v_b) = 0, \tag{2.5}$$

$$A_{0,21}v_a + A_{0,22}v_b + e^{-\tau_1\lambda_1}(A_{1,21}v_a + A_{1,22}v_b) = 0. \tag{2.6}$$

Ta chia ra 2 trường hợp để xét tính ổn định của hệ (2.1) như sau.

1. Trường hợp thứ nhất là $\|v_a\| \geq \|v_b\|$. Giả sử rằng tồn tại một nghiệm đặc trưng là λ_1 thỏa mãn $\mathrm{Re}(\lambda_1) > -\beta$. Đặt

$$z_1 := (\lambda_1 v_a^* v_a) + (\lambda_1 v_a^* v_a)^* = (\lambda_1 + \lambda_1^*) v_a^* v_a = 2\mathrm{Re}(\lambda_1) v_a^* v_a. \tag{2.7}$$

Do $\mathrm{Re}(\lambda_1) > -\beta$ nên ta có

$$\|z_1\| > -2\beta \|v_a\|^2. \tag{2.8}$$

Từ (2.5) và (2.7) ta có

$$\begin{aligned} z_1 = \; & v_a^* A_{0,11} v_a + v_a^* A_{0,12} v_b + e^{-\tau_1 \lambda_1} v_a^* (A_{1,11} v_a + A_{1,12} v_b) + v_a^* A_{0,11}^* v_a \\ & + v_b^* A_{0,12}^* v_a + e^{-\tau_1 \lambda_1^*} (A_{1,11} v_a + A_{1,12} v_b)^* v_a, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} v_a^* A_{0,12} v_b + v_b^* A_{0,12}^* v_a & \leq |v_a^* A_{0,12} v_b + v_b^* A_{0,12}^* v_a| \\ & \leq \|v_a\| \|A_{0,12}\| \|v_b\| + \|v_b^*\| \|A_{0,12}^*\| \|v_a\| \\ & \leq \|v_a\|^2 \|A_{0,12}\| + \|v_a\|^2 \|A_{0,12}\| \\ & = 2\|v_a\|^2 \|A_{0,12}\|, \end{aligned} \tag{2.9}$$

và

$$\begin{aligned} & e^{-\tau_1 \lambda_1} v_a^* (A_{1,11} v_a + A_{1,12} v_b) + e^{-\tau_1 \lambda_1^*} (A_{1,11} v_a + A_{1,12} v_b)^* v_a \\ & \leq e^{-\tau_1 \lambda_1} \|v_a\| \|A_{1,11} v_a + A_{1,12} v_b\| + e^{-\tau_1 \lambda_1^*} \|A_{1,11} v_a + A_{1,12} v_b\| \|v_a\| \\ & \leq (e^{-\tau_1 \lambda_1} + e^{-\tau_1 \lambda_1^*}) \|v_a\|^2 (\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|), \end{aligned}$$

hơn nữa, do $\mathrm{Re}(\lambda_1) > -\beta$ nên

$$\begin{aligned} e^{-\tau_1 \lambda_1} + e^{-\tau_1 \lambda_1^*} & = e^{-\tau_1 (\mathrm{Re}\lambda_1 + i \mathrm{Im}\lambda_1)} + e^{-\tau_1 (\mathrm{Re}\lambda_1 - i \mathrm{Im}\lambda_1)} \\ & = e^{-\tau_1 \mathrm{Re}\lambda_1} e^{-\tau_1 i \mathrm{Im}\lambda_1} + e^{-\tau_1 \mathrm{Re}\lambda_1} e^{-\tau_1 i \mathrm{Im}\lambda_1} \\ & = e^{-\tau_1 \mathrm{Re}\lambda_1} 2\cos(\tau_1 \mathrm{Im}\lambda_1) \leq 2e^{\tau_1 \beta}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

suy ra

$$e^{-\tau_1\lambda_1}v_a^*(A_{1,11}v_a + A_{1,12}v_b) + e^{-\tau_1\lambda_1^*}(A_{1,11}v_a + A_{1,12}v_b)^* v_a$$
$$\leq 2e^{\tau_1\beta}\|v_a\|^2(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|). \tag{2.11}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.9), (2.10) và (2.11) ta có

$$\begin{aligned} z_1 &\leq v_a^* \left[A_{0,11} + A_{0,11}^*\right] v_a + 2\|A_{0,12}\|\|v_a\|^2 + 2e^{\tau_1\beta}\|v_a\|^2(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|) \\ &= \left\langle \left[A_{0,11} + A_{0,11}^*\right] v_a, v_a \right\rangle + 2\|A_{0,12}\|\|v_a\|^2 + 2e^{\tau_1\beta}\|v_a\|^2(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|). \end{aligned}$$

Áp dụng Mệnh đề 1.15 (Nguyên lý Rayleigh, [3]) ta có

$$\begin{aligned} z_1 &\leq \lambda_{\max}\left(A_{0,11} + A_{0,11}^*\right)\|v_a\|^2 + 2\|A_{0,12}\|\|v_a\|^2 \\ &\qquad + 2e^{\tau_1\beta}\|v_a\|^2(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|) \\ &\leq 2\mu(A_{0,11})\|v_a\|^2 + 2\|A_{0,12}\|\|v_a\|^2 + 2e^{\tau_1\beta}\|v_a\|^2(\|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\|) + 2\beta\|v_a\|^2 \\ &\leq -2\beta\|v_a\|^2. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với (2.8). Vậy các giá trị riêng của hệ (2.1) đều thỏa mãn điều kiện $\mathrm{Re}(\lambda) \leq -\beta$ nên hệ (2.1) là ổn định mũ với hệ số hội tụ α.

2. Trường hợp thứ hai $\|v_a\| < \|v_b\|$. Giả sử tồn tại một nghiệm đặc trưng là λ_1 thỏa mãn $\mathrm{Re}(\lambda_1) > -\beta$. Đặt

$$z_2 := v_b^* A_{0,22} v_b + (v_b^* A_{0,22} v_b)^* = v_b^*\left(A_{0,22} + A_{0,22}^*\right) v_b. \tag{2.12}$$

Áp dụng Mệnh đề 1.15 với công thức (2.12) ta có

$$|z_2| \geq \|v_b\|^2 \left|\lambda_{\min}\left(A_{0,22} + A_{0,22}^*\right)\right|. \tag{2.13}$$

Mặt khác từ công thức (2.6) ta có

$$A_{0,22}v_b = -A_{0,21}v_a - e^{-\tau_1\lambda_1}(A_{1,21}v_a + A_{1,22}v_b).$$

Thay $A_{0,22}v_b$ vào đánh giá (2.4), (2.12) và tương tự như trường hợp thứ nhất ta có

$$\begin{aligned}
|z_2| &= |v_b^* A_{0,22} v_b + v_b^* A_{0,22}^* v_b| \leq \|v_b^* A_{0,22} v_b\| + \|(A_{0,22} v_b)^* v_b\| \\
&\leq \| - v_b^* A_{0,21} v_a - e^{-\tau_1 \lambda_1} v_b^* A_{1,21} v_a - e^{-\tau_1 \lambda_1} v_b^* A_{1,22} v_b\| \\
&\quad + \| - v_a^* A_{0,21}^* v_b - e^{-\tau_1 \lambda_1} A_{1,21}^* v_a^* v_b - e^{-\tau_1 \lambda_1} A_{1,22}^* v_b^* v_b\| \\
&\leq 2\|A_{0,21}\| \|v_b\|^2 + 2e^{\tau_1 \beta} \|v_b\|^2 (\|A_{1,21}\| + \|A_{1,22}\|) \\
&\leq \|v_b\|^2 \left| \lambda_{\min} \left(A_{0,22} + A_{0,22}^* \right) \right| .
\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với (2.13). Vậy tất cả các giá trị riêng của hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện $\mathrm{Re}(\lambda) \leq -\beta$, do đó ta suy ra hệ (2.1) là ổn định mũ với hệ số α.

