VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
**VIỆN TOÁN HỌC**

———————o0o———————

# HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU VÀ ÁNH XẠ NGHIỆM CỦA CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU CÓ THAM SỐ

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

***Chuyên ngành: Toán giải tích***
***Mã số: 60 46 01 02***

*Học viên thực hiện:* Dương Thị Việt An
*Lớp:* Cao học K19
*Người hướng dẫn khoa học:* GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên

**HÀ NỘI - 2013**

# Mục lục

# Danh mục ký hiệu

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | trường số thực |
| $\overline{\mathbb{R}}$ | tập số thực suy rộng |
| $\mathbb{N}$ | tập các số nguyên dương |
| $\emptyset$ | tập rỗng |
| $\mathbb{R}^n$ | không gian Euclide $n$-chiều |
| $\lvert x\rvert$ | giá trị tuyệt đối của $x$ |
| $\lvert\lvert x\rvert\rvert$ | chuẩn của véctơ $x$ |
| $\overline{B}_X$ | hình cầu đơn vị đóng trong $X$ |
| $B(x,\rho)$ | hình cầu mở tâm $x$, bán kính $\rho > 0$ |
| $\overline{B}(x,\rho)$ | hình cầu đóng tâm $x$, bán kính $\rho > 0$ |
| $\mathcal{N}(x)$ | họ các lân cận của điểm $x$ |
| $\operatorname{int} A$ | phần trong của tập $A$ |
| $\overline{A}$ | bao đóng của tập $A$ |
| $\operatorname{cone} A$ | hình nón sinh của tập $A$ |
| Limsup | giới hạn trên theo nghĩa Painlevé-Kuratowski |
| $\sup\limits_{x\in K} f(x)$ | supremum của tập số thực $\{f(x) \mid x \in K\}$ |
| $\inf\limits_{x\in K} f(x)$ | infimum của tập số thực $\{f(x) \mid x \in K\}$ |
| $\widehat{N}(\bar{x};\Omega)$ | nón pháp tuyến Fréchet của $\Omega$ tại $\bar{x}$ |
| $N(\bar{x};\Omega)$ | nón pháp tuyến Mordukhovich của $\Omega$ tại $\bar{x}$ |
| $\widehat{\partial} f(x)$ | dưới vi phân Fréchet của $f$ tại $x$ |
| $\widehat{\partial}^+ f(x)$ | dưới vi phân Fréchet trên của $f$ tại $x$ |

| | |
|---|---|
| $\partial f(x)$ | dưới vi phân Mordukhovich của $f$ tại $x$ |
| $\partial^\infty f(x)$ | dưới vi phân suy biến của $f$ tại $x$ |
| $F : X \rightrightarrows Y$ | ánh xạ đa trị từ $X$ vào $Y$ |
| $\operatorname{dom} F$ | miền hữu hiệu của ánh xạ $F$ |
| $\operatorname{gph} F$ | đồ thị của $F$ |
| $\widehat{D}^*F(\bar{x},\bar{y})(\cdot)$ | đối đạo hàm Fréchet của $F$ tại $(\bar{x},\bar{y})$ |
| $D^*F(\bar{x},\bar{y})(\cdot)$ | đối đạo hàm Mordukhovich của $F$ tại $(\bar{x},\bar{y})$ |
| $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ | $x \to \bar{x}$ và $x \in \Omega$ |
| $x \xrightarrow{f} \bar{x}$ | $x \to \bar{x}$ và $f(x) \to f(\bar{x})$ |
| $\alpha \downarrow \bar{\alpha}$ | $\alpha \to \bar{\alpha}$ và $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$ |
| $\mathcal{L}_\alpha f = \{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ | tập mức dưới $\alpha$ của hàm $f$ |

# Lời nói đầu

Nếu bài toán quy hoạch toán học là phụ thuộc tham số, tức là các hàm ràng buộc và hàm mục tiêu của nó phụ thuộc vào các tham số nào đó, thì giá trị tối ưu là một hàm của tham số và ánh xạ nghiệm là một ánh xạ đa trị theo tham số của bài toán. Nói chung thì hàm giá trị tối ưu là một hàm khá phức tạp theo tham số; nó thường không khả vi theo tham số, dù rằng bài toán được xét là bài toán quy hoạch với các hàm trơn theo tất cả các biến và theo tham số. Vì thế, người ta thường đặt vấn đề tìm các công thức tính toán đạo hàm theo hướng suy rộng (đạo hàm theo hướng Dini, đạo hàm theo hướng Dini-Hadarmard, đạo hàm suy rộng theo hướng Clarke,...) và các công thức đánh giá dưới vi phân (dưới vi phân theo nghĩa Giải tích lồi, dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Fréchet, dưới vi phân qua giới hạn - tức là dưới vi phân Mordukhovich,...) của hàm giá trị tối ưu. Người ta cũng quan tâm đến các điều kiện đủ cho tính liên tục, tính Lipschitz, và tính khả vi theo hướng của ánh xạ nghiệm.

Các nghiên cứu về tính chất khả vi của hàm giá trị tối ưu và của ánh xạ nghiệm trong quy hoạch có tham số được xếp vào chủ đề *tính ổn định vi phân* của các bài toán tối ưu. J.-P. Aubin (1998), A. Auslender (1979), J. F. Bonnans và A. Shapiro (2000), P. H. Dien và N. D. Yen (1991), J. Gauvin và F. Dubeau (1982, 1984), B. Gollan (1984), R. T. Rockafellar (1982), B. S. Mordukhovich, N. M. Nam và N. D. Yen (2009), L. Thibault (1991), và rất nhiều tác giả khác, đã có những đóng góp cho hướng nghiên cứu này.

Luận văn này trình bày vắn tắt một số nội dung của bài báo [7] và đưa ra *một số kết quả mới về tính ổn định vi phân của bài toán quy hoạch lồi trong không gian vô hạn chiều, có ràng buộc dạng bao hàm thức được cho bởi ánh xạ đa trị*. Cụ thể là, nhằm loại bỏ giả thiết về tính khác rỗng của dưới vi phân trên của hàm mục tiêu trong [7, Theorem 1], một giả thiết không thể thỏa mãn nếu hàm mục tiêu là lồi và không khả vi Fréchet, chúng tôi tập trung xét các bài toán quy hoạch lồi có tham số trên không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff (tức là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương tách) và áp dụng một kết quả cơ bản của Giải tích lồi, đó là Định lý Moreau-Rockafellar. Kết quả thu được cũng cho phép loại bỏ các giả thiết về tính compắc pháp tuyến theo dãy (tính chất SNC) của ánh xạ tập ràng buộc, tính epi compắc pháp tuyến theo dãy (tính chất SNEC) của hàm mục tiêu, và tính $\mu$-nửa liên tục dưới nội bộ ($\mu$-inner semicontinuity), cũng như tính chất $\mu$-bán-compắc nội bộ ($\mu$-inner semicompactness) của ánh xạ nghiệm trong [7, Theorem 7], nếu xét các bài toán quy hoạch lồi. Không gian được xét trong Chương 4 của luận văn này cũng tổng quát hơn không gian được xét trong [7]: Chúng ta xét các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff thay cho các không gian Banach.

Như vậy, các kết quả thu được ở Chương 4 của luận văn này có nguồn gốc từ các nghiên cứu trong bài báo [7] của B. S. Mordukhovich, N. M. Nam và N. D. Yen, đồng thời cũng là kết quả của sự đào sâu các nghiên cứu đó cho trường hợp bài toán quy hoạch lồi.

Một điều thú vị là, để thu được tính ổn định vi phân trong quy hoạch lồi có tham số, người ta [3] có thể sử dụng Định lý đối ngẫu Fenchel-Moreau (xem [5, Theorem 1, tr. 175]): *Một hàm chính thường* $f : X \to (-\infty, +\infty]$, *với* $X$ *là không gian véctơ tôpô lồi địa phương Hausdorff, có đối ngẫu* $f^{**}$ *trùng với nó khi và chỉ khi* $f$ *là lồi và đóng*. (Tính đóng ở đây được hiểu là tập trên đồ thị $\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \mid f(x) \le \alpha\}$ là đóng trong không gian tích $X \times \mathbb{R}$. Nếu $X$ là không gian có cơ sở lân cận gốc đếm được, điều này tương đương với đòi hỏi $f$ là nửa liên tục dưới tại mọi điểm trên $X$). Cụ thể hơn, bằng cách sử dụng định lý Fenchel-Moreau vừa nêu và một loạt kết quả bổ trợ khá phức tạp, J.-P. Aubin [3, Problem 35 - Subdifferentials of Marginal Functions, tr. 335] đã thu được một công thức tính dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu dưới giả thiết chính quy. Cách tiếp cận này đòi hỏi hàm mục tiêu của bài toán được xét phải là lồi, *nửa liên tục dưới*, và ánh xạ tập ràng buộc phải là lồi và *có đồ thị đóng*. Cách tiếp cận sử dụng Định lý Moreau-Rockafellar nói trên không cần hai giả thiết phụ này. Vì vậy, mặc dù phải đòi hỏi giả thiết chính quy đôi chút mạnh hơn giả thiết chính quy của Aubin, kết quả của luận văn được chứng minh cho lớp bài toán quy hoạch lồi rộng hơn, và không trùng với kết quả của Aubin khi ta xét trường hợp đặc biệt, ở đó các không gian là Hilbert và hàm mục tiêu không phụ thuộc tham số.

Khi được áp dụng cho các bài toán điều khiển tối ưu có tham số, với hàm mục tiêu lồi và hệ động lực tuyến tính, cả các hệ rời rạc lẫn các hệ liên tục, các kết quả trong chương cuối của luận văn có thể đưa đến những quy tắc tính toán chính xác dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu thông qua các dữ liệu của bài toán đã cho.

Luận văn gồm phần mở đầu, phần kết luận, danh mục tài liệu tham khảo, và bốn chương với nội dung như sau.

Chương 1 *"Kiến thức chuẩn bị"* trình bày các khái niệm về tính khả vi, tính khả vi chặt, nón pháp tuyến, dưới vi phân, đối đạo hàm, và hàm giá trị tối ưu.

Chương 2 *"Dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu"* khảo sát một đánh giá dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu và một số ví dụ minh họa, dựa trên bài báo [7].

Chương 3 *"Dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu"* trình bày không có chứng minh một đánh giá dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu và một ví dụ minh họa, dựa trên bài báo [7].

Chương 4 *"Tính ổn định vi phân của bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc bao hàm thức"* chứng minh một số kết quả mới về tính ổn định vi phân của bài toán quy hoạch lồi trong các trường hợp bài toán có ràng buộc bao hàm thức và bài toán có ràng buộc phiếm hàm. Cũng trong chương này, các kết quả của luận văn được so sánh với kết quả của J.-P. Aubin trong [3].

Luận văn này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên. Tác giả chân thành cảm ơn thầy Yên đã tận tình hướng dẫn tác giả thực hiện các nghiên cứu theo đề tài của luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, nhờ các bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, tác giả đã trau dồi thêm nhiều kiến thức phục vụ cho công việc chuyên môn của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Ban chủ nhiệm Khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả khi đi học tập và nghiên cứu ở Viện Toán học.

Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các nghiên cứu sinh của Giáo sư Nguyễn Đông Yên đã luôn động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Hà Nội, ngày 25 tháng 8 năm 2013

Tác giả

Dương Thị Việt An

# Chương 1

# Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm cơ bản của giải tích biến phân và đa trị, đó là *nón pháp tuyến của các tập hợp*, *dưới vi phân của các hàm số thực*, và *đối đạo hàm của ánh xạ đa trị*. Mục cuối chương giới thiệu khái niệm *hàm giá trị tối ưu trong bài toán quy hoạch toán học có tham số với ràng buộc bao hàm thức* - là đối tượng nghiên cứu chính của các chương sau.

## 1.1 Tính khả vi và khả vi chặt

Cho $X, Y$ là các không gian Banach. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *khả vi Fréchet* tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $\nabla f(\bar{x}) : X \to Y$, gọi là *đạo hàm Fréchet* của $f$ tại $\bar{x}$, sao cho

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})}{||x - \bar{x}||} = 0. \tag{1.1}$$

Đạo hàm Fréchet là khái niệm cơ bản trong giải tích. Khái niệm sau là ít quen thuộc hơn.

**Định nghĩa 1.1.1.** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *khả vi chặt* tại $\bar{x}$ nếu $f$ có đạo hàm Fréchet $\nabla f(\bar{x})$ tại $\bar{x}$ và nếu

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ u \to \bar{x}}} \frac{f(x) - f(u) - \nabla f(\bar{x})(x - u)}{||x - u||} = 0. \tag{1.2}$$

**Nhận xét 1.1.1.** Do định nghĩa, nếu $f$ khả vi chặt tại một điểm nào đó, thì $f$ phải khả vi Fréchet tại điểm đó. Điều ngược lại là không đúng, tức là có những hàm số khả vi Fréchet mà không khả vi chặt.

**Ví dụ 1.1.1.** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ.} \end{cases}$$

Hàm $f$ là khả vi Fréchet nhưng không khả vi chặt tại $\bar{x} = 0$. Thật vậy, dễ thấy rằng $\nabla f(\bar{x}) = 0$ là đạo hàm Fréchet tại $\bar{x}$. Để chứng minh $f$ không khả vi chặt tại $\bar{x} = 0$, ta lấy hai dãy

$$x_k = \frac{1}{k}, \ \ u_k = \frac{\sqrt{2}}{k^2} + \frac{1}{k}, \ \ k = 1, 2, 3, ...$$

Khi đó, nếu (1.2) nghiệm đúng thì ta phải có

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(u_k)}{||x_k - u_k||} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{k^2}}{\left|\dfrac{-\sqrt{2}}{k^2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

mâu thuẫn. Vậy $f$ không khả vi chặt tại $\bar{x} = 0$.

**Mệnh đề 1.1.1.** (Xem [6, Vol. I, tr. 19]) *Nếu $f$ khả vi Fréchet trong lân cận của $\bar{x}$ và $\nabla f(.)$ liên tục trong lân cận ấy, thì $f$ khả vi chặt tại $\bar{x}$.*

## 1.2 Nón pháp tuyến

Cho $X$ là không gian Banach, $X^*$ là không gian đối ngẫu của $X$. Với ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows X^*$ được cho tùy ý, ký hiệu

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x}} F(x) := \Big\{ x^* \in X^* : \ \exists \ x_k \to \bar{x}, \ x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*, \\ x_k^* \in F(x_k) \ \ \forall k = 1, 2, \ldots \Big\}$$

được dùng để chỉ *giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski* trong tôpô chuẩn của $X$ và tôpô yếu$^*$ (được ký hiệu bằng chữ $w^*$) của

$X^*$. Ở đây, ký hiệu $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ được dùng để chỉ sự hội tụ yếu* của dãy $\{x_k^*\} \subset X^*$ tới phần tử $x^* \in X^*$. Ta có $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ khi và chỉ khi

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k^*, u\rangle = \langle x^*, u\rangle, \quad \forall u \in X.$$

Với $\Omega \subset X$ là một tập cho trước, ký hiệu $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ có nghĩa là $x \to \bar{x}$ và $x \in \Omega$.

**Định nghĩa 1.2.1.** (Xem [6, Vol. I, tr. 4 ]) Cho $\Omega$ là tập con khác rỗng của $X$.

(i) Với $x \in \Omega$ và $\varepsilon \geq 0$, *tập các véctơ $\varepsilon$-pháp tuyến* của $\Omega$ tại $x$ được cho bởi

$$\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) := \Big\{x^* \in X^* \mid \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x\rangle}{||u - x||} \leq \varepsilon\Big\}. \tag{1.3}$$

Với $\varepsilon = 0$, tập hợp $\widehat{N}(x;\Omega) := \widehat{N}_0(x;\Omega)$ được gọi là *nón pháp tuyến Fréchet* của $\Omega$ tại $x$. Nếu $x \notin \Omega$ thì ta đặt $\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) = \emptyset$ với mọi $\varepsilon \geq 0$.

