VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐẶNG XUÂN SƠN

NGUYÊN LÝ ÁNH XẠ CO VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM GẦN KỀ CHO BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐA TRỊ ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

HÀ NỘI - NĂM 2010

Mục lục

Mục lục **i**

Lời cảm ơn **iii**

Mở đầu **1**

1 Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị **3**

1.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản 3

1.1.1 Tập lồi và hàm lồi 3

1.1.2 Dưới vi phân 4

1.2 Ánh xạ đa trị 6

1.3 Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị 11

1.3.1 Bất đẳng thức biến phân đa trị và các bài toán liên quan 11

1.3.2 Sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị. 15

2 Phương pháp lặp giải bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh **17**

2.1 Tính co của ánh xạ nghiệm 18

2.2 Mô tả thuật toán và sự hội tụ 24

3 Kết hợp nguyên lý ánh xạ co và thuật toán điểm gần kề giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu **28**

3.1 Thuật toán điểm gần kề 28

3.1.1 Sơ bộ về phương pháp điểm gần kề 28

3.1.2 Áp dụng thuật toán điểm gần kề giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị 31
3.2 Kết hợp nguyên lý ánh xạ co và thuật toán điểm gần kề . . 32
3.2.1 Sơ bộ về phương pháp 32
3.2.2 Mô tả thuật toán 34

Kết luận chung **39**

Tài liệu tham khảo **40**

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm Luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 16 (2008 - 2010) đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, các bạn đồng nghiệp trường THPT Chuyên Trần Phú đã tạo điều kiện tốt nhất để tôi hoàn thành Luận văn này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để Luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hà Nội, tháng 7 năm 2011.

Người viết Luận văn

Đặng Xuân Sơn

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân được nảy sinh trong quá trình nghiên cứu và giải các bài toán thực tế như các bài toán cân bằng trong kinh tế, tài chính, phương trình vật lý toán, giao thông đô thị, lí thuyết trò chơi, bài toán cân bằng mạng và nhiều bài toán khác. Bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu bởi Hartman và Stampacchia vào năm 1966. Những nghiên cứu đầu tiên về bài toán này liên quan tới việc giải các bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian vô hạn chiều và các ứng dụng của nó được giới thiệu trong cuốn sách *"An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications"* của Kinderlehrer D. và Stampacchia G., xuất bản năm 1980 và trong cuốn sách *"Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems"* của Baiocci C. và Capelo A., xuất bản năm 1984.

Từ đó, bài toán bất đẳng thức biến phân đã có những bước phát triển rất mạnh và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Một trong các hướng nghiên cứu quan trọng của bài toán bất đẳng thức biến phân là việc xây dựng các phương pháp giải. Có rất nhiều phương pháp giải, trong đó có phương pháp dựa vào cách tiếp cận điểm bất động. Ý tưởng chính của phương pháp này là chuyển việc giải bất đẳng thức biến phân về bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ thích hợp. Một trong những cách tiếp cận điểm bất động là dựa trên phương pháp lặp của nguyên lý ánh xạ co. Thuật toán thuộc loại này khá hiệu quả với việc giải bài toán cỡ lớn và trong nhiều trường hợp cho phép đánh giá được tốc độ hội tụ. Cách tiếp cận điểm bất động không chỉ làm việc với không gian hữu hạn chiều mà

còn được sử dụng trong không gian Hilbert.

Luận văn này trình bày sự kết hợp giữa nguyên lý ánh xạ co và phương pháp điểm gần kề để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu.

Luận văn bao gồm 3 chương: Chương 1 nhắc lại các kiến thức cơ bản của ánh xạ đa trị, ánh xạ đa trị nửa liên tục, ánh xạ đa trị đơn điệu, khoảng cách Hausdorff, phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị, các bài toán liên quan và một số ví dụ thực tế, đồng thời trình bày điều kiện có nghiệm của bài toán này. Chương 2 gồm hai phần chính. Phần thứ nhất định nghĩa ánh xạ nghiệm và tính co của nó. Phần thứ hai trình bày nguyên lý ánh xạ co để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu mạnh, nêu thuật toán và chứng minh sự hội tụ của thuật toán. Chương 3 là sự kết hợp nguyên lý ánh xạ co và phương pháp điểm gần kề để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị

1.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Trong Luận văn này, chúng ta làm việc trên không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$, với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn tương ứng được kí hiệu là $||.||$. Dưới đây, ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân, $\cdots$ Các kiến thức trong chương này được lấy chủ yếu từ các tài liệu [1],[2],[3],[4].