□

2.2 Ví dụ số minh họa

Sau đây chúng tôi đưa ra ví dụ số minh họa cho Định lý 2.2.

Ví dụ 2.3.

$$E\dot{x}(t) = \tilde{A}_0 x(t) + \tilde{A}_1 x(t-1),$$

trong đó

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \ \tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} -1.25 & 2.25 & 3 \\ -4.25 & 0.25 & -2 \\ -0.75 & -4.25 & -2 \end{bmatrix}, \ \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.125 & 0.375 & 0.5 \\ 0.125 & 0.625 & 0.5 \\ 0.125 & -0.375 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Ta có $n = 3$ và $r := \operatorname{rank}(E) = 2$. Chọn hai ma trận không suy biến

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sao cho

$$Q_1 E Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó hệ phương trình (2.3) tương đương với hệ sau

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \dot{z}(t) = \left[\begin{array}{cc:c} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 8 \end{array}\right] z(t) + \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] z(t-1)$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} A_{0,11} & A_{0,12} \\ \hdashline A_{0,21} & A_{0,22} \end{array}\right] z(t) + \left[\begin{array}{c:c} A_{1,11} & A_{1,12} \\ \hdashline A_{1,21} & A_{1,22} \end{array}\right] z(t-1).$$

Ta có

$$\mu(A_{0,11}) + \|A_{0,12}\| + \|A_{1,11}\| + \|A_{1,12}\| = -3.5 < 0$$

và

$$\frac{1}{2}\left|\lambda_{\min}\left(A_{0,22} + A_{0,22}^*\right)\right| = 8 > 3 = \|A_{0,21}\| + \|A_{1,21}\| + \|A_{1,22}\|$$

nên hệ phương trình trên thỏa mãn điều kiện của định lý (2.2). Mặt khác, ta có

$$f_1(x) = x - 4 + 0.5\, e^x = 0.$$

Suy ra nghiệm của phương trình trên là $x = \alpha_1 = 1.5778$. Bên cạnh đó, từ

$$\begin{cases} f_2(x) = 7 - 2\, e^x = 0 \\ f_2(0) = 7 > 0 \text{ và } \|A_{1,21}\|^2 + \|A_{1,22}\|^2 \neq 0 \end{cases}$$

nên nghiệm của phương trình trên là $\alpha_2 = \ln(\frac{7}{2}) = 1.2527$.

Khi đó $\beta = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} = 1.2527$. Ta chọn $\alpha = \beta - \epsilon = 1.25$ với ϵ là số dương đủ nhỏ.

Vậy hệ phương trình trên là ổn định mũ với hệ số α như trên.

Chương 3

Ổn định mũ hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến

Sau đây chúng tôi sẽ đưa ra điều kiện đủ về tính $\alpha-$ổn định mũ hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến. Điều kiện này được xây dựng dựa trên việc mở rộng bài báo [10] khi thêm nhiễu phi tuyến.

3.1 Ổn định mũ hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên với nhiễu phi tuyến

Xét hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên và có nhiễu phi tuyến.

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h(t)) + G_1 f(t, x(t)) + G_2 g(t, x(t-h(t))), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x(t)$ là véc tơ trạng thái, $E, A, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận thực, $\operatorname{rank} E = r \leq n, G_1, G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận hệ số của các nhiễu phi tuyến và $h(t)$ là hàm thời gian trễ liên tục thỏa mãn điều kiện $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$ và $\dot{h}(t) \leq \mu$.

Các nhiễu phi tuyến f, g liên tục, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$, thỏa mãn $f(t,0) = 0$ và $g(t,0) = 0$ sao cho tồn tại $U_1, U_2 \in R^{n\times n}$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$\begin{cases} f^T(t,x(t))f(t,x(t)) \le x^T(t)U_1^T U_1 x(t), \\ g^T(t,x(t-h(t)))g(t,x(t-h(t))) \le x^T(t-h(t))U_2^T U_2 x(t-h(t)). \end{cases}$$

Định nghĩa 3.1. Cho số $\alpha > 0$. Hệ $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ được gọi là *$\alpha-$ổn định mũ* nếu tồn tại hằng số $N \ge 1$ sao cho mọi nghiệm $x(t,\varphi)$ của hệ thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t,\varphi)\| \le N\|\varphi\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \ge t_0.$$

Cho $\alpha > 0$ ta ký hiệu

$$\Xi_{11} = A^T P^T + PA + Q + Q_1 + Q_2 + 2\alpha PE + X_1 E + E^T X_1 + \epsilon_1 U_1^T U_1,$$

$$\Xi_{12} = PD - X_1 E + E^T X_2^T + Y_1 E - Z_1 E,$$

$$\Xi_{110} = A^T[h_2 W_1 + (h_2 - h_1)W_2],$$

$$\Xi_{22} = -(1-\mu)e^{-2\alpha h_2}Q + Y_2 E + E^T Y_2^T - X_2 E - E^T X_2^T - Z_2 E - E^T Z_2^T + \epsilon_2 U_2^T U_2,$$

$$\Xi_{210} = D^T[h_2 W_1 + (h_2 - h_1)W_2],$$

$$\Xi_{33} = -e^{-2\alpha h_1}Q_1, \quad \Xi_{44} = -e^{-2\alpha h_2}Q_2,$$

$$\Xi_{88} = -\gamma_{22}(W_1 + W_2),$$

$$\Xi_{1010} = -[h_2 W_1 + (h_2 - h_1)W_2],$$

$$\gamma_{21} = \frac{e^{2\alpha h_2} - 1}{2\alpha}, \quad \gamma_{22} = \frac{e^{2\alpha h_2} - e^{2\alpha h_1}}{2\alpha}.$$

Định lý sau đây đưa ra một điều kiện đủ mới cho tính $\alpha-$ổn định mũ của hệ phương trình vi phân suy biến có trễ biến thiên và có nhiễu phi tuyến (3.1).

Định lý 3.2. *Cho $\alpha > 0$, hệ (3.1) là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương Q, Q_i, W_i, $i = 1, 2$, ϵ_1, ϵ_2 là các số nguyên dương đủ nhỏ và các ma trận P, X_i, Y_i, Z_i, U_i, $i = 1, 2$, với chiều phù hợp thỏa mãn các bất đẳng*

thức ma trận tuyến tính sau:

$$PE = E^T P^T \geqslant 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & Z_1 E & -Y_1 E & PG_1 & PG_2 & \gamma_{21}X_1 & \gamma_{22}Y_1 & \gamma_{22}Z_1 & \Xi_{110} \\ * & \Xi_{22} & Z_2 E & -Y_2 E & 0 & 0 & \gamma_{21}X_2 & \gamma_{22}Y_2 & \gamma_{22}Z_2 & \Xi_{210} \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma_{21}W_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\gamma_{22}W_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{1010} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.3}$$

$$h_2 Q - Q_2 < 0. \tag{3.4}$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh tính chính quy, impulse-free của hệ (3.1). Từ $\operatorname{rank}(E) = r \leqslant n$, tồn tại hai ma trận không suy biến M và N sao cho

$$\widehat{E} = MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Đặt

$$\overline{A} = MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} M,$$

$$\overline{N} = N \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{P} = \overline{N}^T P \overline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{Q} = \overline{N}^T Q \overline{N} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21}^T & Q_{22} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{Q}_i = \overline{N}^T Q_i \overline{N} = \begin{bmatrix} Q_{i,11} & Q_{i,12} \\ Q_{i,12}^T & Q_{i,22} \end{bmatrix},$$

và

$$\widehat{X_i} = \overline{N}^T X_i \overline{M}^{-1}, \qquad \widehat{Y_i} = \overline{N}^T Y_i \overline{M}^{-1},$$

$$\widehat{Z_i} = \overline{N}^T Z_i \overline{M}^{-1}, \qquad \widehat{W_i} = \overline{M}^{-T} W_i \overline{M}^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Từ (3.2), ta có

$$\widehat{P}\ \widehat{E} = \widehat{E}^T\ \widehat{P}^T \geqslant 0.$$

Suy ra $P_{11} \geqslant 0,\ P_{21} = 0$. Mặt khác, theo Bổ đề Schur từ (3.3) ta có