(ii) Cho $\bar{x} \in \Omega$. Tập hợp

$$N(\bar{x};\Omega) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{x\to\bar{x}\\ \varepsilon\downarrow 0}} \widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega), \tag{1.4}$$

được gọi là *nón pháp tuyến Mordukhovich* hay *nón pháp tuyến qua giới hạn* của $\Omega$ tại $\bar{x}$. Ta đặt $N(\bar{x};\Omega) = \emptyset$ với $\bar{x} \notin \Omega$.

**Nhận xét 1.2.1.** Hiển nhiên ta có $\widehat{N}(x;\Omega) \subset N(x;\Omega)$ với mọi $\Omega \subset X$ và với mọi $x \in \Omega$. Ngoài ra, cũng dễ thấy rằng tập $\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega)$ là lồi với mọi $x \in \Omega$ và $\varepsilon \geq 0$.

**Mệnh đề 1.2.1.** (Xem [6, Vol. I, tr. 6]) *Cho $\Omega$ là tập lồi. Khi đó,*

$$\widehat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega) = \big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq \varepsilon||x - \bar{x}||, \ \forall x \in \Omega\big\},$$

*với mọi $\varepsilon \geq 0$ và $\bar{x} \in \Omega$. Đặc biệt, tập $\widehat{N}(\bar{x};\Omega)$ trùng với nón pháp tuyến theo nghĩa giải tích lồi, tức là*

$$\widehat{N}(\bar{x};\Omega) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq 0, \ \forall x \in \Omega\}.$$

Vì các khái niệm trong Định nghĩa 1.2.1 có tính địa phương, tức là chúng chỉ phụ thuộc vào cấu trúc của $\Omega$ trong một lân cận được lấy tùy ý của điểm được xét, nên ta có thể phát biểu kết quả ở Mệnh đề 1.2.1 cho các tập lồi địa phương như sau.

**Mệnh đề 1.2.2.** (Xem [6, Vol. I, tr. 7]) *Cho $\Omega \subset X$ và $\bar{x} \in \Omega$. Nếu tồn tại lân cận $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$, ở đó $\mathcal{N}(\bar{x})$ ký hiệu họ các lân cận của điểm $\bar{x}$, sao cho $\Omega \cap U$ là lồi, thì*

$$\widehat{N}_{\varepsilon}(\bar{x}; \Omega) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq \varepsilon ||x - \bar{x}||, \ \ \forall x \in \Omega \cap U\}$$

*và*

$$N(\bar{x}; \Omega) = \widehat{N}(\bar{x}; \Omega) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leq 0, \ \ \forall x \in \Omega \cap U\}.$$

Tiếp theo, chúng ta trình bày hai công thức biểu diễn đặc biệt cho nón pháp tuyến Mordukhovich của các tập con đóng trong không gian hữu hạn chiều $X = \mathbb{R}^n$. Vì các chuẩn trong $\mathbb{R}^n$ là tương đương với nhau, nên ta luôn chọn chuẩn Euclide

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

trên $\mathbb{R}^n$, trừ một số trường hợp riêng mà ta sẽ chỉ rõ chuẩn cụ thể trên $X$. Trong trường hợp này, $X^* = X = \mathbb{R}^n$. Cho trước tập hợp khác rỗng $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ta xét *hàm khoảng cách*

$$\text{dist}\,(x; \Omega) := \inf_{u \in \Omega} ||x - u||,$$

và định nghĩa *hình chiếu Euclide* của $x$ lên $\Omega$ cho bởi

$$\Pi(x; \Omega) := \{w \in \Omega \mid ||x - w|| = \text{dist}\,(x; \Omega)\}.$$

Nếu $\Omega$ là tập đóng thì tập $\Pi(x; \Omega)$ khác rỗng với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\Omega$ là tập lồi thì $\Pi(x; \Omega)$ có không quá một phần tử với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Định lý sau đây mô tả nón pháp tuyến qua giới hạn của các tập $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là *đóng địa phương* tại $\bar{x}$, nghĩa là tồn tại lân cận $U$ của $\bar{x}$ sao cho $\Omega \cap U$ là đóng.

**Định lý 1.2.1.** (Xem [6, Vol. I, tr. 8]) *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập đóng địa phương xung quanh $\bar{x} \in \Omega$. Khi đó, ta có*

$$N(\bar{x};\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to \bar{x}} \widehat{N}(x;\Omega) \tag{1.5}$$

*và*

$$N(\bar{x};\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to \bar{x}} [\mathrm{cone}(x - \Pi(x;\Omega))], \tag{1.6}$$

*trong đó*

$$\mathrm{cone}\, M := \{\alpha x \mid \alpha \geq 0,\ x \in M\}$$

*là hình nón sinh bởi $M$.*

**Định nghĩa 1.2.2.** (Xem [6, Vol. I, tr. 196 ]) *Không gian Banach $X$ được gọi là không gian Asplund nếu mọi hàm lồi, liên tục $\varphi : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập con lồi mở $U$ của $X$ là khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của $U$.*

**Nhận xét 1.2.2.** Các tính chất sau nghiệm đúng (xem [6, Vol. I, tr. 196]):

(i) *Mọi không gian Banach phản xạ đều là không gian Asplund.*

(ii) *Mọi không gian Banach có hàm chuẩn khả vi Fréchet tại những điểm khác 0, đều là không gian Asplund.*

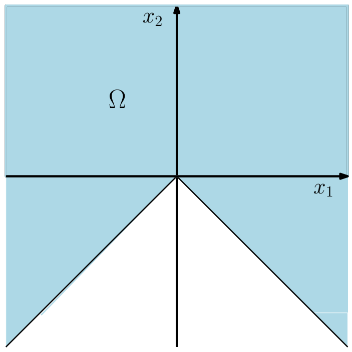
**Nhận xét 1.2.3.** (Xem [6, Vol. I, tr. 221]) *Nếu $X$ là không gian Asplund, thì với mọi tập đóng $\Omega \subset X$ và với mọi $\bar{x} \in \Omega$ ta có*

$$N(\bar{x};\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to \bar{x}} \widehat{N}(x;\Omega).$$

Sau đây là một số ví dụ minh họa việc tính nón pháp tuyến.

**Ví dụ 1.2.1.** Cho $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq -|x_1|\}$ và $\bar{x} = (0,0)$. Giả sử $(x_1^*, x_2^*) \in \widehat{N}(\bar{x};\Omega)$. Khi đó

$$\limsup_{(u_1,u_2) \xrightarrow{\Omega} (0,0)} \frac{x_1^* u_1 + x_2^* u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \leq 0. \tag{1.7}$$




Hình 1

Lấy $(u_1^k, u_2^k) = (1/k, 0) \in \Omega,\ k \in \mathbb{N}$, ta có $(u_1^k, u_2^k) \to (0,0)$ khi $k \to \infty$. Từ (1.7) ta có

$$0 \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{x_1^* u_1^k + x_2^* u_2^k}{\sqrt{(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2}} = x_1^*.$$

Do đó $x_1^* \leq 0$. Lấy $(u_1^k, u_2^k) = (-1/k, 0) \in \Omega,\ k \in \mathbb{N}$, ta có $(u_1^k, u_2^k) \to (0,0)$ khi $k \to \infty$. Từ (1.7) ta có

$$0 \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{x_1^* u_1^k + x_2^* u_2^k}{\sqrt{(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2}} = -x_1^*.$$

Do đó, $x_1^* \geq 0$. Vậy $x_1^* = 0$. Do tính chất đối xứng của $x_1^*$ và $x_2^*$ ta cũng có $x_2^* = 0$. Ngược lại, với $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$ thì (1.7) được thỏa mãn. Vậy $\widehat{N}(\bar{x}; \Omega) = \{0\}$. Với $(x_1, x_2) \in \Omega$, ta có

$$\widehat{N}((x_1, x_2); \Omega) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } (x_1, x_2) \in \operatorname{int} \Omega, \\ \{(a, -a) \mid a \geq 0\} & \text{nếu } x_1 = x_2, \\ \{(a, a) \mid a \leq 0\} & \text{nếu } x_1 = -x_2. \end{cases}$$

Khi đó, theo Định lý 1.2.1,

$$\begin{aligned} N(\bar{x}; \Omega) &= \operatorname*{Lim\,sup}_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \widehat{N}((x_1, x_2); \Omega) \\ &= \{(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^* = -|x_1^*|\}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 1.2.2.** Cho $\Omega = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\big\}$ và $\bar{x} = (0,0)$.

Trong trường hợp này, $\Omega$ là tập lồi. Vì thế, theo Mệnh đề 1.2.2,

$$\begin{aligned} N(\bar{x};\Omega) &= \widehat{N}(\bar{x};\Omega) \\ &= \left\{(x_1^*,x_2^*)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^*x_1+x_2^*x_2\le 0,\ \ \forall(x_1,x_2)\in\Omega\right\} \\ &= \left\{(x_1^*,x_2^*)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^*\le 0,\ x_2^*\le 0\right\}. \end{aligned}$$

## 1.3 Dưới vi phân

Xét hàm $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nhận giá trị trong tập số thực suy rộng $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$. Ta nói $f$ là *chính thường* (proper) nếu như $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in X$, và *miền hữu hiệu*

$$\operatorname{dom} f := \{x\in X \mid f(x)<\infty\}$$

là khác rỗng. Tập *trên đồ thị* (epigraph) và *dưới đồ thị* (hypograph) của $f$ tương ứng được cho bởi

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\alpha)\in X\times\mathbb{R} \mid \alpha\ge f(x)\}$$

và

$$\operatorname{hypo} f := \{(x,\alpha)\in X\times\mathbb{R} \mid \alpha\le f(x)\}.$$

Sau đây, ký hiệu $x \xrightarrow{f} \bar{x}$ có nghĩa là $x\to\bar{x}$ và $f(x)\to f(\bar{x})$.

**Định nghĩa 1.3.1.** (Xem [6, Vol. I, tr. 82]) Cho $X$ là không gian Banach và cho hàm số $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Giả sử rằng $\bar{x}\in X$ và $|f(\bar{x})|<\infty$.

(i) Tập hợp

$$\widehat{\partial} f(\bar{x}) := \left\{x^*\in X^* \mid (x^*,-1)\in \widehat{N}((\bar{x},f(\bar{x}));\operatorname{epi} f)\right\} \tag{1.8}$$

được gọi là *dưới vi phân Fréchet* của $f$ tại $\bar{x}$.

(ii) Tập hợp

$$\widehat{\partial}^+ f(\bar{x}) := \left\{x^*\in X^* \mid (-x^*,1)\in \widehat{N}((\bar{x},f(\bar{x}));\operatorname{hypo} f)\right\} \tag{1.9}$$

được gọi là *dưới vi phân Fréchet trên* của $f$ tại $\bar{x}$.

(iii) Tập hợp

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)\} \tag{1.10}$$

được gọi là *dưới vi phân Mordukhovich* hay *dưới vi phân qua giới hạn* của $f$ tại $\bar{x}$.

(iv) Tập hợp

$$\partial^\infty f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)\} \tag{1.11}$$

được gọi là *dưới vi phân suy biến* của $f$ tại $\bar{x}$.

Trong trường hợp $|f(\bar{x})| = \infty$, ta quy ước rằng các tập $\widehat{\partial} f(\bar{x})$, $\widehat{\partial}^+ f(\bar{x}), \partial f(\bar{x})$, và $\partial^\infty f(\bar{x})$ là rỗng.

**Nhận xét 1.3.1.** (i) (Xem [6, Vol. I, tr. 90]) *Dưới vi phân Fréchet của $f$ tại $\bar{x}$ có thể được biểu diễn dưới dạng*

$$\widehat{\partial} f(\bar{x}) = \left\{ x^* \in X^* \mid \liminf_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{||x - \bar{x}||} \geq 0 \right\}. \tag{1.12}$$

(ii) *Bao hàm thức $\widehat{\partial} f(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$ đúng với mọi $x \in X$.*

(iii) (Xem [6, Vol. I, tr. 95]) *Nếu $f$ là hàm lồi thì*

$$\widehat{\partial} f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}),\ \forall x \in X\},$$

*tức là dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của $f$ tại $\bar{x}$ trùng với dưới vi phân của $f$ tại $\bar{x}$ theo nghĩa Giải tích lồi.*

Nếu $f$ là khả vi hay khả vi chặt, thì ta có các kết quả sau.

**Mệnh đề 1.3.1.** (Xem [6, Vol. I, tr. 90]) *Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ với $|f(\bar{x})| < \infty$. Khi đó, $\widehat{\partial} f(\bar{x}) \neq \emptyset$ và $\widehat{\partial}^+ f(\bar{x}) \neq \emptyset$ nếu và chỉ nếu $f$ khả vi Fréchet tại $\bar{x}$. Trong trường hợp này, ta có $\widehat{\partial} f(\bar{x}) = \widehat{\partial}^+ f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$.*

**Mệnh đề 1.3.2.** (Xem [6, Vol. I, tr. 87]) *Nếu $f$ là hàm khả vi chặt tại $\bar{x}$, thì tập $\partial f(\bar{x})$ chỉ chứa một phần tử, đó là đạo hàm chặt của $f$ tại $\bar{x}$.*

**Ví dụ 1.3.1.** Xét hàm $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức $\varphi(x) = -|x|$. Ta có

$$\operatorname{epi}\varphi = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq -|x_1|\right\},$$
$$\operatorname{hypo}\varphi = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq -|x_1|\right\}.$$

Sử dụng kết quả ở Ví dụ 1.2.1 với $\Omega = \operatorname{epi}\varphi$ và $\bar{x} = 0$ ta thu được

$$\widehat{N}((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \operatorname{epi}\varphi) = \{(0,0)\},$$
$$N((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \operatorname{epi}\varphi) = \left\{(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^* = -|x_1^*|\right\}.$$

Do $\operatorname{hypo}\varphi$ là tập lồi, theo Mệnh đề 1.2.1 ta có

$$\widehat{N}((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \operatorname{hypo}\varphi) = \left\{(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^* \geq |x_1^*|\right\}.$$

Vì vậy,

$$\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) = \emptyset, \quad \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}) = [-1, 1],$$
$$\partial\varphi(\bar{x}) = \{-1; 1\}, \quad \partial^\infty\varphi(\bar{x}) = \{0\}.$$

Trong phần cuối mục này, chúng ta trình bày mối liên hệ giữa nón pháp tuyến và dưới vi phân thông qua hàm chỉ.

Cho $X$ là không gian Banach và tập hợp $\Omega \subset X$. Hàm nhận giá trị thực suy rộng $\delta(\cdot; \Omega) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ với

$$\delta(x; \Omega) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in \Omega, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin \Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

được gọi là *hàm chỉ* (indicator function) của tập $\Omega$.

**Mệnh đề 1.3.3.** (Xem [6, Vol. I, tr. 84 và tr. 88]) *Với mọi $\Omega \subset X$ và với mọi $\bar{x} \in \Omega$, ta có*

$$\widehat{\partial}\delta(\bar{x}; \Omega) = \widehat{N}(\bar{x}; \Omega) \tag{1.14}$$

*và*

$$\partial^\infty\delta(\bar{x}; \Omega) = \partial\delta(\bar{x}; \Omega) = N(\bar{x}; \Omega). \tag{1.15}$$

## 1.4 Đối đạo hàm

Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian Banach. *Đồ thị* $\operatorname{gph} F$ và *miền hữu hiệu* $\operatorname{dom} F$ của $F$ được xác định bởi các công thức sau

$$\operatorname{gph} F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\},$$
$$\operatorname{dom} F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

Được trang bị bởi chuẩn $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$, không gian tích $X \times Y$ là một không gian Banach.

Nhờ các khái niệm nón tiếp tuyến đã được xét ở trên, ta có thể định nghĩa các khái niệm đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich (còn được gọi là đối đạo hàm qua giới hạn) của ánh xạ đa trị như sau.