1.1.1 Tập lồi và hàm lồi

Định nghĩa 1.1. *Một tập $C \subseteq \mathcal{H}$ được gọi là tập lồi nếu*

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Định nghĩa 1.2. *Một tập $C \subseteq \mathcal{H}$ được gọi là nón nếu*

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

• Một nón được gọi là *nón lồi* nếu nó là nón và là một tập lồi.

• Tập $C \subseteq \mathcal{H}$ dưới đây luôn được giả thiết là một tập lồi (nếu không giải thích gì thêm).

Định nghĩa 1.3. *Cho $x \in C$, nón pháp tuyến ngoài của C tại x, kí hiệu là $N_C(x)$, được xác định bởi công thức*

$$N_C(x) := \{w \in \mathcal{H} | \quad \langle w, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C\}.$$

Định nghĩa 1.4. *Cho ánh xạ $f : \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{R}}$. Khi đó, miền hữu hiệu của f, kí hiệu là $domf$, được xác định bởi*

$$domf := \{x \in \mathcal{H} | \quad f(x) < +\infty\}.$$

Hàm f được gọi là chính thường nếu:

$$domf \neq \emptyset \quad \text{và} \quad f(x) > -\infty, \quad \forall x \in domf.$$

Định nghĩa 1.5. *Cho hàm $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó, hàm f được gọi là:*
(i) lồi nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in domf, \lambda \in [0,1];$$

(ii) lồi mạnh với hệ số $\beta > 0$ nếu với mọi $x, y \in domf, \lambda \in (0,1)$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\beta||x-y||^2.$$

Định lí 1.1. *Giả sử f là hàm số khả vi. Khi đó, f là hàm lồi khi và chỉ khi*

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x\rangle, \text{với mọi } x, y \in domf.$$

1.1.2 Dưới vi phân

Giả sử $f : \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{R}}$ là hàm lồi. Dưới vi phân của hàm f được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.6. *(xem[1]) Véc tơ $w \in \mathcal{H}$ được gọi là dưới đạo hàm của f tại $x^0 \in \mathcal{H}$ nếu*

$$\langle w, x - x^0\rangle \leq f(x) - f(x^0), \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

• Tập hợp tất cả các dưới đạo hàm của hàm f tại x^0 được gọi là *dưới vi phân* của f tại x^0, kí hiệu $\partial f(x^0)$, tức là

$$\partial f(x^0) := \{w \in \mathcal{H} : \ \langle w, x - x^0\rangle \leq f(x) - f(x^0), \quad \forall x \in \mathcal{H}\}.$$

• Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* tại x^0 nếu $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

Ví dụ 1.1. Cho C là một tập lồi, khác rỗng của không gian $\mathcal{H}$. Xét *hàm chỉ* trên tập C có dạng

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\partial\delta_C(x^0) = N_C(x^0), \forall x^0 \in C.$$

Thật vậy, nếu $x^0 \in C$ thì $\delta_C(x^0) = 0$ và

$$\partial\delta_C(x^0) = \{w \in \mathcal{H} : \ \delta_C(x) \geq \langle w, x - x^0\rangle, \forall x \in C\}.$$

Hay $\partial\delta_C(x^0) = \{w \in \mathcal{H} : \ 0 \geq \langle w, x - x^0\rangle, \forall x \in C\} = N_C(x^0)$. □

Ví dụ 1.2. *(Hàm lồi thuần nhất dương)*

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm lồi thuần nhất dương, tức là hàm lồi $f : R^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó,

$$\partial f(x^0) = \{w \in \mathbb{R}^n | \langle w, x^0\rangle = f(x^0), \langle w, x\rangle \leq f(x), \forall x \in C\}.$$