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & Z_1E & -Y_1E \\ * & \Xi_{22} & Z_2E & -Y_2E \\ * & * & \Xi_{33} & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.5}$$

Nhân vào phía trước và phía sau (3.5) bởi $\begin{bmatrix} I & I & I & I \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} I & I & I & I \end{bmatrix}^T$ ta có

$$\Xi_{11} + \Xi_{12}^T + (Z_1E)^T + (Z_2E)^T + \Xi_{12} + \Xi_{22} - (Y_1E)^T + (-Y_2E)^T + Z_1E + Z_2E$$
$$+ \Xi_{33} - Y_1E - Y_2E + \Xi_{44} < 0.$$

Thay $\Xi_{11}, \Xi_{12}, \Xi_{22}, \Xi_{33}, \Xi_{44}$ vào biểu thức trên ta có

$$(A+D)^T P^T + P(A+D) + 2\alpha PE + (1 - e^{-2\alpha h_1})Q_1$$
$$+ (1 - e^{-2\alpha h_2})\big[(1-\mu)Q + Q_2\big] + \epsilon_1 I + \epsilon_2 I < 0.$$

Vì $\alpha > 0$ nên $2\alpha PE > 0$. Hơn nữa với $\epsilon > 0$ ta có

$$(1 - e^{-2\alpha h_1})Q_1 + (1 - e^{-2\alpha h_2})\big[(1-\mu)Q + Q_2\big] < 0.$$

Do đó

$$(A+D)^T P^T + P(A+D) < 0.$$

Vậy P và $\widehat{P}$ là các ma trận không suy biến và $P_{11} > 0$.

Đặt

$$\widehat{A} := \overline{M} A \overline{N} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

trong đó $\widehat{A}_{11} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ và $I_{n-r} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận đơn vị. Nhân vào phía trước và phía sau bất đẳng thức (3.5) lần lượt với các ma trận chéo khối $\mathrm{diag}\{\overline{N}^T, \overline{N}^T, \overline{N}^T, \overline{N}^T\}$ và $\mathrm{diag}\{\overline{N}, \overline{N}, \overline{N}, \overline{N}\}$ ta có

$$\begin{bmatrix} \overline{\Xi}_{11} & \overline{\Xi}_{12} & \widehat{Z_1}\ \widehat{E} & -\widehat{Y_1}\ \widehat{E} \\ * & \overline{\Xi}_{22} & \widehat{Z_2}\ \widehat{E} & -\widehat{Y_2}\ \widehat{E} \\ * & * & \overline{\Xi}_{33} & 0 \\ * & * & * & \overline{\Xi}_{44} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.6}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\overline{\Xi}_{11} &= \widehat{A}^T\ \widehat{P}^T + \widehat{P}\ \widehat{A} + \widehat{Q} + \widehat{Q}_1 + \widehat{Q}_2 + 2\alpha\widehat{P}\ \widehat{E} + \widehat{X}_1\ \widehat{E} + \widehat{E}^T\ \widehat{X}_1^T + \epsilon_1\overline{N}^T U_1^T U_1 \overline{N}, \\
\overline{\Xi}_{12} &= \widehat{P}\ \widehat{D} - \widehat{X}_1\ \widehat{E} + \widehat{E}^T\ \widehat{X}_2^T + \widehat{Y}_1\ \widehat{E} - \widehat{Z}_1\ \widehat{E}, \\
\overline{\Xi}_{22} &= -(1-\mu)e^{-2\alpha h_2}\widehat{Q} + \widehat{Y}_2\ \widehat{E} + \widehat{E}^T\ \widehat{Y}_2^T - \widehat{X}_2\ \widehat{E} - \widehat{E}^T\ \widehat{X}_2^T - \widehat{Z}_2\ \widehat{E} - \widehat{E}^T\ \widehat{Z}_2^T \\
&\qquad + \epsilon_2\overline{N}^T U_2^T U_2 \overline{N}, \\
\overline{\Xi}_{33} &= -e^{-2\alpha h_1}\widehat{Q}_1, \quad \overline{\Xi}_{44} = -e^{-2\alpha h_2}\widehat{Q}_2.
\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức (3.3) ta có

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ * & \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0.$$

Thay Ξ_{11} vào bất đẳng thức trên và áp dụng Bổ đề Schur ta có

$$P_{22}A_{22} + A_{22}^T P_{22}^T < 0.$$

Vậy P_{22} và A_{22} là các ma trận không suy biến. Vì $\widehat{E} = \overline{M}E\overline{N}$ nên $E = \overline{M}^{-1}\widehat{E}\overline{N}^{-1}$. Do đó

$$\begin{aligned}
\det(sE - A) &= \det(s\overline{M}^{-1}\widehat{E}\overline{N}^{-1} - A) \\
&= \det(\overline{M}^{-1})\det(s\widehat{E}\overline{N}^{-1} - \overline{M}A) \\
&= \det(\overline{M}^{-1})\det(s\widehat{E} - \overline{M}A\overline{N})\det(\overline{N}^{-1})
\end{aligned}$$

$$= \det(\overline{M}^{-1})(-1)^{n-r}\det(s\widehat{I}_r - \widehat{A}_{11})\det(\overline{N}^{-1}) \neq 0.$$

Suy ra $\det(sE - A) \neq 0$ và $\deg \det(sE - A) = r = \operatorname{rank}(E)$. Do đó hệ (3.1) là chính quy và impulse-free.

Bây giờ ta chứng minh hệ (3.1) là ổn định mũ. Đặt $y(t) = \overline{N}^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, trong đó $y_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$. Vì $y(t) = \overline{N}^{-1}x(t)$ nên $\overline{N}y(t) = x(t)$. Lấy đạo hàm hai vế ta có $\overline{N}\dot{y}(t) = \dot{x}(t)$. Sau đó nhân cả hai vế với ma trận E ta có

$$E\overline{N}\dot{y}(t) = E\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t - h(t)) + G_1 f(x(t)) + G_2 g(x(t - h(t))).$$

Nhân cả hai vế của phương trình trên với ma trận $\overline{M}$ ta có

$$\overline{M}E\overline{N}\dot{y}(t) = \overline{M}Ax(t) + \overline{M}Dx(t - h(t)) + \overline{M}G_1 f(x(t)) + \overline{M}G_2 g(x(t - h(t))).$$