**Định nghĩa 1.4.1.** (Xem [6, Vol. I, tr. 40])

(i) *Đối đạo hàm Fréchet* của $F$ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị $\widehat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) : Y^* \rightrightarrows X^*$ được cho bởi công thức

$$\widehat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \Big\{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in \widehat{N}((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} F)\Big\}, \ \forall y^* \in Y^*. \tag{1.16}$$

(ii) *Đối đạo hàm Mordukhovich* của $F$ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị $D^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) : Y^* \rightrightarrows X^*$ được cho bởi công thức

$$D^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} F)\}, \ \forall y^* \in Y^*. \tag{1.17}$$

Nếu $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \operatorname{gph} F$ thì ta quy ước rằng các tập $\widehat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$ và $D^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$ là rỗng, với mọi $y^* \in Y^*$.

**Ví dụ 1.4.1.** Xét hàm số thực

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|,$$

và ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$F(x) = \{f(x)\} = \{|x|\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó,

$$\operatorname{gph} F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\right\}.$$

Tại điểm $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0) \in \operatorname{gph} F$, ta có

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) &= \left\{x^* \in \mathbb{R} \mid (x^*, -y^*) \in \widehat{N}((0,0); \operatorname{gph} F)\right\} \\
&= \left\{x^* \in \mathbb{R} \mid y^* \geq |x^*|\right\} \\
&= \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } y^* < 0, \\ [-y^*, y^*] & \text{nếu } y^* \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

và

$$D^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = \begin{cases} \{y^*, -y^*\} & \text{nếu } y^* < 0, \\ [-y^*, y^*] & \text{nếu } y^* \geq 0. \end{cases}$$

## 1.5 Hàm giá trị tối ưu

Cho $G : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian Banach, $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm nhận giá trị trong tập số thực suy rộng. *Hàm giá trị tối ưu* (optimal value function) của *bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc đa trị*, được cho bởi $G$ và $\varphi$, là hàm $\mu : X \to \overline{\mathbb{R}}$, với

$$\mu(x) := \inf\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\}. \tag{1.18}$$

Do quy ước $\inf \emptyset = +\infty$, ta có $\mu(x) = +\infty$ khi $x \notin \operatorname{dom} G$.

Ánh xạ $G$ (tương ứng, hàm $\varphi$) được gọi là *ánh xạ mô tả tập ràng buộc* (tương ứng, *hàm mục tiêu*) của bài toán ở vế phải của (1.18).

Ứng với mỗi cặp dữ liệu $\{G, \varphi\}$ ta có một *bài toán tối ưu phụ thuộc tham số* $x$ sau đây:

$$(P_x) \qquad \min\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\}. \tag{1.19}$$

Các công thức tính chính xác và các đánh giá dưới vi phân Fréchet và Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu $\mu(x)$, sẽ được xét trong hai chương sau, có liên quan chặt chẽ đến *ánh xạ nghiệm* $M : \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$, với

$$M(x) := \{y \in G(x) \mid \mu(x) = \varphi(x, y)\}, \quad \forall x \in \operatorname{dom} G, \tag{1.20}$$

của bài toán $(P_x)$.

# Chương 2

# Dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu

Chương này trình bày các công thức tính toán dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu tổng quát, ở đó không giả thiết ánh xạ đa trị mô tả ràng buộc $G$ có một cấu trúc đặc thù nào. Được viết trên cơ sở tham khảo bài báo [7] của các tác giả B. S. Mordukhovich, N. M. Nam và N. D. Yen và giáo trình [1], một số chứng minh và ví dụ sẽ được trình bày chi tiết hơn so với [7] và [1].

## 2.1 Đánh giá dưới vi phân Fréchet

**Bổ đề 2.1.1.** *Cho $Z$ là không gian Banach. Giả sử rằng hàm $\varphi : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ là hữu hạn tại $\bar{z} \in Z$. Khi đó, $z^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{z})$ nếu và chỉ nếu tồn tại hàm $s : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ sao cho $s$ hữu hạn trong lân cận của $\bar{z}$, khả vi Fréchet tại $\bar{z}$ và thỏa mãn các tính chất sau:*

$$s(\bar{z}) = \varphi(\bar{z}),\ \nabla s(\bar{z}) = z^* \ \text{ và } \ s(z) \leq \varphi(z),\ \text{ với mọi } z \in Z. \tag{2.1}$$

**Chứng minh.** *Điều kiện cần*: Giả sử rằng $z^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{z})$. Ta cần chỉ ra sự tồn tại của một hàm $s : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ sao cho $s$ hữu hạn trong lân cận của $\bar{z}$, khả vi Fréchet tại $\bar{z}$, và thỏa (2.1). Vì $z^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{z})$ nên theo định nghĩa dưới vi phân Fréchet ta có

$$\liminf_{z \to \bar{z}} \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \geq 0. \tag{2.2}$$

Điều đó có nghĩa là, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{z})$ sao cho

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \geq -\varepsilon, \ \ \forall z \in U \setminus \{\bar{z}\}. \tag{2.3}$$

Từ đó suy ra $\varphi(z) \geq \varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z} \rangle - \varepsilon ||z - \bar{z}||$ , với mọi $z \in U$. Đặt

$$s(z) := \min \{\varphi(z), \varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z} \rangle\}, \ \ \forall z \in Z.$$

Khi đó,

$$\varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z} \rangle - \varepsilon ||z - \bar{z}|| \leq s(z) \leq \varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z} \rangle, \ \ \forall z \in U.$$

Ta có $s$ là hữu hạn ở trên $U$. Do định nghĩa của hàm $s$,

$$s(\bar{z}) = \varphi(\bar{z}) \ \text{ và } \ s(z) \leq \varphi(z), \ \ \forall z \in Z.$$

Tiếp theo ta chứng minh rằng hàm $s$ là khả vi Fréchet tại $\bar{z}$. Với mọi $z \in Z \setminus \{\bar{z}\}$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} &= \frac{s(z) - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \\
&\leq \frac{\varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z} \rangle - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\limsup_{z \to \bar{z}} \frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \leq 0. \tag{2.4}$$

Nhận xét rằng

$$\begin{aligned}
&\frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \\
&= \frac{\min\{\varphi(z), \varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z} \rangle\} - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \\
&= \min \left\{ \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||}, 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Do (2.2) ta có

$$\liminf_{z \to \bar{z}} \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \geq 0;$$

vì vậy

$$\liminf_{z \to \bar{z}} \frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \geq 0. \tag{2.5}$$

Từ (2.4) và (2.5) ta suy ra rằng

$$\lim_{z \to \bar{z}} \frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} = 0.$$

Vậy $s$ khả vi Fréchet tại $\bar{z}$ và $\nabla s(\bar{z}) = z^*$.

*Điều kiện đủ*: Giả sử rằng $z^* \in Z^*$ và tồn tại hàm số $s : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ hữu hạn trong lân cận của $\bar{z}$, khả vi Fréchet tại $\bar{z}$, và thỏa (2.1). Khi đó, ta có

$$\liminf_{z \to \bar{z}} \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} \geq \liminf_{z \to \bar{z}} \frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z} \rangle}{||z - \bar{z}||} = 0.$$

Suy ra $z^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{z})$. Bổ đề đã được chứng minh. □

Ví dụ sau đây minh họa cho Bổ đề 2.1.1.

**Ví dụ 2.1.1.** Chúng ta kiểm tra các điều kiện và kết luận của Bổ đề 2.1.1 với $\varphi(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$, tại điểm $\bar{x} = 0$. Vì hàm $\varphi(x) = |x|$ là hàm lồi nên sử dụng Nhận xét 1.3.1 ta có

$$\widehat{\partial}\varphi(0) = \partial\varphi(0) = [-1, 1].$$

Xét hàm số $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, được cho bởi $x \mapsto \mu x$, ở đó $|\mu| \leq 1$. Hàm số $s$ là hữu hạn trong lân cận của điểm 0, khả vi Fréchet tại 0, $s(0) = \varphi(0) = 0$, $\nabla s(0) = \mu$ và $s(x) \leq \varphi(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ (do $|\mu| \leq 1$). Do Bổ đề 2.1.1, từ đó ta suy ra rằng

$$[-1, 1] \subset \widehat{\partial}\varphi(0).$$

Lấy $x^* \in \widehat{\partial}\varphi(0)$ tùy ý. Theo Bổ đề 2.1.1, tồn tại hàm $s : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, khả vi Fréchet tại $\bar{x} = 0$, hữu hạn trong $U \in \mathcal{N}(0)$, thỏa mãn $s(0) = \varphi(0)$,

$\nabla s(0) = x^*$ và $s(x) \leq \varphi(x)$, với mọi $x \in U$. Ta có

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{s(\bar{x}+h) - s(\bar{x}) - \langle x^*, h\rangle}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{s(h) - \langle x^*, h\rangle}{|h|}$$
$$\leq \limsup_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - \langle x^*, h\rangle}{|h|}.$$

Vì vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $|h| < \delta$ thì

$$|h| - x^*h \geq -\varepsilon|h|.$$

Lấy $h > 0$ đủ bé, từ đó ta có $1 - x^* \geq -\varepsilon$ hay $x^* \leq \varepsilon + 1$, với $\varepsilon > 0$ được lấy tùy ý. Vậy $x^* \leq 1$. Lấy $h < 0$ đủ bé, ta có $-h - x^*h \geq \varepsilon h$, hay $-1 - x^* \leq \varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ được lấy tùy ý. Suy ra $x^* \geq -1$. Tóm lại, $x^* \in [-1, 1]$. Ta đã chứng minh được rằng $\widehat{\partial}\varphi(0) \subset [-1, 1]$. Vậy $\widehat{\partial}\varphi(0) = [-1, 1]$.

Định lý sau đây cho ta một đánh giá trên (upper estimate) cho dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu tổng quát trong công thức (1.18) tại tham số $\bar{x}$ cho trước. Đánh giá này được thiết lập thông qua đối đạo hàm Fréchet của ánh xạ mô tả tập ràng buộc $G$ và các tập dưới vi phân Fréchet trên của hàm giá $\varphi$.

**Định lý 2.1.1.** *Giả sử hàm giá trị tối ưu $\mu(.)$ trong (1.18) là hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$ và giả sử rằng $\bar{y} \in M(\bar{x})$ là véctơ thỏa mãn $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$. Khi đó,*

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset \bigcap_{(x^*,y^*)\in\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y})} \left\{x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)\right\}. \tag{2.6}$$

**Chứng minh.** Lấy tùy ý $u^* \in \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ ta cần chứng tỏ rằng

$$u^* \in x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

Vì $u^* \in \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$, theo định nghĩa dưới vi phân ta có

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \frac{\mu(x) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x - \bar{x}\rangle}{||x - \bar{x}||} \geq 0.$$

Điều đó có nghĩa là, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ sao cho

$$\frac{\mu(x) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x - \bar{x}\rangle}{||x - \bar{x}||} \geq -\varepsilon, \ \ \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}.$$

Không giảm tổng quát, ta có thể lấy $U = B(\bar{x}, \rho)$ với $\rho > 0$. Khi đó,

$$\mu(x) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x - \bar{x}\rangle \geq -\varepsilon||x - \bar{x}||, \ \ \forall x \in B(\bar{x}, \rho).$$

Vì $\bar{y} \in M(\bar{x})$ nên từ đó ta có

$$\langle u^*, x - \bar{x}\rangle \leq \mu(x) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon||x - \bar{x}||, \ \ \forall x \in B(\bar{x}, \rho). \tag{2.7}$$

Lấy cố định một véctơ tùy ý $(x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Do định nghĩa dưới vi phân Fréchet trên ở Chương 1, ta có $(x^*, y^*) \in -\widehat{\partial}(-\varphi)(\bar{x}, \bar{y})$. Áp dụng Bổ đề 2.1.1 cho véctơ $(-x^*, -y^*) \in \widehat{\partial}(-\varphi)(\bar{x}, \bar{y})$ ta tìm được một hàm số $s : X \times Y \to \mathbb{R}$, hữu hạn trong lân cận của $(\bar{x}, \bar{y})$, khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y})$, sao cho

$$\begin{cases} s(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \ \nabla s(\bar{x}, \bar{y}) = (x^*, y^*) \\ s(x, y) \geq \varphi(x, y), \ \forall (x, y) \in X \times Y. \end{cases} \tag{2.8}$$

Từ định nghĩa hàm $\mu$ ta suy ra rằng $\mu(x) \leq \varphi(x, y) \leq s(x, y)$, với mọi $y \in G(x)$. Từ (2.7) và (2.8) ta có

$$\begin{aligned} \langle u^*, x - \bar{x}\rangle \leq & \varphi(x, y) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon||x - \bar{x}|| \\ \leq & s(x, y) - s(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon||x - \bar{x}|| \\ = & \langle \nabla_x s(\bar{x}, \bar{y}), x - \bar{x}\rangle + \langle \nabla_y s(\bar{x}, \bar{y}), y - \bar{y}\rangle \\ & + o(||x - \bar{x}|| + ||y - \bar{y}||) + \varepsilon||x - \bar{x}|| \\ = & \langle x^*, x - \bar{x}\rangle + \langle y^*, y - \bar{y}\rangle + o(||x - \bar{x}|| + ||y - \bar{y}||) \\ & + \varepsilon||x - \bar{x}||, \end{aligned}$$

với mọi $(x, y)$ mà $x \in B(\bar{x}, \rho)$ và $y \in G(x)$. Từ đó ta suy ra rằng

$$\limsup_{(x,y) \xrightarrow{\text{gph}\, G} (\bar{x}, \bar{y})} \frac{\langle u^* - x^*, x - \bar{x}\rangle - \langle y^*, y - \bar{y}\rangle}{||x - \bar{x}|| + ||y - \bar{y}||} \leq \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ được chọn tùy ý, ta có

$$\limsup_{(x,y)\xrightarrow{\operatorname{gph} G}(\bar{x},\bar{y})} \frac{\langle u^* - x^*, x - \bar{x}\rangle - \langle y^*, y - \bar{y}\rangle}{||x - \bar{x}|| + ||y - \bar{y}||} \leq 0.$$

Theo định nghĩa nón pháp tuyến Fréchet, điều đó chứng tỏ rằng

$$(u^* - x^*, -y^*) \in \widehat{N}((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G).$$

Do đó $u^* - x^* \in \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$, hay $u^* \in x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$. Vậy

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*), \ \ \forall (x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y}),$$

tức là (2.6) nghiệm đúng. $\square$

Đánh giá (2.6) nghiệm đúng dưới dạng bao hàm thức. Câu hỏi tự nhiên là khi nào bao hàm thức đó trở thành đẳng thức. Để có thể trả lời câu hỏi này, chúng ta cần xét hai định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 2.1.1.** Ánh xạ $h : D \to Y$ được gọi là *Lipschitz trên địa phương* tại $\bar{x} \in D$, ở đó $D$ là một tập con của $X$, nếu tồn tại $\eta > 0$ và $\ell \geq 0$ sao cho

$$||h(x) - h(\bar{x})|| \leq \ell ||x - \bar{x}||, \ \ \forall x \in B(\bar{x}, \eta) \cap D.$$

**Định nghĩa 2.1.2.** Cho $D \subset X$. Ta nói rằng ánh xạ đa trị $F : D \rightrightarrows Y$ *có lát cắt Lipschitz trên địa phương* tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ nếu tồn tại ánh xạ đơn trị $h : D \to Y$ Lipschitz trên địa phương tại $\bar{x}$ sao cho $h(\bar{x}) = \bar{y}$ và $h(x) \in F(x)$ với mọi $x$ thuộc vào giao của $D$ với một lân cận của $\bar{x}$.