Chứng minh. Nếu $w \in \partial f(x^0)$ thì

$$\langle w, x - x^0\rangle \leq f(x) - f(x^0), \forall x \in C. \tag{1.1}$$

Thay $x = 2x^0$ vào (1.1), ta có

$$\langle w, x^0\rangle \leq f(2x^0) - f(x^0) = f(x^0). \tag{1.2}$$

Còn nếu thay $x = 0$ vào (1.1), ta được

$$-\langle w, x^0\rangle \leq -f(x^0). \tag{1.3}$$

Kết hợp (1.2) và (1.3), suy ra

$$\langle w, x^0\rangle = f(x^0).$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned}\langle w, x - x^0\rangle &= \langle w, x\rangle - \langle w, x^0\rangle \\ &= \langle w, x\rangle - f(x^0).\end{aligned}$$

Do đó, $\quad \langle w, x\rangle \leq f(x), \forall x \in C.$

• Ngược lại, nếu $x^0 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn:

$$\langle w, x^0 \rangle = f(x^0) \quad \text{và} \quad \langle w, x \rangle \leq f(x), \forall x \in C$$

$$\begin{aligned} \text{thì} \quad \langle w, x - x^0 \rangle &= \langle w, x \rangle - \langle w, x^0 \rangle \\ &\leq f(x) - f(x^0), \forall x \in C. \end{aligned}$$

Vậy nên $w \in \partial f(x^0)$. □

• Nếu f là hàm lồi thuần nhất dương thỏa mãn:

$f(-x) = f(x) \geq 0, \quad \forall x \in C$, thì $\langle w, x \rangle \leq f(x) \quad \forall x \in C$, tương đương với

$$|\langle w, x \rangle| \leq f(x), \quad \forall x \in C.$$

Định lí 1.2. *(xem [5]) Cho $f_i, i = 1, \cdots, m$ là các hàm lồi, chính thường trên $\mathcal{H}$. Khi đó, với mọi $x \in \mathcal{H}$ thì*

$$\partial(\sum_{i=1}^{m} f_i(x)) \supseteq \sum_{i=1}^{m} \partial f_i(x).$$

• Nếu tồn tại một điểm $a \in \cap_{i=1}^{n} dom f_i$ mà tại điểm đó mọi hàm f_i (có thể trừ ra một hàm nào đó) là liên tục, thì bao hàm thức trên sẽ xảy ra dấu bằng với mọi $x \in \mathcal{H}$.

Định lí 1.3. *(xem [5]) Giả sử C là tập lồi, khác rỗng. Hàm $f : C \to \mathbb{R}$ là hàm lồi, khả dưới vi phân trên C. Khi đó, x^* là nghiệm của bài toán $min\{f(x)/x \in C\}$ khi và chỉ khi $0 \in \partial f(x^*) + N_C(x^*)$.*

1.2 Ánh xạ đa trị

Trong mục này, ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản của ánh xạ đa trị và đưa ra một số ví dụ minh họa.

Định nghĩa 1.7. *Cho X, Y là hai tập con bất kì của $\mathcal{H}$ và $F : X \to 2^Y$ là ánh xạ từ X vào tập hợp toàn bộ các tập con của Y. Khi đó, ta nói F là ánh xạ đa trị từ X vào Y, tức là, với mỗi $x \in X, F(x)$ là tập con của Y. ($F(x)$ có thể là tập rỗng).*

• Nếu với mọi $x \in X$, tập $F(x)$ chỉ có đúng một phần tử thì ta nói F là *ánh xạ đơn trị* từ X vào Y.

Ví dụ 1.3. Xét phương trình đa thức: $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$, trong đó: $a_i \in \mathbb{R}$. Qui tắc cho tương ứng mỗi điểm $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ với tập nghiệm của phương trình trên, kí hiệu là $F(a)$ cho ta một ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.8. *Đồ thị và miền hữu hiệu của ánh xạ $F : X \to Y$ được định nghĩa tương ứng bằng các công thức sau:*

$$gphF := \{(x, y) \in X \times Y| \quad y \in F(x)\},$$
$$domF := \{x \in X| \quad F(x) \neq \emptyset\}.$$

• Với F là ánh xạ đa trị trong Ví dụ 1.3, ta có gphF= $\{(a, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}/x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0\}$.

• Ánh xạ ngược $F^{-1} : Y \to X$ của ánh xạ đa trị $F : X \to Y$ được xác định bởi công thức $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in Y \cap F(x)\}$.