Vì $x(t) = \overline{N}y(t)$ nên phương trình trên tương đương với phương trình sau

$$\begin{aligned} \widehat{E}\dot{y}(t) &= \overline{M}A\overline{N}y(t) + \overline{M}D\overline{N}y(t - h(t)) + \overline{M}G_1 f(\overline{N}y(t)) + \overline{M}G_2 g(\overline{N}y(t - h(t))), \\ &= \widehat{A}y(t) + \widehat{D}y(t - h(t)) + \widehat{G}_1 f(\overline{N}y(t)) + \widehat{G}_2 g(\overline{N}y(t - h(t))), \end{aligned}$$

trong đó

$$\widehat{G_1} = \overline{M}G_1 = \begin{bmatrix} \widehat{G}_{11} \\ \widehat{G}_{12} \end{bmatrix}, \quad \widehat{G_2} = \overline{M}G_2 = \begin{bmatrix} \widehat{G}_{21} \\ \widehat{G}_{22} \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \overline{M}D\overline{N} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}.$$

Do đó hệ (3.1) tương đương với

$$\begin{cases} \widehat{E}\dot{y}(t) = \widehat{A}y(t) + \widehat{D}y(t - h(t)) + \widehat{G}_1 f(\overline{N}y(t)) + \widehat{G}_2 g(\overline{N}y(t - h(t))), \ t \geqslant 0 \\ y(t) = \overline{N}^{-1}\phi(t) := \psi(t), \qquad t \in [-h_2, 0]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Khi đó ta viết lại hệ (3.7) như sau

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \widehat{A}_{11}\, y_1(t) + D_{11}\, y_1(t-h(t)) + D_{12}\, y_2(t-h(t)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \widehat{G}_{11} f(\overline{N}y(t)) + \widehat{G}_{21} g(\overline{N}y(t-h(t))), \\ 0 = y_2(t) + D_{21}\, y_1(t-h(t)) + D_{22}\, y_2(t-h(t)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \widehat{G}_{12} f(\overline{N}y(t)) + \widehat{G}_{22} g(\overline{N}y(t-h(t))), \\ y(t) = \psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-h_2, 0] \end{cases} \tag{3.8}$$

với $\psi_1(t) \in \mathbb{R}^r, \psi_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$.

Xét hàm Lyapunov - Krasovskii

$$V(t, y_t) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6,$$

trong đó

$$\begin{aligned} V_1 &= y^T(t)\widehat{P}\widehat{E}y(t), \\ V_2 &= \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)} y^T(s)\widehat{Q}_1 y(s)\mathrm{d}s, \\ V_3 &= \int_{t-h_2}^{t} e^{2\alpha(s-t)} y^T(s)\widehat{Q}_2 y(s)\mathrm{d}s, \\ V_4 &= \int_{t-h(t)}^{t} e^{2\alpha(s-t)} y^T(s)\widehat{Q} y(s)\mathrm{d}s, \\ V_5 &= \int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(u-t)} \dot{y}^T(u)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s, \\ V_6 &= \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(u-t)} \dot{y}^T(u)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Ta có

$$\lambda_1 \|y_1(t)\|^2 \leqslant V(t, y_t) \leqslant \lambda_2 \|y_t\|^2, \tag{3.9}$$

trong đó

$$\lambda_1 \;=\; \lambda_{\min}(P_{11}),$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}(P_{11}) + h_1\lambda_{\max}(\widehat{Q_1}) + h_2\lambda_{\max}(\widehat{Q_2}) + h_2\lambda_{\max}(\widehat{Q}) + \frac{1}{2}\big[h_2^2\lambda_{\max}(\widehat{W}_1) + (h_2^2 - h_1^2)\lambda_{\max}(\widehat{W}_2)\big].$$

Lấy đạo hàm của các V_i, $i = 1, \ldots, 6$, theo t, ta có

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= 2y^T(t)\widehat{P}\,\widehat{E}\dot{y}(t) \\
&= 2y^T(t)\widehat{P}\left[\widehat{A}y(t) + \widehat{D}y(t-h(t)) + \widehat{G}_1 f(\overline{N}y(t)) + \widehat{G}_2 g(\overline{N}y(t-h(t)))\right] \quad (3.10)\\
&= y^T(t)\big[\widehat{P}\widehat{A} + \widehat{A}^T\widehat{P}^T + 2\alpha\widehat{P}\,\widehat{E}\big]y(t) + 2y^T(t)\widehat{P}\widehat{D}y(t-h(t)) \\
&\qquad + 2y^T(t)\widehat{P}\widehat{G}_1 f(\overline{N}y(t)) + 2y^T(t)\widehat{P}\widehat{G}_2 g(\overline{N}y(t-h(t))) - 2\alpha V_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= -2\alpha V_2 + y^T(t)\widehat{Q}_1 y(t) - e^{-2\alpha h_1}y^T(t-h_1)\widehat{Q}_1 y(t-h_1), \\
\dot{V}_3 &= -2\alpha V_3 + y^T(t)\widehat{Q}_2 y(t) - e^{-2\alpha h_2}y^T(t-h_2)\widehat{Q}_2 y(t-h_2), \\
\dot{V}_4 &\le -2\alpha V_4 + y^T(t)\widehat{Q}y(t) - (1-\mu)y^T(t-h(t))\widehat{Q}y(t-h(t))e^{2\alpha h_2}, \\
\dot{V}_5 &= -2\alpha V_5 + h_2\dot{y}^T(t)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(t) - \int_{t-h_2}^{t} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s, \\
\dot{V}_6 &= -2\alpha V_6 + (h_2-h_1)\dot{y}^T(t)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(t) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
0 &\le -\epsilon_1 f^T(t,\overline{N}y(t))f(t,\overline{N}y(t)) + \epsilon_1 y^T(t)\overline{N}^T\overline{N}y(t), \quad (3.11)\\
0 &\le -\epsilon_2 g^T(t,\overline{N}y(t-h(t)))g(t,\overline{N}y(t-h(t))) + \epsilon_2 y^T(t-h(t))\overline{N}^T\overline{N}y(t-h(t)).
\end{aligned}$$

Áp dụng phép phân hoạch tích phân và công thức Newton - Leibniz, ta có

$$\begin{aligned}
-\int_{t-h_2}^{t} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s &= -\int_{t-h_2}^{t-h(t)} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s \\
&\quad -\int_{t-h(t)}^{t} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s, \quad (3.12)\\
-\int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s &= -\int_{t-h_2}^{t-h(t)} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s \\
&\quad -\int_{t-h(t)}^{t-h_1} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

và

$$
\begin{aligned}
&2\big[y^T(t)\widehat{X}_1 + y^T(t-h(t))\widehat{X}_2\big]\Big[\widehat{E}y(t) - \widehat{E}y(t-h(t)) - \int_{t-h(t)}^{t} \widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\Big] = 0,\\
&2\big[y^T(t)\widehat{Y}_1 + y^T(t-h(t))\widehat{Y}_2\big]\Big[\widehat{E}y(t-h(t)) - \widehat{E}y(t-h_2) - \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\Big] = 0,\\
&2\big[y^T(t)\widehat{Z}_1 + y^T(t-h(t))\widehat{Z}_2\big]\Big[\widehat{E}y(t-h_1) - \widehat{E}y(t-h(t)) - \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\Big] = 0.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Kết hợp các điều kiện (3.10)–(3.14) ta có