**Ví dụ 2.1.2.** Xét hàm số $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ \varphi(x) = |x|$. Ta có

$$\widehat{\partial}\varphi(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{nếu } x > 0, \\ \{-1\} & \text{nếu } x < 0, \\ [-1, 1] & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Ánh xạ đa trị

$$\widehat{\partial}\varphi(.) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad x \mapsto \widehat{\partial}\varphi(x)$$

không có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(0,0) \in \operatorname{gph} \widehat{\partial}\varphi(.)$, nếu ta lấy $D = \mathbb{R}$. Nếu lấy $D = [0, +\infty)$, thì ánh xạ đa trị $\widehat{\partial}\varphi(.) : D \rightrightarrows \mathbb{R}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(0,1) \in \operatorname{gph} \widehat{\partial}\varphi(.)$, ở đó $h(x) = 1$, với mọi $x \in D$.

Sau đây là một điều kiện đủ để bao hàm thức trong Định lý 2.1.1 nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức.

**Định lý 2.1.2.** *Giả sử hàm giá trị tối ưu $\mu(.)$ trong (1.18) là hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Giả sử $\varphi$ là hàm khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y})$ và ánh xạ nghiệm $M : \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó,*

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) = x^* + \widehat{D}^* G(\bar{x}, \bar{y})(y^*),$$

*với*

$$(x^*, y^*) := \nabla\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{\partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right),$$

*là véctơ gradient của $\varphi$ tại $(\bar{x}, \bar{y})$.*

**Chứng minh.** Vì $\bar{y} \in M(\bar{x})$ và $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \{\nabla\varphi(\bar{x}, \bar{y})\} = (x^*, y^*)$, nên theo Định lý 2.1.1 ta có

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset x^* + \widehat{D}^* G(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

Ta cần chứng minh rằng

$$x^* + \widehat{D}^* G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \subset \widehat{\partial}\mu(\bar{x}).$$

Cố định một phần tử bất kỳ $u^* \notin \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$. Ta cần chỉ ra rằng

$$u^* \notin x^* + \widehat{D}^* G(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

Vì $u^* \notin \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$, theo định nghĩa dưới gradient Fréchet ta có

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \frac{\mu(x) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x - \bar{x} \rangle}{||x - \bar{x}||} < 0.$$

Vì vậy, tồn tại $\bar{\varepsilon} > 0$ và dãy $x_k \to \bar{x},\ x_k \neq \bar{x}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, sao cho

$$\frac{\mu(x_k) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x_k - \bar{x}\rangle}{||x_k - \bar{x}||} \leq -\bar{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Nếu $x_k \notin \operatorname{dom} G$ thì $G(x_k) = \emptyset$. Khi đó ta có

$$\mu(x_k) = \inf\big\{\varphi(x_k, y) \mid y \in G(x_k)\big\} = +\infty,$$

điều này mâu thuẫn với (2.9). Vậy ta phải có $x_k \in \operatorname{dom} G$, với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Lấy lát cắt Lipschitz trên địa phương $h(.)$ tại $(\bar{x}, \bar{y})$ của ánh xạ nghiệm $M : \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ như trong giả thiết của định lý. Đặt $y_k := h(x_k)$ và chú ý rằng $\mu(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}),\ \mu(x_k) = \varphi(x_k, y_k)$. Từ (2.9) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
\langle u^*, x_k - \bar{x}\rangle &\leq \mu(x_k) - \mu(\bar{x}) + \bar{\varepsilon}||x_k - \bar{x}|| \\
&\leq \varphi(x_k, y_k) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\varepsilon}||x_k - \bar{x}|| \\
&= \langle \nabla\varphi(\bar{x}, \bar{y}), (x_k - \bar{x}, y_k - \bar{y})\rangle + o(||x_k - \bar{x}|| + ||y_k - \bar{y}||) \\
&\quad + \bar{\varepsilon}||x_k - \bar{x}|| \\
&= \langle x^*, x_k - \bar{x}\rangle + \langle y^*, y_k - \bar{y}\rangle + o(||x_k - \bar{x}|| + ||y_k - \bar{y}||) \\
&\quad + \bar{\varepsilon}||x_k - \bar{x}||.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Do tính chất Lipschitz trên địa phương của $h(.)$ tại $\bar{x}$, ta có

$$||x_k - \bar{x}|| \geq \frac{1}{\ell}||y_k - \bar{y}||, \quad \text{với } k \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn.}$$

Từ (2.10) ta có

$$\begin{aligned}
&\langle u^* - x^*, x_k - \bar{x}\rangle - \langle y^*, y_k - \bar{y}\rangle \\
&\qquad \geq o(||x_k - \bar{x}|| + ||y_k - \bar{y}||) + \bar{\varepsilon}||x_k - \bar{x}||. \\
&\qquad \geq \frac{\bar{\varepsilon}}{2\ell}||y_k - \bar{y}|| + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}||x_k - \bar{x}|| + o(||x_k - \bar{x}|| + ||y_k - \bar{y}||) \\
&\qquad \geq \hat{\varepsilon}(||x_k - \bar{x}|| + ||y_k - \bar{y}||) + o(||x_k - \bar{x}|| + ||y_k - \bar{y}||),
\end{aligned}$$

với $\hat{\varepsilon} := \min\left\{\dfrac{\bar{\varepsilon}}{2}, \dfrac{\bar{\varepsilon}}{2\ell}\right\}$. Vì vậy,

$$\limsup_{(x,y)\xrightarrow{\text{gph}G}(\bar{x},\bar{y})} \frac{\langle u^* - x^*, x - \bar{x}\rangle - \langle y^*, y - \bar{y}\rangle}{||x - \bar{x}|| + ||y - \bar{y}||} \geq \hat{\varepsilon}.$$

Điều này có nghĩa là

$$\langle u^* - x^*, -y^*\rangle \notin \widehat{N}((\bar{x},\bar{y}); \text{gph}\, G) \quad \Leftrightarrow \quad u^* - x^* \notin \widehat{D}^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*).$$

Hay $u^* \notin x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)$. Vậy định lý đã được chứng minh. □

**Nhận xét 2.1.1.** Điều kiện $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y}) \neq \emptyset$ *là khá ngặt nghèo, vì nó loại bỏ đi những hàm lồi, Lipschitz kiểu* $\varphi(x,y) = |x| + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}$ *hoặc* $\varphi(x) = ||x||$, $x \in X$, ở đó $X$ là không gian Banach có số chiều lớn hơn hoặc bằng 1. Đối với ví dụ thứ nhất, ta sẽ chỉ ra rằng với $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ thì $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y}) = \emptyset$. Theo định nghĩa, $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y}) = -\widehat{\partial}(-\varphi)(\bar{x},\bar{y})$, trong đó $-\varphi(x,y) = -|x| - y$. Giả sử phản chứng: tồn tại $(x^*,y^*) \in \widehat{\partial}(-\varphi)(0,0)$. Khi đó,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(-\varphi)(x,y) - (-\varphi)(0,0) - \langle (x^*,y^*),(x,y)\rangle}{|x| + |y|} \\ &= \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-|x| - y - x^*x - y^*y}{|x| + |y|}. \end{aligned}$$

Chọn $y_k = 0,\ x_k = \dfrac{1}{k},\ k \geq 1$, ta có $(x_k,y_k) \to (0,0)$. Vì vậy,

$$0 \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{-\frac{1}{k} - \frac{1}{k}x^*}{\frac{1}{k}} = -1 - x^*.$$

Suy ra $x^* \leq -1$. Tiếp theo, chọn $y_k = 0$, $x_k = \dfrac{-1}{k}$, ta có $(x_k,y_k) \to (0,0)$. Vì vậy,

$$0 \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\frac{-1}{k} + \frac{1}{k}x^*}{\frac{1}{k}} = -1 + x^*.$$

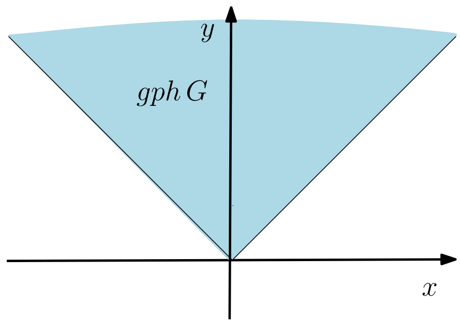
Từ đây ta có $x^* \geq 1$, mâu thuẫn với điều kiện $x^* \leq -1$ ở trên. Vậy ta đã chứng tỏ rằng $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y}) = \emptyset$. Đối với ví dụ thứ hai, ở đó $\varphi(x) = ||x||$, bằng định nghĩa ta có thể chứng minh rằng $\widehat{\partial}^+\varphi(0) = \emptyset$.

## 2.2 Một số ví dụ minh họa

Trong mục này chúng ta xét một số ví dụ để thấy những nét đặc trưng của hai định lý vừa thu được và của các giả thiết của chúng.

**Ví dụ 2.2.1.** Lấy $X = Y = \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = -|x| + y$, và $G(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq |x|\}$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Ta có

$$\mu(x) = \inf\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\} = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$




Hình 2

Khi đó, $\widehat{\partial}\mu(0) = \{0\}$, $\widehat{\partial}^+\varphi(0, 0) = [-1, 1] \times \{1\}$. Vì vậy $(x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(0, 0)$ khi và chỉ khi $y^* = 1$ và $x^* \in [-1, 1]$. Sử dụng công thức của $G$ và định nghĩa đối đạo hàm Fréchet, ta có

$$\bigcap_{(x^*,y^*)\in\widehat{\partial}^+\varphi((0,0))} \{x^* + \widehat{D}^*G(0, 0)(y^*)\} = \bigcap_{x^*\in[-1,1]} \{x^* + [-1, 1]\} = \{0\},$$

nghĩa là bao hàm thức (2.6) có dấu bằng. Lưu ý rằng mặc dù lát cắt $h(x) = |x|$ của ánh xạ đa trị $M(x) = \{|x|\}$ là Lipschitz với hệ số bằng 1, ta vẫn không thể áp dụng Định lý 2.1.2 bởi vì $\varphi$ không khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$.

**Ví dụ 2.2.2.** Lấy $X$, $Y$, $G$, $(\bar{x}, \bar{y})$ như ở ví dụ trên và đặt

$$\varphi(x, y) = -x + y.$$

Ta có

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \geq 0, \\ -2x & \text{nếu } x < 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

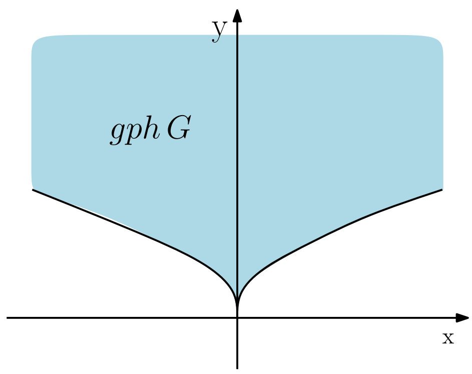
và $\nabla\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \{(-1, 1)\}$. Vì các giả thiết của Định lý 2.1.2 được thỏa mãn, ta phải có

$$\widehat{\partial}\mu(0) = -1 + \widehat{D}G(0, 0)(1).$$

Đẳng thức này nghiệm đúng là vì

$$\widehat{\partial}\mu(0) = [-2, 0],\ \widehat{D}G(0, 0)(1) = [-1, 1].$$

**Ví dụ 2.2.3.** Lấy $X = Y = \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Xét hàm giá trị tối ưu $\mu(x)$ được xác định bởi công thức (1.18) với $\varphi(x, y) = 0$ và $G(x) := [\sqrt{|x|}, \infty)$.




Hình 3

Khi đó ta có $\mu(x) = 0$ và $\widehat{\partial}^+\varphi(x, y) = \{0\}$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vì các giả thiết của Định lý 2.1.1 được thỏa mãn, nên ta có

$$\widehat{\partial}\mu(0) \subset \widehat{D}G(0, 0)(0).$$

Bao hàm thức này nghiệm đúng vì $\widehat{\partial}\mu(x) = \{0\}$ và $\widehat{D}G(0, 0)(0) = \mathbb{R}$.

# Chương 3

# Dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu

Chương này trình bày các công thức đánh giá dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu. Các kết quả ở đây phức tạp hơn ở chương trước. Sự phức tạp hơn thể hiện ở chỗ: các giả thiết của định lý là cồng kềnh hơn và điều kiện để các đánh giá dạng bao hàm thức đạt được dấu bằng là ngặt nghèo hơn. Chương này được viết dựa trên bài báo [7].

## 3.1 Đánh giá dưới vi phân Mordukhovich

**Định nghĩa 3.1.1.** Ta nói rằng ánh xạ nghiệm $M(.)$ là *$\mu$-nửa liên tục dưới nội bộ* ($\mu$-inner semicontinuous) tại $(\bar{x}, \bar{y})$ nếu với mọi dãy $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$ tồn tại dãy $y_k \in M(x_k)$ sao cho $\{y_k\}$ có một dãy con hội tụ đến $\bar{y}$.

**Định nghĩa 3.1.2.** Ánh xạ nghiệm $M(.)$ được gọi là *$\mu$-bán-compắc nội bộ* ($\mu$-inner semicompact) tại $\bar{x}$ nếu với mỗi dãy $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$ tồn tại dãy $y_k \in M(x_k)$ sao cho $\{y_k\}$ có một dãy con hội tụ.

Các tính chất nói trong hai định nghĩa trên là sự mở rộng của các tính chất *nửa liên tục dưới nội bộ* và *bán-compắc nội bộ* được định nghĩa cho các ánh xạ đa trị tổng quát [6, Định nghĩa 1.63]. Điều khác biệt là ở chỗ điều kiện $x_k \to \bar{x}$ trong [6] bây giờ được thay thế bằng một điều kiện yếu hơn: $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$. Lưu ý là hai định nghĩa vừa nêu chỉ áp dụng được cho ánh xạ nghiệm có dạng (1.20).

**Định nghĩa 3.1.3.** Tập hợp $\Omega$ trong không gian Banach $X$ được gọi là *compắc pháp tuyến theo dãy* (SNC) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\varepsilon_k \downarrow 0,\ x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ và $x_k^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}(x_k;\Omega)$ ta có

$$\left[x_k^* \xrightarrow{w^*} 0\right] \Longrightarrow \left[||x_k^*|| \to 0\right] \ \text{khi } k \to \infty.$$

**Định nghĩa 3.1.4.** Ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ được gọi là *compắc pháp tuyến theo dãy* tại $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ nếu đồ thị của nó có tính chất đó.

**Định nghĩa 3.1.5.** Hàm số $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là *epi-compắc pháp tuyến theo dãy* (SNEC) tại $\bar{x}$ nếu tập trên đồ thị

$$\operatorname{epi}\varphi := \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \le \alpha\}$$

của nó là SNC tại $(\bar{x},\varphi(\bar{x}))$.

**Định lý 3.1.1.** *Giả sử $M(.)$ là ánh xạ nghiệm được cho bởi công thức* (1.20) *và giả sử $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Khi đó các khẳng định sau nghiệm đúng.*

(i) *Cho trước $\bar{y} \in M(\bar{x})$, giả sử rằng $M$ là $\mu$-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} M$, $\varphi$ là SNEC tại $(\bar{x},\bar{y})$ hoặc $G$ là SNC tại $(\bar{x},\bar{y})$, và điều kiện chính quy*

$$\partial^\infty\varphi(\bar{x},\bar{y}) \cap (-N((\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G)) = \{0\} \tag{3.1}$$

*được thỏa mãn (các điều kiện đó tự động thỏa mãn nếu $\varphi$ là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x},\bar{y})$). Khi đó ta có các bao hàm thức*

$$\partial\mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})} \left\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\right\}, \tag{3.2}$$

$$\partial^\infty\mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial^\infty\varphi(\bar{x},\bar{y})} \left\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\right\}, \tag{3.3}$$

(ii) *Giả sử rằng $M$ là $\mu$-bán-compắc nội bộ tại $\bar{x}$ và các giả thiết khác của* (i) *được thỏa mãn tại mọi điểm* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$. *Khi đó ta có các bao hàm thức.*

$$\partial\mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y}),\bar{y}\in M(\bar{x})} \big\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}, \tag{3.4}$$

$$\partial^\infty\mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial^\infty\varphi(\bar{x},\bar{y}),\bar{y}\in M(\bar{x})} \big\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}, \tag{3.5}$$

(iii) *Ngoài các giả thiết ở* (i), *giả sử thêm rằng $\varphi$ khả vi chặt tại $(\bar{x}, \bar{y})$, ánh xạ đa trị $M : \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$, và $G$ là chính quy pháp tuyến tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó, hàm giá trị tối ưu $\mu$ là chính quy dưới tại $\bar{x}$ và* (3.2) *nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức, nghĩa là*

$$\partial\mu(\bar{x}) = \varphi'_x(\bar{x},\bar{y}) + D^*G(\bar{x},\bar{y})(\varphi'_y(\bar{x},\bar{y})). \tag{3.6}$$

## 3.2 Ví dụ minh họa

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày một ví dụ minh họa để chứng tỏ rằng Định lý 3.1.1 chẳng những cho phép chúng ta đánh giá mà còn có thể tính chính xác dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu đối với bài toán quy hoạch trơn và không lồi.