Định nghĩa 1.9. *Ánh xạ đa trị $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$, được gọi là:*
(i) Nửa liên tục trên tại $\bar{x} \in domF$ nếu với mọi tập mở V chứa $F(\bar{x})$, tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$F(x) \subseteq V, \quad \forall x \in U;$$

(ii) Nửa liên tục dưới tại $\bar{x} \in domF$ nếu với mọi tập mở V thỏa mãn $F(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$F(x) \cap V \neq \emptyset, \quad \forall x \in U \cap domF.$$

• Ánh xạ F được gọi là *nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới)* trên C nếu nó nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới) tại mọi điểm thuộc C.

• Ta nói F là *liên tục* tại $\bar{x} \in C$ nếu F đồng thời là nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$. Nếu F liên tục tại mọi điểm thuộc C, thì F được gọi là liên tục trên C.

Ví dụ 1.4. Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ thỏa mãn:

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } x < 0, \\ [-1, 1] & \text{nếu } x = 0, \\ \{1\} & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Khi đó, ánh xạ F là nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}$ nhưng không nửa liên tục dưới tại $\bar{x} = 0$.

Thật vậy, dễ thấy ánh xạ F nửa liên tục trên tại mọi điểm $x \neq 0$. Hơn nữa, F nửa liên tục trên tại $\bar{x} = 0$, vì với mọi tập mở $(a, b) \supset [-1, 1] = F(0)$, tồn tại lân cận của 0, chẳng hạn $(-1, 1)$, ta có

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } -1 < x < 0, \\ [-1, 1] & \text{nếu } x = 0, \\ \{1\} & \text{nếu } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Do đó, $F(x) \subseteq (a, b)$ với mọi $x \in (-1, 1)$.

Vậy F là ánh xạ nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 1.5. Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ thỏa mãn

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{nếu } x \neq 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó, F nửa liên tục dưới tại $\bar{x} = 0$.

Thật vậy, với mọi tập mở (a, b) thỏa mãn

$$(a, b) \cap F(0) = \{0\} \neq \emptyset,$$

tồn tại lân cận của 0, chẳng hạn $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ta có

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{nếu } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \backslash \{0\}, \\ \{0\} & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Do đó

$$F(x) \cap (a, b) \neq 0, \quad \forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Vậy F nửa liên tục dưới tại $\bar{x} = 0$. □

Định nghĩa 1.10. *Một ánh xạ $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ được gọi là đóng tại x, nếu với mọi dãy $x^k \to x$, mọi dãy $y^k \in F(x^k)$ và $y^k \to y$, thì $y \in F(x)$.*

- Ánh xạ F được gọi là đóng trên C nếu nó đóng tại mọi điểm thuộc C.
- Ánh xạ F được gọi là ánh xạ *giá trị lồi* nếu $F(x)$ là tập lồi với mọi $x \in \mathrm{dom}F$.

Mệnh đề dưới đây cho ta mối quan hệ giữa tính nửa liên tục trên và ánh xạ đóng.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ đa trị, U là tập con lồi của C.*
(i) Nếu F là nửa liên tục trên trên U, có giá trị đóng thì nó đóng trên U;
(ii) Nếu F đóng và với mỗi tập compact $X \subseteq U$, tập $F(X)$ là compact thì F là nửa liên tục trên trên U.

Ta biết rằng ánh xạ liên tục Lipschitz là một khái niệm có vai trò quan trọng trong giải tích toán học. Trong mục này, ta sẽ định nghĩa tính liên tục Lipschitz của một ánh xạ đa trị dựa trên khoảng cách Hausdorff như sau:

Định nghĩa 1.11. *(Khoảng cách Hausdorff)*

Giả sử A, B là hai tập con đóng và khác rỗng bất kì của $\mathcal{H}$. Khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A và B được xác định bởi

$$\rho(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\},$$

trong đó

$$d(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} ||a - b||,$$
$$d(B, A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} ||a - b||.$$

Định nghĩa 1.12. *(Ánh xạ đa trị liên tục Lipschitz)*

Cho $C \subseteq \mathcal{H}$. Ánh xạ đa trị $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$ được gọi là liên tục Lipschitz với hằng số $L > 0$ (viết tắt là L-Lipschitz) trên C, nếu

$$\rho(F(x), F(y)) \leq L||x - y||, \quad \forall x, y \in C.$$

- Nếu $L < 1$ thì ta nói F là *ánh xạ co* trên C.
- Nếu $L = 1$ thì ta nói F là *ánh xạ không giãn* trên C.