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t,y_t) + 2\alpha V(t,y_t) \leqslant\ & \eta^T(t)\Xi\eta(t) + h_2\dot{y}^T(t)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(t)\\
&+(h_2-h_1)\dot{y}^T(t)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(t)\\
&-\int_{t-h(t)}^{t} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\\
&-2\big[y^T(t)\widehat{X}_1 + y^T(t-h(t))\widehat{X}_2\big]\int_{t-h(t)}^{t} \widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\\
&-\int_{t-h_2}^{t-h(t)} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T(\widehat{W}_1-\widehat{W}_2)\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\\
&-2\big[y^T(t)\widehat{Y}_1 + y^T(t-h(t))\widehat{Y}_2\big]\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\\
&-\int_{t-h(t)}^{t-h_1} e^{2\alpha(s-t)}\dot{y}^T(s)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s\\
&-2\big[y^T(t)\widehat{Z}_1 + y^T(t-h(t))\widehat{Z}_2\big]\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \widehat{E}\dot{y}(s)\mathrm{d}s.\\
\leqslant\ & \eta^T(t)\Xi\eta(t) + h_2\dot{y}^T(t)\widehat{E}^T\widehat{W}_1\widehat{E}\dot{y}(t)\\
&+(h_2-h_1)\dot{y}^T(t)\widehat{E}^T\widehat{W}_2\widehat{E}\dot{y}(t)\\
&-\int_{t-h(t)}^{t}\Big[\big(\eta^T(t)\widehat{X} + \dot{y}^T(s)e^{2\alpha(s-t)}\widehat{E}^T\widehat{W}_1\big)\big(e^{2\alpha(s-t)}\widehat{W}_1\big)^{-1}\\
&\times\big(\eta^T(t)\widehat{X} + \dot{y}^T(s)e^{2\alpha(s-t)}\widehat{E}^T\widehat{W}_1\big)^T\Big]\mathrm{d}s\\
&-\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\Big[\big(\eta^T(t)\widehat{Z} + \dot{y}^T(s)e^{2\alpha(s-t)}\widehat{E}^T\widehat{W}_2\big)\big(e^{2\alpha(s-t)}\widehat{W}_2\big)^{-1}\\
&\times\big(\eta^T(t)\widehat{Z} + \dot{y}^T(s)e^{2\alpha(s-t)}\widehat{E}^T(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2)\big)^T\Big]\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \Big[\eta^T(t)\widehat{Y}\big(e^{2\alpha(s-t)}(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2)\big)^{-1}\widehat{Y}^T\eta(t)\mathrm{d}s \\
&\times\big(\eta^T(t)\widehat{Y}+\dot{y}^T(s)e^{2\alpha(s-t)}\widehat{E}^T\widehat{W}_2\big)^T\Big]\mathrm{d}s \\
&+\int_{t-h(t)}^{t} \eta^T(t)\widehat{X}\big(e^{2\alpha(s-t)}\widehat{W}_1\big)^{-1}\widehat{X}^T\eta(t)\mathrm{d}s \\
&+\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \eta^T(t)\widehat{Y}\big(e^{2\alpha(s-t)}(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2)\big)^{-1}\widehat{Y}^T\eta(t)\mathrm{d}s \\
&+\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \eta^T(t)\widehat{Z}\big(e^{2\alpha(s-t)}\widehat{W}_2\big)^{-1}\widehat{Z}^T\eta(t)\mathrm{d}s. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Nhóm các số hạng trong vế phải của (3.15) theo các vectơ bổ sung và các ma trận dưới đây

$$
\begin{aligned}
\eta(t) &= \Big[y^T(t),\ y^T(t-h(t)),\ y^T(t-h_1),\ y^T(t-h_2),\ f(\overline{N}y(t)),\ g(\overline{N}y(t-h(t))\Big]^T, \\
\widehat{X} &= \begin{bmatrix}\widehat{X}_1^T & \widehat{X}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \\
\widehat{Y} &= \begin{bmatrix}\widehat{Y}_1^T & \widehat{Y}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \\
\widehat{Z} &= \begin{bmatrix}\widehat{Z}_1^T & \widehat{Z}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \\
\widehat{U} &= h_2\widehat{W}_1+(h_2-h_1)\widehat{W}_2, \\
\Omega &= \begin{bmatrix}\widehat{A} & \widehat{D} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

và
$$
\overline{\Xi} = \begin{bmatrix}
\overline{\Xi}_{11} & \overline{\Xi}_{12} & \widehat{Z_1} & \widehat{E} & -\widehat{Y_1} & \widehat{E} & \widehat{P}\widehat{G}_1 & \widehat{P}\widehat{G}_2 \\
* & \overline{\Xi}_{22} & \widehat{Z_2} & \widehat{E} & -\widehat{Y_2} & \widehat{E} & 0 & 0 \\
* & * & \overline{\Xi}_{33} & & 0 & & 0 & 0 \\
* & * & * & & \overline{\Xi}_{44} & & 0 & 0 \\
* & * & * & & * & & -\epsilon_1 I & 0 \\
* & * & * & & * & & * & -\epsilon_2 I
\end{bmatrix},
$$

trong đó các $\overline{\Xi}_{11}, \overline{\Xi}_{12}, \overline{\Xi}_{22}, \overline{\Xi}_{33}, \overline{\Xi}_{44}$ được xác định ở trên, và chú ý rằng

$$\begin{aligned}
&\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \eta^T(t)\widehat{Y}\left(e^{2\alpha(s-t)}(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2)\right)^{-1}\widehat{Y}^T\eta(t)\mathrm{d}s \\
&\quad = \eta^T(t)\widehat{Y}\left(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Y}^T\eta(t)\int_{t-h_2}^{t-h(t)} e^{-2\alpha(s-t)}\mathrm{d}s \\
&\quad = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha h_2}-e^{2\alpha h(t)}\right)\eta^T(t)\widehat{Y}\left(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Y}^T\eta(t) \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha h_2}-e^{2\alpha h_1}\right)\eta^T(t)\widehat{Y}\left(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Y}^T\eta(t), \\
&\int_{t-h(t)}^{t} \eta^T(t)\widehat{X}\left(e^{2\alpha(s-t)}\widehat{W}_1\right)^{-1}\widehat{X}^T\eta(t)\mathrm{d}s \\
&\quad = \eta^T(t)\widehat{X}\left(\widehat{W}_1\right)^{-1}\widehat{X}^T\eta(t)\int_{t-h(t)}^{t} e^{-2\alpha(s-t)}\mathrm{d}s \\
&\quad = \frac{1}{-2\alpha}\left(1-e^{2\alpha h(t)}\right)\eta^T(t)\widehat{X}\left(\widehat{W}_1\right)^{-1}\widehat{X}^T\eta(t) \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha h_2}-1\right)\eta^T(t)\widehat{X}\left(\widehat{W}_1\right)^{-1}\widehat{X}^T\eta(t), \\
&\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \eta^T(t)\widehat{Z}\left(e^{2\alpha(s-t)}\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Z}^T\eta(t)\mathrm{d}s \\
&\quad = \frac{1}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha(t-h_1)}-e^{-2\alpha(t-h(t))}\right)\eta^T(t)\widehat{Z}\left(\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Z}^T\eta(t)e^{2\alpha t} \\
&\quad = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha h(t)}-e^{2\alpha h_1}\right)\eta^T(t)\widehat{Z}\left(\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Z}^T\eta(t) \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha h_2}-e^{2\alpha h_1}\right)\eta^T(t)\widehat{Z}\left(\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Z}^T\eta(t),
\end{aligned}$$

ta được

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t,y_t)+2\alpha V(t,y_t) \quad \leqslant \quad & \eta^T(t)\overline{\Xi}\eta(t)+\eta^T(t)\Omega^T\widehat{U}\Omega\eta(t) \\
& +\frac{e^{2\alpha h_2}-e^{2\alpha h_1}}{2\alpha}\eta^T(t)\widehat{Y}\left(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Y}^T\eta(t) \\
& +\frac{e^{2\alpha h_2}-e^{2\alpha h_1}}{2\alpha}\eta^T(t)\widehat{Z}\left(\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Z}^T\eta(t) \\
& +\frac{e^{2\alpha h_2}-1}{2\alpha}\eta^T(t)\widehat{X}\left(\widehat{W}_1\right)^{-1}\widehat{X}^T\eta(t) \qquad (3.16) \\
\leqslant \ & \eta^T(t)\Big[\overline{\Xi}+\gamma_{21}\widehat{X}\,\widehat{W}_1^{-1}\,\widehat{X}^T+\gamma_{22}\widehat{Z}\,\widehat{W}_2^{-1}\,\widehat{Z}^T \\
& +\gamma_{22}\widehat{Y}\left(\widehat{W}_1+\widehat{W}_2\right)^{-1}\widehat{Y}^T+\Omega^T\widehat{U}\Omega\Big]\eta(t),
\end{aligned}$$

trong đó $\gamma_{21}=\dfrac{e^{2\alpha h_2}-1}{2\alpha}$ và $\gamma_{22}=\dfrac{e^{2\alpha h_2}-e^{2\alpha h_1}}{2\alpha}$.