**Ví dụ 3.2.1.** Xét bài toán quy hoạch toán học không lồi (1.19) với các dữ liệu trơn được cho bởi

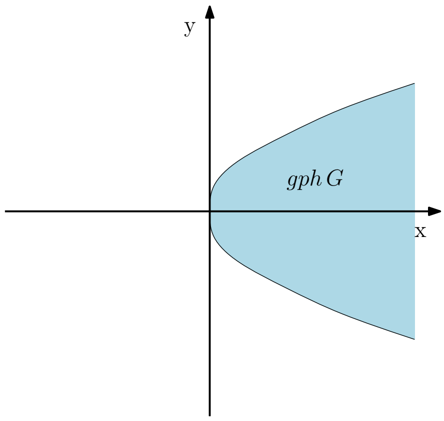
$$\varphi(x, y) := -y^2 x$$

và

$$G(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - x \le 0\}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy rằng

$$M(x) = \begin{cases} \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\} & \text{nếu } x \ge 0, \\ \emptyset & \text{nếu } x < 0, \end{cases} \tag{3.7}$$




Hình 4

và

$$G(x) = \begin{cases} [-\sqrt{x}, \sqrt{x}\,] & \text{nếu } \; x \geq 0, \\ \emptyset & \text{nếu } \; x < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Hàm giá trị tối ưu $\mu(x)$ được cho bởi công thức

$$\mu(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{nếu } \; x \geq 0, \\ \infty & \text{nếu } \; x < 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Vậy ánh xạ nghiệm $M$ vừa là $\mu$-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$, vừa $\mu$-bán-compắc nội bộ tại $\bar{x} = 0$. Ngoài ra các giả thiết khác của Định lý 3.1.1 cũng được thỏa mãn. Từ định nghĩa suy ra rằng

$$\partial\mu(x) = \begin{cases} \{-2\bar{x}\} & \text{nếu } \; \bar{x} > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{nếu } \; \bar{x} = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

và

$$\partial^\infty\mu(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } \; \bar{x} > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{nếu } \; \bar{x} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Hơn nữa, chúng ta tính được nón pháp tuyến của đồ thị của ánh xạ đa trị $G$ tại những điểm quan trọng như sau:

$$N((0,0); \mathrm{gph\,G}) = (-\infty, 0] \times \{0\},$$

$$N((\bar{x}, \sqrt{\bar{x}}); \operatorname{gph} G) = \left\{ -\lambda(1, -2\sqrt{\bar{x}}) \mid \lambda \geq 0 \right\},$$
$$N((\bar{x}, -\sqrt{\bar{x}}); \operatorname{gph} G) = \left\{ -\lambda(1, 2\sqrt{\bar{x}}) \mid \lambda \geq 0 \right\}.$$

Kết hợp tất cả những điều kiện đó, chúng ta kết luận rằng bao hàm thức (3.2) và (3.4) nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức tại điểm $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0) \in \operatorname{gph} \mathrm{M}$ và các bao hàm thức (3.3) và (3.5) nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức tại mọi điểm $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$.

# Chương 4

# Tính ổn định vi phân của bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc bao hàm thức

Chương này trình bày một số kết quả mới về tính ổn định vi phân của bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc bao hàm thức và ràng buộc phiếm hàm. Bằng cách sử dụng Định lý Moreau-Rockafellar, những điều kiện chính quy thích hợp, chúng ta sẽ thu được các công thức tính dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu.

Nếu không nói gì thêm, thì các không gian $X, Y$ được xét trong chương này là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff.

## 4.1 Bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc bao hàm thức

Chúng ta sẽ cần tới kết quả quan trọng sau đây của Giải tích lồi.

**Định lý 4.1.1.** (Định lý Moreau-Rockafellar, [5, tr. 48]) *Giả sử $f_1$ và $f_2$ là các hàm lồi, chính thường trên không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff $X$. Khi đó,*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

*Hơn nữa, nếu một trong hai hàm $f_1, f_2$ là liên tục tại một điểm thuộc miền hữu hiệu của hàm kia, thì*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x), \;\; \forall x \in X.$$

**Mệnh đề 4.1.1.** *Cho $G : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị lồi và $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi. Khi đó $\mu(x)$ được định nghĩa như ở* (1.18) *là hàm lồi.*

**Chứng minh.** Ta sẽ đi chứng minh $\operatorname{epi}\mu = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \mu(x) \le \alpha\}$ là tập lồi. Thật vậy, lấy tùy ý $(x, \alpha),\ (y, \beta) \in \operatorname{epi}\mu,\ \lambda \in (0, 1)$. Ta sẽ chỉ ra

$$\begin{aligned} &\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) \in \operatorname{epi}\mu \\ &\Leftrightarrow \inf\{\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y, z) \mid z \in G(\lambda x + (1 - \lambda)y)\} \le \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lấy $\varepsilon > 0$ bé tùy ý. Do $(x, \alpha) \in \operatorname{epi}\mu$. Suy ra

$$\alpha \ge \mu(x) = \inf\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\}. \tag{4.2}$$

• Nếu $\inf\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\} = -\infty$. Khi đó với mọi $\alpha$ thuộc $\mathbb{R}$, tồn tại $y$ thuộc $G(x)$ sao cho

$$\alpha \ge \varphi(x, y). \tag{4.3}$$

• Nếu $\inf\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\} > -\infty$. Do (4.2) ta có $\alpha > \inf\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\} - \varepsilon$. Vậy tồn tại $u \in G(x)$ sao cho

$$\alpha > \varphi(x, u) - \varepsilon. \tag{4.4}$$

Tương tự, với $(y, \beta) \in \operatorname{epi}\mu$.

• Nếu $\inf\{\varphi(y, x) \mid x \in G(y)\} = -\infty$. Khi đó với mọi $\beta$ thuộc $\mathbb{R}$, tồn tại $x$ thuộc $G(y)$ sao cho

$$\beta \ge \varphi(y, x). \tag{4.5}$$

• Nếu $\inf\{\varphi(y, x) \mid x \in G(y)\} > -\infty$, tồn tại $v \in G(y)$ sao cho

$$\beta > \varphi(y, v) - \varepsilon. \tag{4.6}$$

Mặt khác, do $(x, u) \in \operatorname{gph} G, (y, v) \in \operatorname{gph} G$ nên

$$(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda u + (1-\lambda)v) \in \operatorname{gph} G,$$

tức là $\lambda u + (1-\lambda)v \in G(\lambda x + (1-\lambda)y)$. Do đó

$$\begin{aligned} VT_{(4.1)} &\le \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda u + (1-\lambda)v) \le \varphi(\lambda(x,u)) + \varphi((1-\lambda)(y,v)) \\ &\le \lambda\varphi(x,u) + (1-\lambda)\varphi(y,v). \end{aligned}$$

Do (4.3), (4.4), (4.5) và (4.6), ta có bất đẳng thức cuối tương đương với

$$VT_{(4.1)} \le \lambda(\alpha+\varepsilon) + (1-\lambda)(\beta+\varepsilon) = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta + \varepsilon. \tag{4.7}$$

Vì $\varepsilon > 0$ bé tùy ý nên từ (4.7) cho ta điều cần chứng minh. □

**Nhận xét 4.1.1.** Trong trường hợp $X$ là không gian Banach và hàm giá trị tối ưu $\mu$ là lồi, dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich là trùng nhau, và trùng với dưới vi phân theo nghĩa Giải tích lồi (do các định nghĩa dưới vi phân và các mệnh đề mô tả nón pháp tuyến Fréchet và Mordukhovich đã được xét trong Chương 1), tức là

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) = \partial\mu(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \le \mu(x) - \mu(\bar{x}),\ \ \forall x \in X\}.$$

Sau đây là một số tính chất của dưới vi phân suy biến của hàm lồi và nón pháp tuyến của tập lồi.

**Mệnh đề 4.1.2.** *Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm lồi chính thường, thì*

$$\partial^\infty f(x) = N(x; \operatorname{dom} f).$$

**Chứng minh.** Thật vậy, vì $\operatorname{epi} f$ là tập lồi, theo định nghĩa dưới vi phân suy biến, ta có

$$\begin{aligned} x^* \in \partial^\infty f(x) &\Leftrightarrow (x^*, 0) \in N((x, f(x)); \operatorname{epi} f) \\ &\Leftrightarrow \langle (x^*, 0), (u, \mu) - (x, f(x))\rangle \le 0,\ \ \forall (u,\mu) \in \operatorname{epi} f \\ &\Leftrightarrow \langle (x^*, 0), (u - x, \mu - f(x))\rangle \le 0,\ \ \forall (u,\mu) \in \operatorname{epi} f \\ &\Leftrightarrow \langle x^*, u - x\rangle \le 0,\ \ \forall u \in \operatorname{dom} f \\ &\Leftrightarrow x^* \in N(x; \operatorname{dom} f). \end{aligned}$$

Vậy ta chứng minh được rằng $\partial^\infty f(x) = N(x; \mathrm{dom}\, f)$. □

Từ nay về sau, với mỗi tập $A \subset X$, ký hiệu $\mathrm{int}\, A$ được dùng để chỉ *phần trong* của tập hợp $A$ trong tôpô của $X$.

**Mệnh đề 4.1.3.** (Xem [5, tr. 205]) *Cho $A, B$ là các tập con lồi trong không gian tôpô lồi địa phương Hausdorff $X$. Nếu $(\mathrm{int}\, A) \cap B \neq \emptyset$ thì, với mọi $z \in X$, ta có*

$$N(z; A \cap B) = N(z; A) + N(z; B). \tag{4.8}$$

*Tổng quát hơn, cho $A_0, A_1, ..., A_n$ là các tập con lồi của $X$. Đặt $A = A_0 \cap A_1 \cap ... \cap A_n$. Giả sử $A_0 \cap (\mathrm{int}\, A_1) \cap ... \cap (\mathrm{int}\, A_n) \neq \emptyset$. Khi đó,*

$$N(z; A) = N(z; A_0) + ... + N(z; A_n), \quad \forall z \in A.$$

**Chứng minh.** Ta đi chứng minh khẳng định thứ nhất. Đẳng thức (4.8) là hiển nhiên nếu $z \notin A \cap B$, vì khi đó cả hai vế đều là tập rỗng. Xét trường hợp $z \in A \cap B$. Ta có

$$\delta(z; A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z \in A, \\ +\infty & \text{nếu } z \notin A, \end{cases}$$

và

$$\delta(z; B) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z \in B, \\ +\infty & \text{nếu } z \notin B. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \delta(z; A \cap B) &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } z \in A \cap B \\ +\infty & \text{nếu } z \notin A \cap B \end{cases} \\ &= \delta(z; A) + \delta(z; B). \end{aligned}$$

Do giả thiết $(\mathrm{int} A) \cap B \neq \emptyset$, $\delta(\cdot; A)$ liên tục tại một điểm thuộc $\mathrm{dom}\, \delta(\cdot; B)$. Vì vậy, theo Định lý 4.1.1 ta có

$$\begin{aligned} \partial\delta(\cdot; A \cap B)(z) &= \partial(\delta(\cdot; A) + \delta(\cdot; B))(z) \\ &= \partial\delta(z; A) + \partial\delta(z; B). \end{aligned}$$

Áp dụng Mệnh đề 1.3.3 ta có điều phải chứng minh.

Khẳng định thứ hai của mệnh đề thu được từ khẳng định thứ nhất bằng phương pháp quy nạp. □

Hai định lý sau đây cho ta các công thức đánh giá dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu $\mu$ trong trường hợp $\varphi$ và $G$ được giả thiết là lồi.

**Định lý 4.1.2.** *Cho $G : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị lồi và $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi. Nếu có ít nhất một trong hai điều kiện chính quy sau đây được thỏa mãn:*

(a) $\mathrm{int}(\mathrm{gph}\, G) \cap \mathrm{dom}\, \varphi \neq \emptyset$,

(b) *$\varphi$ liên tục tại một điểm $(x^0, y^0) \in \mathrm{gph}\, G$,*

*thì với mỗi $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, \mu$ và với mỗi $\bar{y} \in M(\bar{x})$, ta có*

$$\partial\mu(\bar{x}) = \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})} \big\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}. \tag{4.9}$$

*Vì vậy,*

$$\partial\mu(\bar{x}) = \bigcap_{\bar{y}\in M(\bar{x})} \; \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})} \big\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}. \tag{4.10}$$

**Chứng minh.** Cho $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, \mu$ và $\bar{y} \in M(\bar{x})$. Để chứng minh bao hàm thức " $\subset$ " trong (4.9), ta lấy tùy ý một phần tử $\bar{x}^* \in \partial\mu(\bar{x})$. Theo Mệnh đề 4.1.1, hàm giá trị tối ưu $\mu$ là lồi. Do đó,

$$\mu(x) - \mu(\bar{x}) \geq \langle \bar{x}^*, x - \bar{x}\rangle, \quad \forall x \in X.$$

Lấy tùy ý $u \in X$ và $v \in G(u)$, từ bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) - \varphi(\bar{x},\bar{y}) &= \varphi(u,v) - \mu(\bar{x}) \\ &\geq \mu(u) - \mu(\bar{x}) \\ &\geq \langle \bar{x}^*, u - \bar{x}\rangle + \langle 0, v - \bar{y}\rangle. \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\varphi(u,v) - \varphi(\bar{x},\bar{y}) \geq \langle (\bar{x}^*, 0), (u,v) - (\bar{x},\bar{y})\rangle, \quad \forall (u,v) \in \mathrm{gph}\, G.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&(\varphi + \delta(\cdot;\operatorname{gph} G))(u,v) - (\varphi + \delta(\cdot;\operatorname{gph} G))(\bar{x},\bar{y})\\ &\geq \langle(\bar{x}^*,0),(u,v)-(\bar{x},\bar{y})\rangle, \quad \forall (u,v)\in X\times Y.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Từ (4.11) ta có

$$(\bar{x}^*,0)\in\partial(\varphi+\delta(\cdot;\operatorname{gph} G))(\bar{x},\bar{y}). \tag{4.12}$$

Do $\operatorname{gph} G$ là lồi nên $\delta(\cdot;\operatorname{gph} G) : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi. Hiển nhiên $\delta(\cdot;\operatorname{gph} G)$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\operatorname{int}(\operatorname{gph} G)$. Vì vậy, nếu điều kiện chính quy (a) được thỏa mãn thì $\delta(\cdot;\operatorname{gph} G)$ liên tục tại một điểm thuộc $\operatorname{dom}\varphi$. Theo Định lý 4.1.1, từ (4.12) ta có

$$\begin{aligned}(\bar{x}^*,0) &\in \partial\varphi(\bar{x},\bar{y}) + \partial\delta(\cdot;\operatorname{gph} G)(\bar{x},\bar{y})\\ &= \partial\varphi(\bar{x},\bar{y}) + N((\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Vậy tồn tại $(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})$ sao cho

$$(\bar{x}^*,0)\in(x^*,y^*)+N((\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G),$$

hay

$$(\bar{x}^*-x^*,-y^*)\in N((\bar{x},\bar{y});\operatorname{gph} G),$$

tức là

$$\bar{x}^*-x^*\in D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*).$$

Bao hàm thức cuối kéo theo

$$\bar{x}^*\in x^*+D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*). \tag{4.14}$$