Ví dụ 1.6. Cho $C = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ và ánh xạ $F : C \to 2^{\mathbb{R}^2}$ thỏa mãn

$$F(x, 0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Khi đó, F là ánh xạ đa trị liên tục Lipschitz, với hằng số $L = \sqrt{5}$.

Thật vậy, với mọi $(x_1, 0), (x_2, 0) \in C \quad (x_1 < x_2)$ thì

$$\begin{aligned}
d(F(x_1,0), F(x_2,0)) &= \max_{(x_1,y_1)\in F(x_1,0)} \quad \min_{(x_2,y_2)\in F(x_2,0)} ||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|| \\
&= \max_{(x_1,y_1)\in F(x_1,0)} \quad \min_{(x_2,y_2)\in F(x_2,0)} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \max_{(x_1,y_1)\in F(x_1,0)} |x_1-x_2| \\
&= |x_1-x_2| \\
&= ||(x_1,0)-(x_2,0)||.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(F(x_2,0), F(x_1,0)) &= \max_{(x_2,y_2)\in F(x_2,0)} \quad \min_{(x_1,y_1)\in F(x_1,0)} ||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|| \\
&= \max_{(x_2,y_2)\in F(x_2,0)} \quad \min_{(x_1,y_1)\in F(x_1,0)} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&\leq \max_{(x_2,y_2)\in F(x_2,0)} \quad \min_{(x_1,y_1)\in F(x_1,0)} |x_1-x_2|\sqrt{1+(x_1+x_2)^2} \\
&\leq \max_{(x_2,y_1)\in F(x_1,0)} \sqrt{5}|x_1-x_2| \\
&= \sqrt{5}|x_1-x_2| \\
&= \sqrt{5}||(x_1,0)-(x_2,0)||.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\rho(F(x_1,0), F(x_2,0)) \leq \sqrt{5}||(x_1,0)-(x_2,0)||, \forall (x_1,0),(x_2,0) \in C$$

hay F là ánh xạ đa trị liên tục Lipschitz, với hằng số $L = \sqrt{5}$. □

Định nghĩa 1.13. *Với $C \subseteq \mathcal{H}$, ánh xạ đa trị $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$, được gọi là:*
(i) đơn điệu mạnh trên C với hằng số $\beta > 0$, nếu

$$\langle w - w^{'}, x - x^{'} \rangle \geq \beta ||x - x^{'}||^2, \quad \forall x, x^{'} \in C, w \in F(x), w^{'} \in F(x^{'});$$

(ii) đơn điệu ngặt trên C, nếu

$$\langle w - w^{'}, x - x^{'} \rangle > 0, \quad \forall x, x^{'} \in C, w \in F(x), w^{'} \in F(x^{'}), x \neq x^{'};$$

(iii) đơn điệu trên C, nếu

$$\langle w - w^{'}, x - x^{'} \rangle \geq 0, \quad \forall x, x^{'} \in C, w \in F(x), w^{'} \in F(x^{'});$$

(iv) giả đơn điệu trên C, nếu với mọi $x, x^{'} \in C, w \in F(x), w^{'} \in F(x^{'})$, ta có

$$\langle w^{'}, x - x^{'} \rangle \geq 0 \quad \textit{kéo theo} \quad \langle w, x - x^{'} \rangle \geq 0.$$

Ví dụ 1.7. *(Tính đơn điệu của dưới vi phân của hàm lồi)*

Với mọi hàm lồi, chính thường $f : \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{R}}$ thì ánh xạ đa trị $\partial f : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là đơn điệu trên $dom(\partial f)$.