Nhân lần lượt vào phía trước và phía sau ma trận trong (3.3) với các ma trận chéo là $\mathrm{diag}\{\overline{N}^T, \overline{N}^T, \overline{N}^T, \overline{N}^T, I, I, I, I, I, I\}$ và $\mathrm{diag}\{\overline{N}, \overline{N}, \overline{N}, \overline{N}, I, I, I, I, I, I\}$, ta được

$$\begin{bmatrix} \overline{\Xi}_{11} & \overline{\Xi}_{12} & \widehat{Z}_1\widehat{E} & -\widehat{Y}_1\widehat{E} & \widehat{P}\widehat{G}_1 & \widehat{P}\widehat{G}_2 & \gamma_{21}\overline{N}^T X_1 & \gamma_{22}\overline{N}^T Y_1 & \gamma_{22}\overline{N}^T Z_1 & \overline{N}^T\Xi_{110} \\ * & \overline{\Xi}_{22} & \widehat{Z}_2\widehat{E} & -\widehat{Y}_2\widehat{E} & 0 & 0 & \gamma_{21}\overline{N}^T X_2 & \gamma_{22}\overline{N}^T Y_2 & \gamma_{22}\overline{N}^T Z_2 & \overline{N}^T\Xi_{210} \\ * & * & \overline{\Xi}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \overline{\Xi}_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma_{21}W_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\gamma_{22}W_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{1010} \end{bmatrix} < 0.$$

Áp dụng bổ đề Schur, ta có

$$\overline{\Xi} + \gamma_{21}\widehat{X}\,\widehat{W}_1^{-1}\widehat{X}^T + \gamma_{22}\widehat{Z}\,\widehat{W}_2^{-1}\widehat{Z}^T + \gamma_{22}\widehat{Y}\big(\widehat{W}_1 + \widehat{W}_2\big)^{-1}\widehat{Y}^T + \Omega^T\widehat{U}\Omega < 0.$$

Do đó, từ (3.16) và đánh giá bất đẳng thức ở trên ta có

$$\dot{V}(t, y_t) + 2\alpha V(t, y_t) \leqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Suy ra

$$V(t, y_t) \leqslant V(\psi)e^{-2\alpha t} \leqslant \lambda_2\|\psi\|_{h_2}^2 e^{-2\alpha t}, \quad t \geqslant 0.$$

Mặt khác, từ (3.9) ta lại có

$$\|y_1(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\|\psi\|_{h_2}^2 e^{-\alpha t} =: \nu_1\|\psi\|_{h_2}^2 e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0,$$

trong đó $\|\psi\| = \sup\limits_{s\in[-h_2,0]}\{\|\psi(t)\|, \|\dot{\psi}(t)\|\}$. Điều này chứng tỏ r thành phần đầu tiên của $y(t)$ là $\alpha-$ổn định mũ.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng các thành phần còn lại của hệ $y(t)$ là ổn định với cùng tốc độ mũ α. Đặt $p(t) = D_{21}y_1(t-h(t))$. Nếu $t-h(t) \geq 0$ với $t \geqslant 0$ thì

$$\|y_1(t-h(t))\|^2 \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\|\psi\|_{h_2}^2 e^{-2\alpha(t-h(t))} \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\|\psi\|_{h_2}^2 e^{2\alpha h_2} e^{-2\alpha t}.$$

Ngược lại, nếu $t-h(t) < 0$ thì

$$\|y_1(t-h(t))\|^2 \leqslant \|\psi\|_{h_2}^2 \leqslant \|\psi\|_{h_2}^2 e^{-2\alpha(t-h(t))} \leqslant \nu_1^2\|\psi\|_{h_2}^2 e^{2\alpha h_2} e^{-2\alpha t},$$

do đó

$$\|y_1(t-h(t))\| \leqslant \nu_1 e^{\alpha h_2}\|\psi\|_{h_2} e^{-\alpha t}, \forall t \geqslant 0.$$

Thế đánh giá trên vào véc tơ $p(t)$, ta có

$$\begin{aligned}\|p(t)\| &\leq \|D_{21}\|\|y_1(t-h(t))\| \ \leq \|D_{21}\|\nu_1 e^{\alpha h_2 - \alpha t}\|\psi\|_{h_2} \\ &\leq \sigma_1 e^{\alpha h_2}\nu_1\|\psi\|_{h_2} e^{-\alpha t} \ \leq \gamma_p\|\psi\|_{h_2} e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

trong đó $\sigma_1 = \|D_{21}\|$ và $\gamma_p = \sigma_1 e^{\alpha h_2}\nu_1$. Từ (3.8) ta có

$$y_2(t) + D_{22}y_2(t-h(t)) + p(t) + \widehat{G}_{12}f(\overline{N}y(t)) + \widehat{G}_{22}g(\overline{N}y(t-h(t))) = 0.$$

Suy ra

$$2y_2^T(t)P_{22}\Big[y_2(t) + D_{22}y_2(t-h(t)) + p(t) + \widehat{G}_{12}f(\overline{N}y(t)) + \widehat{G}_{22}g(\overline{N}y(t-h(t)))\Big] = 0. \tag{3.18}$$

Xét hàm $J(t)$ như sau

$$J(t) \ := (1-\mu)y_2^T(t)Q_{22}y_2(t) - (1-\mu)e^{-2\alpha h_2}y_2^T(t-h(t))Q_{22}y_2(t-h(t)). \tag{3.19}$$

Từ (3.18) và (3.19) ta có

$$\begin{aligned}J(t) = {} & y_2^T(t)\left[P_{22} + P_{22}^T + (1-\mu)Q_{22}\right]y_2(t) - (1-\mu)e^{-2\alpha h_2}y_2^T(t-h(t))Q_{22}y_2(t-h(t)) \\ & + 2y_2^T(t)P_{22}D_{22}y_2(t-h(t)) + 2y_2^T(t)P_{22}p(t) + 2y_2^T(t)P_{22}\widehat{G}_{12}f(\overline{N}y(t)) \\ & + \ 2y_2^T(t)P_{22}\widehat{G}_{22}g(\overline{N}y(t-h(t))).\end{aligned}$$

Sử dụng Mệnh đề 1.14 với chú ý $Q_{1,22} > 0$, ta có

$$2y_2^T(t)\,P_{22}\,p(t) \le y_2^T(t)\,Q_{1,22}\,y_2(t) + p^T(t)\,P_{22}^T\,Q_{1,22}^{-1}\,P_{22}p(t).$$

Do đó

$$J(t) \le \chi^T(t) \begin{bmatrix} J_1 & * & * & * \\ P_{22}D_{22} & -(1-\mu)e^{-2\alpha h_2}Q_{22} & * & * \\ P_{22}\widehat{G}_{12} & 0 & 0 & * \\ P_{22}\widehat{G}_{22} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \chi(t)$$

$$+\ y_2^T(t)\,Q_{1,22}\,y_2(t) + p^T(t)\,P_{22}^T\,Q_{1,22}^{-1}\,P_{22}p(t), \quad (3.20)$$

trong đó $\chi^T(t) = \begin{bmatrix} y_2^T(t) & y_2^T(t-h(t)) & f^T(\overline{N}y(t) & g^T(\overline{N}y(t-h(t))) \end{bmatrix}$
và $J_1 = P_{22} + P_{22}^T + (1-\mu)Q_{22}$.