Xét trường hợp điều kiện chính quy (b) được thỏa mãn. Vì $\operatorname{dom}\delta(\cdot;\operatorname{gph} G) = \operatorname{gph} G$, nên từ điều kiện (b) ta suy ra rằng $\varphi$ liên tục tại một điểm thuộc $\operatorname{dom}\delta(\cdot;\operatorname{gph} G)$. Do đó, vẫn theo Định lý 4.1.1, từ (4.12) ta cũng suy ra (4.13). Vì thế, tồn tại $(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})$ sao cho bao hàm thức (4.14) được thỏa mãn. Trong cả hai trường hợp, do phần tử $\bar{x}^*\in\partial\mu(\bar{x})$ được lấy tùy ý, nên từ (4.14) ta suy ra rằng

$$\partial\mu(\bar{x})\subset\bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})}\big\{x^*+D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}.$$

Để thiết lập bao hàm thức ngược lại, chúng ta cần chứng minh rằng với mỗi phần tử $(x^*, y^*) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ bao hàm thức sau nghiệm đúng:

$$x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \subset \partial\mu(\bar{x}).$$

Lấy tùy ý $u^* \in x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$, ta chỉ cần chứng tỏ rằng $u^* \in \partial\mu(\bar{x})$. Bao hàm thức $u^* \in x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$ kéo theo

$$u^* - x^* \in D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*). \tag{4.15}$$

Điều kiện (4.15) lại tương đương với

$$\begin{aligned} &(u^* - x^*, -y^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G) \\ &\Leftrightarrow (u^* - x^*, -y^*) \in \partial\delta((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G) \\ &\Leftrightarrow (u^*, 0) \in (x^*, y^*) + \partial\delta((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G). \end{aligned}$$

Vì vậy ta có

$$(u^*, 0) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \partial\delta((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G).$$

Dưới các điều kiện chính quy (a) và (b), sử dụng Định lý 4.1.1 ta thấy rằng bao hàm thức cuối tương đương với

$$(u^*, 0) \in \partial(\varphi + \delta(\cdot; \operatorname{gph} G))(\bar{x}, \bar{y}).$$

Suy ra

$$\varphi(x, y) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \geq \langle u^*, x - \bar{x} \rangle + \langle 0, y - \bar{y} \rangle, \quad \forall (x, y) \in \operatorname{gph} G. \tag{4.16}$$

Với mỗi $x \in \operatorname{dom} G$ cố định, lấy infimum cả hai vế của (4.16) theo $y \in G(x)$ và lưu ý rằng $\mu(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, ta được

$$\mu(x) - \mu(\bar{x}) \geq \langle u^*, x - \bar{x} \rangle.$$

Vì $\mu(x) = +\infty$ với mọi $x \notin \operatorname{dom} G$, từ đó ta suy ra rằng $u^* \in \partial\mu(\bar{x})$.

Vậy công thức (4.9) nghiệm đúng.

Với mỗi $\bar{x} \in \operatorname{dom} \mu$ cho trước, vì (4.9) đúng với mọi $\bar{y} \in M(\bar{x})$, nên công thức (4.10) cũng nghiệm đúng. □

**Định lý 4.1.3.** *Dưới các giả thiết về $G$ và $\varphi$ như trong Định lý 4.1.2, nếu một trong hai điều kiện chính quy* (a) *hoặc* (b) *được thỏa mãn, thì với mỗi $\bar{x} \in \operatorname{dom} \mu$ và với mỗi $\bar{y} \in M(\bar{x})$ ta có*

$$\partial^{\infty}\mu(\bar{x}) = \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial^{\infty}\varphi(\bar{x},\bar{y})} \big\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}. \tag{4.17}$$

*Vì vậy,*

$$\partial^{\infty}\mu(\bar{x}) = \bigcap_{\bar{y}\in M(\bar{x})} \; \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial^{\infty}\varphi(\bar{x},\bar{y})} \big\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}. \tag{4.18}$$

**Chứng minh.** Nếu (4.17) nghiệm đúng với mọi $\bar{y} \in M(\bar{x})$, thì (4.18) cũng nghiệm đúng. Để chứng minh bao hàm thức " $\subset$ " trong (4.17), ta lấy một phần tử bất kỳ $\bar{u}^* \in \partial^{\infty}\mu(\bar{x})$. Khi đó, theo Mệnh đề 4.1.2 ta có $\bar{u}^* \in N(\bar{x}; \operatorname{dom}\mu)$, tức là

$$\langle \bar{u}^*, x - \bar{x}\rangle \le 0, \quad \forall x \in \operatorname{dom}\mu. \tag{4.19}$$

Ta cần chỉ ra rằng

$$\bar{u}^* \in \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial^{\infty}\varphi(\bar{x},\bar{y})} \big\{x^* + D^*G(\bar{x},\bar{y})(y^*)\big\}. \tag{4.20}$$

Ta có

$$\langle \bar{u}^*, x - \bar{x}\rangle \le 0, \quad \forall (x,y) \in \operatorname{dom}\varphi \;\text{ mà }\; y \in G(x). \tag{4.21}$$

Thật vậy, với mỗi $x \in \operatorname{dom}\mu = \{u \in X \mid \mu(u) \in \mathbb{R}\}$, do (4.19) ta có

$$\langle \bar{u}^*, x - \bar{x}\rangle \le 0. \tag{4.22}$$

Lấy tùy ý $(x, y) \in \operatorname{dom}\varphi$ mà $y \in G(x)$. Xét hai trường hợp sau:

*Trường hợp 1:* $x \in \operatorname{dom}\mu$. Khi đó, như đã nói ở trên, bất đẳng thức (4.22) nghiệm đúng.

*Trường hợp 2:* $x \notin \operatorname{dom}\mu$. Ta để ý rằng

$$\mu(x) = \inf\{\varphi(x,v) \mid v \in G(x)\} \le \varphi(x,y),$$

vì $y \in G(x)$. Nếu $\mu(x) = +\infty$ thì từ bất đẳng thức trên ta có $\varphi(x, y) = +\infty$, mâu thuẫn với điều kiện $(x, y) \in \operatorname{dom} \varphi$. Nếu $\mu(x) = -\infty$ thì ta phải có $G(x) \neq \emptyset$. Theo định nghĩa, $\bar{u}^* \in \partial^\infty \mu(\bar{x})$ khi và chỉ khi

$$(\bar{u}^*, 0) \in N((\bar{x}, \mu(\bar{x})); \operatorname{epi} \mu).$$

Vì $\mu$ lồi nên $\operatorname{epi} \mu$ là tập lồi. Vậy theo Mệnh đề 1.2.2 ta có

$$\langle (\bar{u}^*, 0), (u, \alpha) - (\bar{x}, \mu(\bar{x})) \rangle \leq 0, \quad \forall (u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \text{ mà } \alpha \geq \mu(u),$$

tức là

$$\langle \bar{u}^*, u - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall (u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \text{ mà } \alpha \geq \mu(u).$$

Từ đó ta suy ra rằng $\langle \bar{u}^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0$. (Vì $\mu(x) = -\infty$, nên với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có $\alpha \geq \mu(x)$).

Tóm lại, ta đã chứng minh được rằng (4.21) nghiệm đúng. Ta có thể viết lại (4.21) như sau:

$$\langle \bar{u}^*, x - \bar{x} \rangle + \langle 0, y - \bar{y} \rangle \leq 0, \ \forall (x, y) \in \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{gph} G.$$

Điều đó chứng tỏ rằng

$$(\bar{u}^*, 0) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{gph} G). \tag{4.23}$$

Ta có $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{gph} G$. Thật vậy, vì $\bar{y} \in M(\bar{x})$ nên $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \mu(\bar{x})$. Suy ra $\bar{y} \in G(\bar{x})$ và $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$, vì thế $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} G$ và $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{dom} \varphi$.

Dưới giả thiết chính quy (a), ta có $\operatorname{int}(\operatorname{gph} G) \cap \operatorname{dom} \varphi \neq \emptyset$. Khi đó, theo Mệnh đề 4.1.3,

$$N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{gph} G) = N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{dom} \varphi) + N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G). \tag{4.24}$$

Dưới giả thiết chính quy (b), $\varphi$ liên tục tại một điểm $(x^0, y^0) \in \operatorname{gph} G$, tức là $(x^0, y^0) \in \operatorname{gph} G \cap \operatorname{int}(\operatorname{dom} \varphi)$. Suy ra $\operatorname{gph} G \cap \operatorname{int}(\operatorname{dom} \varphi) \neq \emptyset$.

Do đó, vẫn theo Mệnh đề 4.1.3, ta cũng có (4.24). Từ (4.23) và (4.24) ta suy ra rằng

$$(\bar{u}^*, 0) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{dom}\varphi) + N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\, G).$$

Sử dụng Mệnh đề 4.1.2, từ đó ta có

$$(\bar{u}^*, 0) \in \partial^\infty \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\, G).$$

Vì vậy, tồn tại $(x^*, y^*) \in \partial^\infty \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho

$$\begin{aligned} &(\bar{u}^*, 0) \in (x^*, y^*) + N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\, G) \\ &\Leftrightarrow (\bar{u}^* - x^*, -y^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph}\, G) \\ &\Leftrightarrow \bar{u}^* - x^* \in D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*), \end{aligned}$$

hay $\bar{u}^* \in x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$. Điều này cho thấy bao hàm thức (4.20) nghiệm đúng.

Để thu được bao hàm thức “ $\supset$ ” trong (4.17), ta lấy một phần tử $\bar{u}^*$ thuộc tập hợp ở vế phải của (4.17). Thực hiện các lập luận trong lược đồ chứng minh trên theo thứ tự ngược lại, ta thu được (4.21). Từ (4.21) ta dễ dàng suy ra (4.19), mà điều này chứng tỏ rằng $\bar{u}^* \in \partial^\infty \mu(\bar{x})$.

Vậy đẳng thức (4.17) nghiệm đúng. □

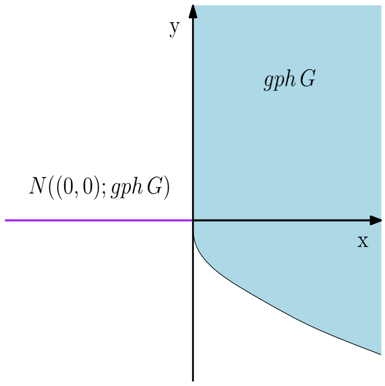
Do phép lấy giao theo $\bar{y} \in M(\bar{x})$, đánh giá (4.18) cho tập $\partial^\infty \mu(\bar{x})$ là tốt hơn (4.17).

Sau đây là hai ví dụ đơn giản, được xây dựng để minh họa cho Định lý 4.1.2 và Định lý 4.1.3.

**Ví dụ 4.1.1.** Lấy $X = Y = \mathbb{R}$ và $\bar{x} = 0$. Xét hàm giá trị tối ưu $\mu(x)$ được xác định bởi công thức (1.18) với $\varphi(x, y) \equiv 0$ và

$$G(x) = \begin{cases} \{y \mid y \geq -\sqrt{x}\} & \text{nếu } x \geq 0, \\ \emptyset & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Khi đó ta có $\mu(x) = 0$ với mọi $x \geq 0$, $\mu(x) = +\infty$ với mọi $x < 0$,




Hình 5

$\partial\mu(\bar{x}) = (-\infty, 0]$, $\partial\varphi(x, y) = \{(0, 0)\}$ với mọi $(x, y) \in X \times Y$, và $M(\bar{x}) = [0, +\infty)$. Vì $G$ là ánh xạ đa trị lồi, nên với mỗi $\bar{y} \in M(\bar{x}) = [0, +\infty)$ ta có

$$\begin{aligned} &N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph\,G}) \\ &= \big\{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x^*, y^*), (x, y) - (0, 0)\rangle \le 0,\ \ \forall (x, y) \in \mathrm{gph\,G}\big\} \\ &= (-\infty, 0] \times \{0\} \end{aligned}$$

và

$$D^*G(\bar{x}, \bar{y})(0) = \{x^* \in \mathbb{R} \mid (x^*, 0) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph\,G})\} = (-\infty, 0].$$

Đối với các dưới vi phân suy biến, ta có

$$\partial^\infty\mu(\bar{x}) = (-\infty, 0], \qquad \partial^\infty\varphi(x, y) = \{(0, 0)\}\ \ \forall (x, y) \in X \times Y.$$

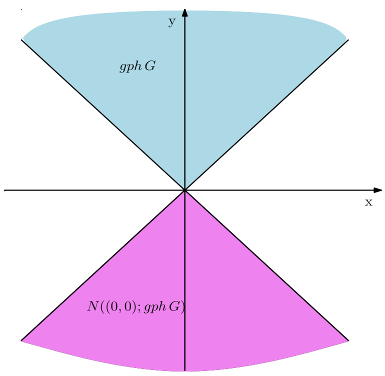
Trong bài toán này, các bao hàm thức (4.9), (4.10), (4.17) và (4.18) nghiệm đúng dưới dạng các đẳng thức, bởi vì giá trị của cả hai vế của mỗi bao hàm thức đó đều bằng $(-\infty, 0]$.

**Ví dụ 4.1.2.** Lấy $X = Y = \mathbb{R}$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Với $\varphi(x, y) \equiv 0$ và

$$G(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \ge |x|\}.$$

Ta có

$$\mu(x) = \inf\{\varphi(x, y) \mid y \in G(x)\} = 0.$$




Hình 6

Do đó $\partial\mu(0) = \{0\}$. Dễ thấy rằng $M(\bar{x}) = [0, +\infty)$, và với mỗi $\bar{y} \in M(\bar{x})$ ta có $\partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \{(0, 0)\}$ và

$$D^*G(\bar{x}, \bar{y})(0) = \{x^* \in \mathbb{R} \mid (x^*, 0) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \mathrm{gph\,G})\} = \{0\}.$$

Đối với các dưới vi phân suy biến, ta có

$$\partial^\infty\mu(\bar{x}) = \{0\}, \quad \partial^\infty\varphi(x, y) = \{(0, 0)\} \ \forall(x, y) \in X \times Y.$$

Trong bài toán này, các bao hàm thức (4.9), (4.10), (4.17) và (4.18) nghiệm đúng dưới dạng các đẳng thức, bởi vì giá trị của cả hai vế của mỗi bao hàm thức đó đều là tập hợp $\{0\}$.

## 4.2 Bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc phiếm hàm

Xét bài toán

$$\min\left\{\varphi(x, y) \mid (x, y) \in C,\ g_i(x, y) \le 0,\ i = \overline{1, m},\ h_j(x, y) = 0,\ j = \overline{1, k}\right\}, \tag{4.25}$$

trong đó $C \subset X \times Y$ là tập lồi, $g_i : X \times Y \to \mathbb{R}$, với $i = \overline{1, m}$, là các hàm lồi, liên tục, còn $h_j : X \times Y \to \mathbb{R}$, với $j = \overline{1, k}$ là các hàm affine lên tục. Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$G(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in C,\ g(x, y) \le 0,\ h(x, y) = 0\}. \tag{4.26}$$

**Mệnh đề 4.2.1.** *Ánh xạ đa trị $G(\cdot)$ được cho bởi công thức (4.26) là lồi.*

**Chứng minh.** Ta sẽ chỉ ra rằng $\operatorname{gph} G \subset X \times Y$ là tập lồi. Lấy tùy ý $(x, y)$, $(u, v) \in \operatorname{gph} G$ và $\lambda \in (0, 1)$, ta cần chứng minh rằng

$$\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(u, v) \in \operatorname{gph} G,$$

tức là

$$\lambda y + (1 - \lambda)v \in G(\lambda x + (1 - \lambda)u). \tag{4.27}$$

Vì $(x, y) \in \operatorname{gph} G$ và $(u, v) \in \operatorname{gph} G$, nên $y \in G(x)$ và $v \in G(u)$, tức là

$$g(x, y) \le 0, \quad h(x, y) = 0 \tag{4.28}$$

và

$$g(u, v) \le 0, \quad h(u, v) = 0, \tag{4.29}$$

ở đó

$$g(x, y) := (g_1(x, y), \ldots, g_m(x, y))^T, \; h(x, y) := (h_1(x, y), \ldots, h_k(x, y))^T,$$

với $^T$ ký hiệu phép chuyển vị ma trận, và bất đẳng thức $z \le w$ giữa hai véctơ thuộc $\mathbb{R}^m$ có nghĩa là các tọa độ của $z$ nhỏ hơn hoặc bằng các tọa độ tương ứng của $w$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trong (4.28) với $\lambda$, nhân cả hai vế của bất đẳng thức trong (4.29) với $(1 - \lambda)$, rồi cộng lại, và sử dụng tính lồi của các hàm $g_i$, ta được

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)u, \lambda y + (1 - \lambda)v) \le 0.$$

Tương tự, sử dụng tính affine của các hàm $h_j$ và các đẳng thức trong (4.28) và (4.29), ta có

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)u, \lambda y + (1 - \lambda)v) = 0.$$

Từ đó ta suy ra rằng (4.27) nghiệm đúng. Tính lồi của $\operatorname{gph} G$ đã được chứng minh. $\square$

Định lý sau đây đặc trưng tính lồi của hàm số nhận giá trị thực suy rộng, xác định trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff.