Mặt khác từ

$$\overline{\Xi} = \begin{bmatrix} \overline{\Xi}_{11} & \overline{\Xi}_{12} & \widehat{Z}_1\ \widehat{E} & -\widehat{Y}_1\ \widehat{E} \\ * & \overline{\Xi}_{22} & \widehat{Z}_2\ \widehat{E} & -\widehat{Y}_2\ \widehat{E} \\ * & * & \overline{\Xi}_{33} & 0 \\ * & * & * & \overline{\Xi}_{44} \end{bmatrix} < 0,$$

ta có

$$\begin{bmatrix} \overline{\Xi}_{11} & \overline{\Xi}_{12} \\ * & \overline{\Xi}_{22} \end{bmatrix} < 0.$$

Suy ra

$$\begin{bmatrix} J_2 & P_{22}D_{22} \\ * & -(1-\mu)e^{-2\alpha h_2}Q_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

trong đó $J_2 = P_{22} + P_{22}^T + (1-\mu)Q_{22} + Q_{1,22} + Q_{2,22}$. Kết hợp với (3.19) ta có

$$J(t) \le -y_2(t)\,Q_{2,22}\,y_2(t) + p^T(t)\,P_{22}^T\,Q_{1,22}^{-1}\,P_{22}p(t). \quad (3.21)$$

Từ (3.19) và (3.21) ta có

$$y_2^T(t)\,[(1-\mu)Q_{22}+Q_{2,22}]\,y_2(t) \le (1-\mu)e^{-2\alpha h_2}y_2^T(t-h(t))\,Q_{22}\,y_2(t-h(t)) + p^T(t)\,P_{22}^T\,Q_{1,22}^{-1}\,P_{22}p(t). \quad (3.22)$$

Nhân vào phía trước và phía sau của bất đẳng thức (3.4) với các ma trận $\overline{N}^T$ và $\overline{N}$ tương ứng, sau đó áp dụng Bổ đề Schur ta có $h_2Q_{22} < Q_{2,22}$. Kết hợp với (3.22) ta có

$$(1-\mu+h_2)y_2^T(t)Q_{22}y_2(t) \le (1-\mu)e^{-2\alpha h_2}\sup_{-h_2\le s\le 0} y_2^T(t+s)Q_{22}y_2(t+s) + p^T(t)P_{22}^TQ_{1,22}^{-1}P_{22}p(t).$$

Đặt $f(t) = y_2^T(t)Q_{22}y_2(t)$, $\forall t \ge -h_2$. Khi đó ta có

$$f(t) \le \delta_1 \sup f(t+s) + \delta_2 e^{-2\alpha t},\ t \ge 0, \quad (3.23)$$

trong đó

$$\delta_1 = \frac{(1-\mu)e^{-2\alpha h_2}}{1-\mu+h_2}, \qquad \delta_2 = \frac{\lambda_{\max}(P_{22}^TP_{22})\gamma_p^2}{\lambda_{\min}(Q_{1,22})(1-\mu+h_2)}\|\psi\|_{h_2}^2.$$

Chú ý rằng $\delta_1 e^{2\alpha h_2} = \frac{1-\mu}{1-\mu+h_2} < 1$. Theo Mệnh đề 1.16 và bất đẳng thức (3.23) ta có

$$f(t) \le \left[\delta_1 e^{2\alpha h_2}\sup_{-h_2\le s\le 0} f(s) + \frac{\delta_2}{1-\delta_1 e^{2\alpha h_2}}\right] e^{-2\alpha t},\ t \ge 0.$$

Hơn nữa

$$\sup_{-h_2\le s\le 0} f(s) \le \lambda_{\max}(Q_{22})\|\psi\|_{h_2}^2, \qquad \frac{\delta_2}{1-\delta_1 e^{2\alpha h_2}} = \frac{\lambda_{\max}(P_{22}^TP_{22})\gamma_p^2}{(1-\mu)\lambda_{\min}(Q_{1,22})}\|\psi\|_{h_2}^2,$$

suy ra

$$\lambda_{\min}(Q_{22})\|y_2(t)\|^2 \le f(t) \le \left[\frac{1-\mu}{1-\mu+h_2}\lambda_{\max}(Q_{22}) + \frac{\lambda_{max}(P_{22}^TP_{22})\gamma_p^2}{(1-\mu)\lambda_{\min}(Q_{1,22})}\right]\|\psi\|_{h_2}^2 e^{-2\alpha t},\ t \ge 0.$$

Do đó

$$\|y_2(t)\| \leq \nu_2 \|\psi\|_{h_2} e^{-\alpha t},\ t \geq 0,$$

trong đó

$$\nu_2^2 = \left[\frac{(1-\mu)\lambda_{\max}(Q_{22})}{(1-\mu+h_2)\lambda_{\min}(Q_{22})} + \frac{\lambda_{\max}(P_{22}^T P_{22})\gamma_p^2}{(1-\mu)\lambda_{\min}(Q_{1,22})\lambda_{\min}(Q_{22})} \right].$$

Cuối cùng, quay lại với điều kiện $x(t) = \overline{N} y(t)$, ta có

$$\|x(t,\varphi)\| \leq \|\overline{N}\| \sqrt{\|y_1(t)\|^2 + \|y_2(t)\|^2} \leq \nu \|\varphi\|_{h_2} e^{-\alpha t},\ t \geq 0,$$

trong đó $\nu = \|\overline{N}\| \|\overline{N}^{-1}\| \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$.

□

Nhận xét 3.3. Bài báo [4] đã đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định tiệm cận cho hệ suy biến có nhiễu phi tuyến có trễ biến thiên dạng khoảng. Khác với bài báo trên, trong luận văn này chúng tôi đã áp dụng kỹ thuật chứng minh trong bài báo [10] và thêm một số đánh giá mới để đưa ra một điều kiện đủ mới về tính $\alpha-$ổn định mũ cho lớp hệ phương trình vi phân suy biến với nhiễu phi tuyến có trễ biến thiên dạng khoảng.

Nhận xét 3.4. Chú ý rằng điều kiện (3.2) trong Định lý 3.2 không phải là một bất đẳng thức ma trận tuyến tính chặt. Mà công cụ Matlab chỉ giải được các bất đẳng thức ma trận tuyến tính chặt. Để khắc phục điều này, ta sẽ đưa điều kiện (3.2) về dạng chặt như sau. Cho P là một ma trận đối xứng, xác định dương, R là một ma trận đủ hạng theo cột sao cho $E^T R = 0$ và L là một ma trận bất kì có số chiều thích hợp. Đặt $\mathcal{P} := (PE + RL)^T$ thì ta có ngay $\mathcal{P}E = E^T \mathcal{P}^T = E^T PE \geq 0$, tức là điều kiện (3.2) trong Định lý 3.2 được thỏa mãn. Vì vậy, chỉ cần thay P bởi $\mathcal{P} := (PE + RL)^T$ vào trong bất đẳng thức ma trận tuyến tính (3.3) là ta đã đưa hai điều kiện đó về một bất đẳng thức ma trận tuyến tính chặt.

Từ nhận xét trên, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 3.5. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ (3.1) là $\alpha-$ổn định mũ chấp nhận được nếu tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $Q, Q_i, W_i, i = 1, 2$, các ma trận có số chiều thích hợp $P, L, X_i, Y_i, Z_i, U_i, i = 1, 2$, và các số dương ϵ_1, ϵ_2 sao cho các bất đẳng thức ma trận tuyến tính chặt sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} \widehat{\Xi}_{11} & \widehat{\Xi}_{12} & Z_1E & -Y_1E & PG_1 & PG_2 & \gamma_{21}X_1 & \gamma_{22}Y_1 & \gamma_{22}Z_1 & \Xi_{110} \\ * & \Xi_{22} & Z_2E & -Y_2E & 0 & 0 & \gamma_{21}X_2 & \gamma_{22}Y_2 & \gamma_{22}Z_2 & \Xi_{210} \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma_{21}W_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\gamma_{22}W_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{1010} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.24}$$

$h_2Q - Q_2 < 0,$

trong đó các $\Xi_{110}, \Xi_{210}, \Xi_{22}, \Xi_{33}, \Xi_{44}, \Xi_{88}, \Xi_{1010}$ được xác định như Định lý (3.2), còn

$$\widehat{\Xi}_{11} = A^TPE + E^TPA + A^TRL + L^TR^TA + Q + Q_1 + Q_2$$
$$+ 2\alpha E^TPE + X_1E + E^TX_1^T + \epsilon_1U_1^TU_1,$$
$$\widehat{\Xi}_{12} = E^TPD + L^TR^TD - X_1E + E^TX_2^T + Y_1E - Z_1E,$$

với R là ma trận được chọn trước thỏa mãn $E^TR = 0$.

3.2 Ví dụ số

Sau đây chúng tôi đưa ra ví dụ số minh họa cho Định lý 3.2 dựa trên Hệ quả 3.5 ở trên.

Ví dụ 3.6. Xét hệ suy biến (3.1) với

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -4.7 & 0.4 \\ -4.9 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.95 \\ -1.1 & -1.75 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trong ví dụ này, ta chọn ma trận $R = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$. Khi đó $E^T R = 0$. Hàm trễ $h(t) = 0.1 + 0.9 \sin^2 \frac{5}{9} t$. Ta có $h_1 = 0.1, h_2 = 0.9, \mu = 0.5$. Cho trước số $\alpha = 0.3$. Bằng cách sử dụng hộp công cụ Matlab, bất đẳng thức ma trận tuyến tính trong Hệ quả 3.5 được thỏa mãn với $\epsilon_1 = 0.6644, \epsilon_2 = 0.1638$ và các ma trận

$$P = \begin{bmatrix} 0.4874 & -0.2899 \\ -0.2899 & 0.5968 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 6.0227 & -1.4398 \\ -1.4398 & 0.7326 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.8399 & -0.5211 \\ -0.5211 & 0.8285 \end{bmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 5.8335 & -1.6319 \\ -1.6319 & 1.3795 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.6309 & -0.5922 \\ -0.5922 & 0.7004 \end{bmatrix}, \qquad W_2 = \begin{bmatrix} 0.4587 & -0.3098 \\ -0.3098 & 0.2796 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} -0.1439 & 0.2184 \\ 0.2593 & -0.3647 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -0.1180 & 0.1732 \\ -0.1578 & 0.2521 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0.0585 & -0.0875 \\ 0.0017 & -0.0042 \end{bmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 0.0313 & -0.0464 \\ 0.0152 & -0.0260 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -0.0414 & 0.0665 \\ -0.0008 & 0.0043 \end{bmatrix}, \qquad Z_2 = \begin{bmatrix} -0.0236 & 0.0363 \\ -0.0090 & 0.0205 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -3.0740 & 1.6490 \end{bmatrix}.$$

Ta chọn hai ma trận suy biến $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad N = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ sao cho

$$\overline{E} = MEN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bằng các tính toán đơn giản, ta thu được

$$\lambda_1 = 0.5562,\ \lambda_2 = 2.0907,\ \nu_1^2 = 3.7589,\ \nu_2^2 = 88.7113,\ \gamma_p = 0.6161.$$

Khi đó theo Hệ quả 3.5, hệ (3.1) là 0.3−ổn định mũ chấp nhận được. Hơn nữa, nghiệm $x(t, \phi)$ bất kì của hệ thỏa mãn đánh giá:

$$\|x(t, \phi)\| \leq 115.7796\, \|\phi\|_{h_2}\, e^{-0.3t}, \quad t \geq 0.$$

Kết luận

Trong luận văn này, chúng tôi đã đạt được một số kết quả như sau:

1. Trình bày một số kiến thức cơ sở về bài toán ổn định cho hệ phương trình vi phân thường, hệ phương trình vi phân có trễ và hệ phương trình vi phân suy biến tuyến tính có trễ. Đồng thời giới thiệu phương pháp hàm Lyapunov để xét tính ổn định của hệ phương trình vi phân có trễ.

2. Chứng minh chi tiết điều kiện đủ cho bài toán ổn định mũ hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến với trễ hằng bằng phương pháp phổ trong bài báo [13].

3. Đưa ra một điều kiện đủ mới cho bài toán ổn định mũ hệ phương trình vi phân suy biến trễ biến thiên dạng khoảng với nhiễu phi tuyến bằng việc áp dụng kĩ thuật chứng minh của bài báo [10] và xử lý nhiễu phi tuyến bằng việc đánh giá một số bất đẳng thức dựa trên phương pháp hàm Lyapunov. Các kết quả đều được minh họa bằng các ví dụ kiểm tra cụ thể.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Vũ Ngọc Phát (2001), *Nhập môn lý thuyết điều khiển toán học*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[2] S. Boyd, El. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994), *Linear Matrix Inequalities and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematic, vol. 15, SIAM, Philadelphia.

[3] R. Bronson (1989), *Schaum's outline series: Theory and Problems of Matrix Operations*. New York: McGraw- Hill, 146.

[4] Y. Ding, Sh. Zhong and W. Chen (2011), "A delay- rangle- dependent uniformly asymptotic stability criterion for a class of nonlinear singular systems", *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, (12), 1152-1162.

[5] E. Fridman (2002), "Stability of linear descriptor systems with delay: A Lyapunov-based approach", *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, (273), 24-44.

[6] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub and M. Chilali (1995), *LMI Control Toolbox for use with MATLAB*, The Mathworks, Inc..

[7] K. Gu (2000), "An integral inequality in the stabilitys problem of time delay systems", *IEEE Control Systems Society and Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE Publisher, New York.

[8] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel (1993), *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[9] A. Haidar and E.K. Boukas (2009), " Exponential stability of singular systems with multiple time - varying delays", *Automatica*, (45), 539-545.

[10] L. H. Vu, L. V. Hien and V. N. Phat (2012), "New stability analysis of singular systems with mixed interval time-varying delays", Preprint of VIASM, (1229), 1-20.

[11] L. V. Hien and V. N. Phat (2009), "Exponential stability and stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems", *Journal of Franklin Inst.*, (346), 611-625.

[12] V. L. Kharitonov and D. Hinrichsen (2004), "Exponential estimate for time delay systems", *Systems and Control Letters*, (53), 395-405.

[13] Y. Sun (2007), "Stability criterion for a class of descriptor systems with discrete and distributed time delays", *Chaos Solitons and Fractals*, (33), 986-993.

[14] S. Xu, PV. Dooren , R. Stefan and J. Lam (2002), "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty", *IEEE Trans. Automat Control*, (47), 1122-1128.

[15] T. Yoshizawa (1966), *Stability Theory by Lyapunov Second Method,* The Mathematical Society of Japan, Tokyo.