**Định lý 4.2.1.** (Xem [5, tr. 170]) *Cho $X$ là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff. Giả sử $f$ là hàm lồi, chính thường trên $X$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) *$f$ bị chặn trên trong một lân cận của một điểm $x \in X$;*

(ii) *$f$ liên tục tại một điểm $x \in X$;*

(iii) $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f) \neq \emptyset$;

(iv) $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$ *và $f$ liên tục trên* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. *Hơn nữa,*

$$\operatorname{int}(\operatorname{epi} f) = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X \mid x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f), \alpha > f(x)\}.$$

Chúng ta sẽ cần đến Định lý 4.2.1 và cả Bổ đề Farkas cho không gian vô hạn chiều sau đây.

**Bổ đề 4.2.1.** (Xem [4]) *Cho $W$ là không gian véctơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Cho $A : W \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính và $\gamma : W \to \mathbb{R}$ là phiếm hàm tuyến tính. Giả sử rằng ánh xạ $A$ được biểu diễn dưới dạng $A = (\alpha_i)_i^m$, ở đó mỗi $\alpha_i : W \to \mathbb{R}$ là một phiếm hàm tuyến tính (điều đó có nghĩa là, với mỗi $x \in W$, $A(x)$ là một véctơ cột mà thành phần thứ i là số thực $\alpha_i(x)$, với $i = 1, ..., m$). Khi đó, bất đẳng thức $\gamma(x) \leq 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức*

$$\alpha_1(x) \leq 0,\ \alpha_2(x) \leq 0, ...,\ \alpha_m(x) \leq 0$$

*khi và chỉ khi tồn tại các hệ số thực $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \geq 0$ sao cho*

$$\gamma = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m.$$

Bổ đề sau đây là một kết quả đã biết. Nó sẽ đóng vai trò quan trọng trong việc áp dụng Định lý 4.1.2 và Định lý 4.1.3 cho bài toán (4.25). Chứng minh gốc khá vắn tắt trong [5, tr. 206] của bổ đề này sẽ được trình bày lại ở đây với đầy đủ các lập luận chi tiết.

**Bổ đề 4.2.2.** (Xem [5, tr. 206]) *Cho $f$ là hàm lồi, chính thường trên không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff $X$, liên tục tại một* *điểm* $x_0 \in X$. *Giả sử rằng bất đẳng thức* $f(x_1) < f(x_0) = \alpha_0$ *xảy ra với một điểm* $x_1 \in X$ *nào đó. Khi đó,*

$$N(x_0; \mathcal{L}_{\alpha_0} f) = K_{\partial f(x_0)}, \tag{4.30}$$

*với* $\mathcal{L}_{\alpha_0} f := \{x \mid f(x) \le \alpha_0\}$,

$$K_{\partial f(x_0)} := \{u^* \in X^* \mid u^* = \lambda x^*,\ \lambda \ge 0,\ x^* \in \partial f(x_0)\},$$

*và* $X^*$ *ký hiệu không gian đối ngẫu của* $X$.

**Chứng minh.** Để cho gọn, ta đặt $A = \mathcal{L}_{\alpha_0} f$. Vì $f$ là hàm lồi nên $A$ là tập lồi. Rõ ràng $x_0 \in A$. Ta cần chứng minh rằng $N(x_0; A) = K_{\partial f(x_0)}$.

Trước hết, ta đi chứng minh rằng $K_{\partial f(x_0)} \subset N(x_0; A)$. Lấy tùy ý một phần tử $u^* \in K_{\partial f(x_0)}$, tức là $u^* = \lambda x^*$, với $x^* \in \partial f(x_0)$ và $\lambda \ge 0$. Vì $x^* \in \partial f(x_0)$ nên

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \le f(x) - f(x_0), \quad \forall x \in X.$$

Do đó, với mọi $x$ thuộc $A$, vì $f(x) \le f(x_0)$ nên $\langle x^*, x - x_0 \rangle \le 0$. Điều này chứng tỏ rằng $x^* \in N(x_0; A)$. Suy ra $u^* = \lambda x^* \in N(x_0; A)$. Vậy $K_{\partial f(x_0)} \subset N(x_0; A)$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh rằng $N(x_0; A) \subset K_{\partial f(x_0)}$. Lấy tùy ý $x^* \in N(x_0; A)$. Nếu $x^* = 0$ thì hiển nhiên $x^* \in K_{\partial f(x_0)}$. Xét trường hợp $x^* \neq 0$. Tập hợp

$$\mathcal{H} := \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X \mid \alpha = f(x_0),\ \langle x^*, x - x_0 \rangle = 0\}$$

là một tập affine. Vì $f$ là hàm lồi nên epi $f$ là tập lồi. Do giả thiết $f$ liên tục tại một điểm $x_0$, $f$ bị chặn ở trên một lân cận của $x_0$. Theo Định lý 4.2.1 ta có $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f) \neq \emptyset$. Thêm vào đó, ta còn có $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$, $f$ liên tục trên $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, và ta có thể xác định tập $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f)$ bằng công thức được cho trong tính chất (iv) ở Định lý 4.2.1. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{H} \cap \operatorname{int}(\operatorname{epi} f) = \emptyset$. Giả sử phản chứng: tồn tại $(\bar{\alpha}, \bar{x}) \in \mathcal{H} \cap \operatorname{int}(\operatorname{epi} f)$. Tính chất cuối có nghĩa là

$$\bar{\alpha} = f(x_0), \quad \langle x^*, \bar{x} - x_0 \rangle = 0$$

và

$$\bar{\alpha} > f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f).$$

Do $\alpha_0 = f(x_0) = \bar{\alpha} > f(\bar{x})$ và do $f$ liên tục tại $\bar{x}$ nên tồn tại lân cận gốc $U \in \mathcal{N}(0)$ sao cho

$$\alpha_0 > f(\bar{x} + u), \quad \forall u \in U.$$

Từ đó ta có

$$\bar{x} + U \subset \mathcal{L}_{\alpha_0} f = A.$$

Vì $x^* \in N(x_0; A)$ nên $\langle x^*, (\bar{x} + u) - x_0 \rangle \leq 0$ với mọi $u \in U$. Do $\langle x^*, \bar{x} - x_0 \rangle = 0$, ta có

$$\langle x^*, u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in U.$$

Vậy $\langle x^*, v \rangle = 0$ với mọi $v \in U \cap (-U)$, và do đó $x^* = 0$ (mâu thuẫn). Tóm lại, $\mathcal{H} \cap \operatorname{int}(\operatorname{epi} f) = \emptyset$. Theo Định lý tách các tập hợp lồi (xem [8, Theorem 3.4(a), tr. 59]), tồn tại phần tử $(\alpha^*, y^*) \in (\mathbb{R} \times X^*) \setminus \{(0,0)\}$ mà

$$\langle (\alpha^*, y^*), (\alpha, x) \rangle \leq \langle (\alpha^*, y^*), (\alpha', x') \rangle, \ \forall (\alpha, x) \in \mathcal{H}, \ \forall (\alpha', x') \in \operatorname{epi} f. \tag{4.31}$$

Nếu $\alpha^* < 0$ thì thay $(\alpha, x) = (\alpha_0, x_0)$ vào vế trái và

$$(\alpha', x') = (\alpha_0 + \mu, x_0) = (f(x_0) + \mu, x_0),$$

với $\mu \geq 0$, vào vế phải của bất đẳng thức trong (4.31), rồi cho $\mu \to +\infty$, ta nhận được điều vô lý. Vậy ta có thể giả sử rằng $\alpha^* \geq 0$.

Nếu $\alpha^* = 0$ thì (4.31) kéo theo

$$\langle y^*, x \rangle \leq \langle y^*, x' \rangle, \ \forall (\alpha, x) \in \mathcal{H}, \ \forall (\alpha', x') \text{ mà } \alpha' \geq f(x').$$

Thay $(\alpha, x) = (\alpha_0, x_0)$ với lưu ý rằng $(\alpha_0, x_0) \in \mathcal{H}$, và chọn $(\alpha', x') = (f(x), x) \in \operatorname{epi} f$ với $x \in \operatorname{dom} f$, từ đó ta có

$$\langle y^*, x_0 \rangle \leq \langle y^*, x \rangle, \quad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

Do $x_0 \in \text{int}(\text{dom}\, f)$ nên tồn tại $U_1 \in \mathcal{N}(0)$ sao cho $U_1 \subset \text{dom}\, f$. Vì vậy,

$$\langle y^*, x_0 \rangle \le \langle y^*, x_0 + u \rangle, \quad \forall u \in U_1,$$

tức là

$$\langle y^*, u \rangle \ge 0, \quad \forall u \in U_1.$$

Suy ra $y^* = 0$ (mâu thuẫn, vì $(\alpha^*, y^*) \ne (0,0)$). Do đó trường hợp $\alpha^* = 0$ không thể xảy ra .

Xét trường hợp $\alpha^* > 0$. Trong công thức (4.31), lấy $(\alpha', x') = (\alpha_0, x_0) \in \text{epi}\, f$, ta được

$$\langle (\alpha^*, y^*), (\alpha, x) \rangle \le \langle (\alpha^*, y^*), (\alpha_0, x_0) \rangle, \quad \forall (\alpha, x) \in \mathcal{H}.$$

Suy ra

$$\langle (\alpha^*, y^*), (\alpha, x) - (\alpha_0, x_0) \rangle \le 0, \quad \forall (\alpha, x) \in \mathcal{H}. \tag{4.32}$$

Vì $\mathcal{H}$ là tập affine và vì $(\alpha_0, x_0) \in \mathcal{H}$ nên $M := \mathcal{H} - (\alpha_0, x_0)$ là không gian con song song với $\mathcal{H}$. Do (4.32) ta có

$$\langle (\alpha^*, y^*), (\beta, u) \rangle \le 0, \quad \forall (\beta, u) \in M,$$

suy ra

$$\langle (\alpha^*, y^*), (\beta, u) \rangle = 0, \quad \forall (\beta, u) \in M.$$

Vậy từ (4.32) ta có

$$\beta_0 = \langle (\alpha^*, y^*), (\alpha, x) \rangle = \langle (\alpha^*, y^*), (\alpha_0, x_0) \rangle, \quad \forall (\alpha, x) \in \mathcal{H}.$$

Đặt $\langle (\alpha^*, y^*), (\alpha_0, x_0) \rangle$ và viết lại tính chất cuối như sau:

$$\langle (\alpha^*, y^*), (\alpha, x) \rangle = \beta_0, \quad \forall (\alpha, x) \in \mathcal{H}. \tag{4.33}$$

Trong không gian tích $\mathbb{R} \times X$ ta xét siêu phẳng

$$\Pi := \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X \mid \langle (\alpha^*, y^*), (\alpha, x) \rangle = \beta_0\}.$$

Do (4.33), $\mathcal{H} \subset \Pi$. Với mỗi $(\alpha, x) \in \Pi$, ta có

$$\begin{aligned}
&\langle(\alpha^*, y^*), (\alpha, x)\rangle = \alpha^*\alpha_0 + \langle y^*, x_0\rangle \\
&\Leftrightarrow \alpha^*\alpha + \langle y^*, x\rangle = \alpha^* f(x_0) + \langle y^*, x_0\rangle \\
&\Leftrightarrow \alpha + \langle(\alpha^*)^{-1}y^*, x - x_0\rangle = f(x_0),
\end{aligned}$$

và điều này tương đương với

$$\alpha = \langle -(\alpha^*)^{-1}y^*, x - x_0\rangle + f(x_0). \tag{4.34}$$

Đặt $\widetilde{y}^* = -(\alpha^*)^{-1}y^*$, từ (4.34) ta có

$$\alpha = \langle \widetilde{y}^*, x - x_0\rangle + f(x_0), \quad \forall(\alpha, x) \in \Pi. \tag{4.35}$$

Bao hàm thức $\mathcal{H} \subset \Pi$ kéo theo $\widetilde{y}^* = \gamma x^*$, với $\gamma \in \mathbb{R}$. Thật vậy, vì $\mathcal{H} \subset \Pi$, do (4.35) ta có

$$\alpha = \langle \widetilde{y}^*, x - x_0\rangle + f(x_0), \quad \forall(\alpha, x) \in \mathcal{H}.$$

Do $\alpha = f(x_0)$ với mỗi $(\alpha, x) \in \mathcal{H}$, điều đó có nghĩa là

$$0 = \langle \widetilde{y}^*, x - x_0\rangle,$$

với mỗi $x$ thỏa mãn điều kiện $\langle x^*, x - x_0\rangle = 0$. Vậy từ $\langle x^*, x - x_0\rangle = 0$ suy ra $\langle \widetilde{y}^*, x - x_0\rangle = 0$, hay $\langle x^*, u\rangle = 0$ kéo theo $\langle \widetilde{y}^*, u\rangle = 0$. Tức là bất đẳng thức $\langle \widetilde{y}^*, u\rangle \le 0$ là hệ quả của hệ bất đẳng thức

$$\langle x^*, u\rangle \le 0, \quad \langle -x^*, u\rangle \le 0.$$

Theo Bổ đề 4.2.1, tồn tại $\alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0$ mà

$$\widetilde{y}^* = \alpha_1 x^* + \alpha_2(-x^*) = (\alpha_1 - \alpha_2)x^* = \gamma x^*,$$

với $\gamma := \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\gamma < 0$.

Vì $\alpha^* > 0$, ta có thể thay cặp $(\alpha^*, y^*)$ trong (4.31) bởi $(1, y^*/\alpha^*)$, tức là ta có thể coi $\alpha^* = 1$. Do tính liên tục của $f$ tại $x_0$ và do công thức (4.31), tồn tại $U_2 \in \mathcal{N}(0)$ sao cho

$$\langle(1, \widetilde{y}^*), (\alpha_0, x_0)\rangle \le \langle(1, \widetilde{y}^*), (f(x), x)\rangle, \ \ \forall x \in x_0 + U_2.$$

Điều này tương đương với

$$\alpha_0 \le f(x) + \langle \widetilde{y}^*, x - x_0 \rangle, \ \ \forall x \in x_0 + U_2. \tag{4.36}$$

Thế $x = (1-t)x_0 + tx_1$, với $t \in (0,1)$ được chọn đủ bé sao cho $x \in x_0 + U_2$, vào bất đẳng thức cuối, ta được

$$\begin{aligned}\alpha_0 &\le f((1-t)x_0 + tx_1) + t\langle \widetilde{y}^*, x_1 - x_0 \rangle \\ &\le (1-t)f(x_0) + tf(x_1) + t\langle \widetilde{y}^*, x_1 - x_0 \rangle.\end{aligned}$$

Vì $\alpha_0 = f(x_0)$, từ đó ta suy ra rằng

$$f(x_0) \le f(x_1) + \langle \widetilde{y}^*, x_1 - x_0 \rangle. \tag{4.37}$$

Nếu $\gamma = 0$ thì $\widetilde{y}^* = 0$, do đó (4.37) kéo theo $f(x_0) \le f(x_1)$, mâu thuẫn với giả thiết $f(x_1) < f(x_0)$. Nếu $\gamma > 0$ thì $\widetilde{y}^* = \gamma x^* \in N(x_0; A)$. Vậy với mọi $x \in A = \mathcal{L}_{\alpha_0} f$ ta có $\langle \widetilde{y}^*, x - x_0 \rangle \le 0$. Nói riêng ra,

$$\langle \widetilde{y}^*, x_1 - x_0 \rangle \le 0.$$

Mặt khác, do (4.37) ta có

$$\langle \widetilde{y}^*, x_1 - x_0 \rangle \ge f(x_0) - f(x_1) > 0.$$

Ta đã đi đến điều mâu thuẫn. Vậy $\gamma < 0$.

Từ công thức (4.36) ta suy ra rằng

$$f(x_0) \le f(x) + \langle \widetilde{y}^*, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in x_0 + U_2.$$

Điều đó chứng tỏ rằng hàm lồi $x \mapsto f(x) + \langle \widetilde{y}^*, x - x_0 \rangle$ đạt cực tiểu địa phương tại $x_0$. Vì cực tiểu địa phương của hàm lồi là cực tiểu toàn cục, nên ta có

$$\langle -\widetilde{y}^*, x - x_0 \rangle \le f(x) - f(x_0), \quad \forall x \in X,$$

tức là $-\widetilde{y}^* \in \partial f(x_0)$, hay $-\gamma x^* \in \partial f(x_0)$. Do $\gamma < 0$, từ đó ta có $x^* \in \dfrac{1}{-\gamma} \partial f(x_0) \in K_{\partial f(x_0)}$. Đó chính là điều phải chứng minh. □

Bổ đề sau mô tả nón pháp tuyến của giao của một số hữu hạn các siêu mặt affine.

**Bổ đề 4.2.3.** *Cho $X, Y$ là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff. Cho các véctơ $(x_j^*, y_j^*) \in X^* \times Y^*$ và các số thực $\alpha_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,k}$. Đặt*

$$Q_j = \{(x,y) \mid \langle (x_j^*, y_j^*), (x,y)\rangle = \alpha_j\}.$$

*Khi đó, với mỗi $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap\limits_{j=1}^{k} Q_j$, ta có*

$$N((\bar{x},\bar{y}); \bigcap_{j=1}^{k} Q_j) = \operatorname{span}\{(x_j^*, y_j^*) \mid j = \overline{1,k}\}, \tag{4.38}$$

*ở đó* $\operatorname{span}\{(x_j^*, y_j^*) \mid j = \overline{1,k}\}$ *ký hiệu không gian con sinh bởi các véctơ $(x_j^*, y_j^*)$, $j = \overline{1,k}$.*

Chúng ta bỏ qua chứng minh của bổ đề này, vì nó được thực hiện khá dễ dàng nhờ Bổ đề 4.2.1.

Trở lại xét bài toán quy hoạch lồi có tham số (4.25). Kết quả chính của mục này được phát biểu như sau.

**Định lý 4.2.2.** *Giả sử rằng*

$$h_j(x,y) = \langle (x_j^*, y_j^*), (x,y)\rangle - \alpha_j,\ \ \alpha_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,k}.$$

*Nếu một trong hai điều kiện chính quy sau đây được thỏa mãn*

(a) $\operatorname{int}(\operatorname{gph} G) \cap \operatorname{dom} \varphi \neq \emptyset$,

(b) *$\varphi$ liên tục tại một điểm $(x^0, y^0) \in \operatorname{gph} G$, thì với mọi $\bar{x} \in \operatorname{dom} \mu$ ta có*

$$\partial \mu(\bar{x}) = \bigcap_{\bar{y} \in M(\bar{x})} \ \bigcup_{(x^*,y^*) \in \partial\varphi(\bar{x},\bar{y})} \big\{x^* + Q^*\big\} \tag{4.39}$$

*và*

$$\partial^\infty \mu(\bar{x}) = \bigcap_{\bar{y} \in M(\bar{x})} \ \bigcup_{(x^*,y^*) \in \partial^\infty\varphi(\bar{x},\bar{y})} \big\{x^* + Q^*\big\}, \tag{4.40}$$

*ở đó*

$$Q^* := \Big\{ u^* \in X^* \mid (u^*, -y^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); C) + \sum_{i \in I(\bar{x},\bar{y})} \operatorname{cone} \partial g_i(\bar{x}, \bar{y}) + \operatorname{span}\{(x_j^*, y_j^*),\ j = \overline{1,k}\} \Big\},$$

*ở đó* $I(\bar{x}, \bar{y}) := \{i \mid g_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$ *và* $\operatorname{cone} M := \{tz \mid t \geq 0, z \in M\}$ *ký hiệu hình nón sinh bởi* $M$*.*

**Chứng minh.** Vì $G : X \rightrightarrows Y$ với $G(x)$ được xác định bởi công thức (4.26) là ánh xạ đa trị lồi (xem Mệnh đề 4.2.1) và hàm mục tiêu $\varphi(x, y)$ của (4.25) là lồi, theo Định lý 4.1.2, với mọi $\bar{x} \in \operatorname{dom} \mu$, ta có

$$\partial\mu(\bar{x}) = \bigcap_{\bar{y} \in M(\bar{x})} \bigcup_{(x^*, y^*) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})} \big\{ x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \big\}. \tag{4.41}$$

Ta sẽ tính toán $D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$. Theo định nghĩa đối đạo hàm ta có

$$D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = \{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G)\}.$$

Nhận xét rằng

$$\operatorname{gph} G = C \cap \left( \bigcap_{i \in I(\bar{x},\bar{y})} \Omega_i \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^{k} Q_j \right),$$

trong đó

$$\Omega_i := \{(x, y) \mid g_i(x, y) \leq 0\}, \quad Q_j := \{(x, y) \mid h_j(x, y) = 0\},$$

là các tập lồi. Với $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} G$, giả sử rằng

$$\operatorname{int} C \cap \left( \bigcap_{i \in I(\bar{x},\bar{y})} \operatorname{int} \Omega_i \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^{k} Q_j \right) \neq \emptyset.$$

Khi đó, theo Mệnh đề 4.1.3 ta có

$$N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G) = N((\bar{x}, \bar{y}); C) + \sum_{i \in I(\bar{x},\bar{y})} N((\bar{x}, \bar{y}); \Omega_i) + N((\bar{x}, \bar{y}); \bigcap_{j=1}^{k} Q_j).$$

Theo Bổ đề 4.2.3 thì

$$N((\bar{x},\bar{y});\bigcap_{j=1}^{k}Q_j) = \operatorname{span}\left\{(x_j^*,y_j^*) \mid j=\overline{1,k}\right\}.$$

Theo Bổ đề 4.2.2 ta có

$$N((\bar{x},\bar{y});\Omega_i) = K_{\partial g_i(\bar{x},\bar{y})} = \operatorname{cone}\partial g_i(\bar{x},\bar{y}).$$

Vậy

$$\partial\mu(\bar{x}) = \bigcap_{\bar{y}\in M(\bar{x})}\ \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})}\{x^*+Q^*\},$$

ở đó

$$\begin{aligned}Q^* :=\Big\{&u^*\in X^* \mid (u^*,-y^*)\in N((\bar{x},\bar{y});C)\\ &+\sum_{i\in I(\bar{x},\bar{y})}\operatorname{cone}\partial g_i(\bar{x},\bar{y}) + \operatorname{span}\{(x_j^*,y_j^*), j=\overline{1,k}\}\Big\},\end{aligned}$$

và $I(\bar{x},\bar{y}) := \{i \mid g_i(\bar{x},\bar{y})=0\}$; tức là công thức (4.39) nghiệm đúng.

Công thức (4.40) cho dưới vi phân suy biến $\partial^\infty\mu(\bar{x})$ của $\mu$ tại $\bar{x}$ được chứng minh nhờ Định lý 4.1.3 và các lập luận tương tự như trên. □

## 4.3 So sánh với kết quả của J.-P. Aubin

Chúng ta nhắc lại rằng, nếu $X$ là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ là hàm số nhận giá trị trong tập số thực suy rộng, thì hàm số $f^*: X^*\to\overline{\mathbb{R}}$ được cho bởi

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\left[\langle x^*,x\rangle - f(x)\right],\quad x^*\in X^*, \tag{4.42}$$

được gọi là *hàm liên hợp* của $f$. Vì biểu thức trong ngoặc vuông ở (4.42) là hàm affine, liên tục yếu*, $f^*$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới theo tôpô yếu* (vậy epi $f^*$ là đóng yếu* trong $X^*\times\mathbb{R}$). Hàm liên hợp của $f^*$, được kí hiệu là $f^{**}$, là hàm số xác định trên $X$ và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$:

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*}\left[\langle x^*,x\rangle - f^*(x^*)\right]\quad (x\in X).$$

Rõ ràng, $f^{**}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới theo tôpô yếu của $X$. Định lý Fenchel-Moreau (xem [5, Theorem 1, tr. 175]) nói rằng: *"Cho $f$ là hàm chính thường trên $X$. Khi đó $f = f^{**}$ nếu và chỉ nếu $f$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới theo tôpô yếu của $X$."*

Tác giả J.-P. Aubin [3, Problem 35 - Subdifferentials of Marginal Functions, tr. 335] đã nghiên cứu vấn đề tương tự như vấn đề chúng ta đã xét trong chương này, với một cách tiếp cận khác. Cụ thể, trong các ký hiệu của chúng ta, Aubin đã xét bài toán:

$$(P_x) \qquad\qquad \min\{\varphi(y) \mid y \in G(x)\},$$

ở đó $X, Y$ là các không gian Hilbert, $\varphi : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, *nửa liên tục dưới*, $G : X \rightrightarrows Y$ là lồi, *có đồ thị đóng*. Hàm giá trị tối ưu của bài toán được cho bởi công thức

$$\mu(x) = \inf\{\varphi(y) \mid y \in G(x)\}. \tag{4.43}$$

Bằng cách sử dụng khái niệm hàm liên hợp, Định lý Fenchel-Moreau nói trên và một số kết quả bổ trợ có liên quan đến ánh xạ tuyến tính liên tục, các hàm lồi, tập lồi trên không gian Hilbert, Aubin đã chứng minh được định lý sau đây.

**Định lý 4.3.1.** (Xem [3, tr. 335]) *Giả sử rằng*

$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi - \operatorname{dom} G^{-1}), \tag{4.44}$$

*và giả sử rằng $\bar{y} \in G(\bar{x})$ là một nghiệm của $(P_{\bar{x}})$. Khi đó, $x^* \in \partial\mu(\bar{x})$ khi và chỉ khi tồn tại $y^* \in \partial\varphi(\bar{y})$ sao cho*

$$(-y^*, x^*) \in N((\bar{y}, \bar{x}); \operatorname{gph} G^{-1}),$$

*hay*

$$(x^*, -y^*) \in N((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G). \tag{4.45}$$

*Do đó,*

$$\partial\mu(\bar{x}) = D^*G(\bar{x}, \bar{y})(\partial\varphi(\bar{y})). \tag{4.46}$$

Chứng minh của Aubin là khá dài và khá phức tạp. Các điều kiện $\varphi$ là nửa liên tục dưới và $\operatorname{gph} G$ đóng là thực sự cần thiết cho các chứng minh của Aubin.

Hai khẳng định sau chỉ ra mối quan hệ giữa các giả thiết chính quy trong Định lý 4.1.2 và giả thiết chính quy trong Định lý 4.3.1.

**Khẳng định 1:** *Giả thiết chính quy (a) trong Định lý 4.1.2 kéo theo giả thiết chính quy* (4.44).

Thật vậy, nếu (a) nghiệm đúng thì tồn tại $(x^0, y^0) \in \operatorname{gph} G$, với $y^0 \in \operatorname{dom} \varphi$ và tồn tại $U \in \mathcal{N}(0_X),\ V \in \mathcal{N}(0_Y)$, $U$ và $V$ là các tập mở, sao cho

$$(x^0 + U) \times (y^0 + V) \subset \operatorname{gph} G,$$

tức là với mọi $x \in x^0 + U$ và với mọi $y \in y^0 + V$, $y \in G(x)$. Vậy $x \in G^{-1}(y)$, với mọi $x \in x^0 + U$ và $y \in y^0 + V$. Nói riêng ra, $y^0 + V \subset \operatorname{dom} G$. Vì $y^0 \in \operatorname{dom} \varphi$, từ đó ta có

$$0 \in -V = y^0 - (y^0 + V) \subset \operatorname{dom} \varphi - \operatorname{dom} G^{-1}. \qquad (4.47)$$

Vì $V$ là lân cận mở, $0 \in V$ nên $-V$ là mở và $0 \in -V$. Suy ra $-V \in \mathcal{N}(0)$. Vậy (4.47) chứng tỏ rằng $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} \varphi - \operatorname{dom} G^{-1})$, tức là điều kiện (4.44) nghiệm đúng.

**Khẳng định 2:** *Giả thiết chính quy (b) trong Định lý 4.1.2 cũng suy ra giả thiết chính quy* (4.44).

Thật vậy, giả sử rằng $\varphi$ liên tục tại điểm $y^0$ mà tồn tại $x^0 \in X$ với $(x^0, y^0) \in \operatorname{gph} G$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $V \in \mathcal{N}(0)$ sao cho

$$|\varphi(y^0 + v) - \varphi(y^0)| < \varepsilon, \quad \forall v \in V.$$

Suy ra $y^0 + V \subset \operatorname{dom} \varphi$. Vì $y^0 \in G(x^0)$ nên $x^0 \in G^{-1}(y^0)$. Vậy ta có

$$0 \in V = (y^0 + V) - y^0 \subset \operatorname{dom} \varphi - \operatorname{dom} G^{-1};$$

tức là (4.44) nghiệm đúng.

# Kết luận

Luận văn đã trình bày

- Một số kết quả chính trong bài báo [7] của các tác giả B. S. Mordukhovich, N. M. Nam và N. D. Yen.

- Các kết quả mới về tính ổn định vi phân của bài toán quy hoạch lồi trong không gian vô hạn chiều, có ràng buộc bao hàm thức được cho bởi ánh xạ đa trị.

Toàn bộ Chương 4 là kết quả nghiên cứu mới của luận văn. Các kết quả của chương này sẽ được gửi công bố trong bài báo [2].

Khi được áp dụng cho các bài toán điều khiển tối ưu có tham số, với hàm mục tiêu lồi và hệ động lực tuyến tính, cả các hệ rời rạc lẫn các hệ liên tục, các kết quả trong chương cuối của luận văn có thể đưa đến những quy tắc tính toán chính xác dưới vi phân và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu thông qua các dữ liệu của bài toán đã cho.

# Tài liệu tham khảo


**Tiếng Việt**

[1] Nguyễn Đông Yên, *Giáo trình Giải tích đa trị*, NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội, 2007.

**Tiếng Anh**

[2] D. T. V. An and N. D. Yen, *Differential stability of convex optimization problems under inclusion constraints* (in preparation), 2013.

[3] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria. An Introduction to Nonlinear Analysis*, Second Edition, Springer, New York, 1998.

[4] D. Bartl, *A short algebraic proof of the Farkas lemma,* SIAM J. Optim., Vol. 19 (2008), No. 1, 234–239.

[5] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[6] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications* Springer, Berlin, 2006.

[7] B. S. Mordukhovich, N. M. Nam and N. D. Yen, *Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming,* Math. Program., Ser. B, Vol. 116 (2009), No.1-2, 369–396.

[8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* Third Edition, McGraw-Hill, 1987.