Chứng minh. Giả sử f là hàm lồi, với mọi $x, x^{'} \in dom(\partial f), w \in \partial f(x)$ và $w^{'} \in \partial f(x^{'})$, ta có:

$$\langle w^{'}, x - x^{'} \rangle \leq f(x) - f(x^{'});$$
$$\langle w, x^{'} - x \rangle \leq f(x^{'}) - f(x)$$

với các giá trị $f(x)$ và $f(x^{'})$ hữu hạn. Cộng hai bất đẳng thức trên ta được

$$\langle w^{'}, x - x^{'} \rangle + \langle w, x^{'} - x \rangle \leq 0$$

$$\text{hay} \quad \langle w - w^{'}, x - x^{'} \rangle \geq 0, \quad \forall x, x^{'} \in dom(\partial f), w \in \partial f(x), w^{'} \in \partial f(x^{'}).$$

Vậy ∂f đơn điệu. □

1.3 Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị

1.3.1 Bất đẳng thức biến phân đa trị và các bài toán liên quan

Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị được phát biểu như sau:

$$(MVI) \begin{cases} \text{Tìm} \quad x^* \in C \quad \text{và} \quad w^* \in F(x^*) \quad \text{sao cho} \\ \langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \end{cases}$$

• F được gọi là *ánh xạ giá* của bài toán bất đẳng thức biến phân (MVI).

• Khi F là ánh xạ đơn trị thì bài toán bất đẳng thức biến phân (viết tắt (VI)) có dạng:

$$\textit{Tìm} \quad x^* \in C \quad \textit{sao cho} \quad \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C.$$

• Bài toán bất đẳng thức biến phân (MVI) có liên hệ mật thiết với nhiều bài toán khác như: Bài toán bù phi tuyến, bài toán điểm bất động, bài toán quy hoạch lồi, $\cdots$

Bài toán điểm bất động Kakutani

Cho C là tập lồi, đóng tùy ý trong $\mathcal{H}$ và T là ánh xạ đa trị từ C vào 2^C. Bài toán *điểm bất động* của ánh xạ đa trị T được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm} \quad x^* \in C \quad \textit{sao cho} \quad x^* \in T(x^*). \tag{1.4}$$

Đặc biệt, nếu T là ánh xạ đơn trị thì bài toán điểm bất động Kakutani trở thành bài toán điểm bất động Brower có dạng:

$$\textit{Tìm} \quad x^* \in C \quad \textit{sao cho} \quad x^* = T(x^*).$$

Mệnh đề sau cho ta thấy mối liên hệ giữa bài toán (MVI) với bài toán điểm bất động (1.4).

Mệnh đề 1.2. *Giả sử ánh xạ F được xác định bởi*

$$F(x) := x - T(x), \quad \forall x \in C.$$

Khi đó, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVI) tương đương với bài toán điểm bất động (1.4).

Chứng minh . Giả sử x^* là nghiệm của bài toán (MVI) và $F(x) = x - T(x)$, tức là

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \quad w^* \in F(x^*).$$

Do $w^* \in F(x^*) = x^* - T(x^*)$ nên tồn tại $\xi^* \in T(x^*)$ sao cho $w^* = x^* - \xi^*$. Ta có

$$\langle x^* - \xi^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Cho $x = \xi^*$ ta được

$$||x^* - \xi^*|| \leq 0.$$

Suy ra $x^* = \xi^*$ hay $x^* \in T(x^*)$. Vậy nên x^* là nghiệm của bài toán (1.4).

Chiều ngược lại hiển nhiên đúng. □

Định lí 1.4. *(xem [5]). Cho $C \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi compact và $F : C \to 2^C$ là ánh xạ nửa liên tục trên, $F(x)$ khác rỗng, lồi, compact, với mọi $x \in C$. Khi đó, tồn tại $x^* \in C$ sao cho $x^* \in F(x^*)$.*

Bài toán bù phi tuyến

Chú ý rằng khi C là một nón lồi trong $\mathcal{H}$ thì bài toán (MVI) trở thành bài toán bù:

$$\text{Tìm } x^* \in C, w^* \in F(x^*), w^* \in C^{'} \text{ sao cho } \quad \langle w^*, x^* \rangle = 0, \qquad (CP)$$

trong đó

$$C^{'} := \{y \in \mathcal{H} \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C\}$$

là nón đối ngẫu của C.

Khi đó, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.3. *Nếu C là một nón lồi, đóng trong $\mathcal{H}$ thì bài toán bù (CP) tương đương với bài toán bất đẳng thức biến phân (MVI).*

Chứng minh. Nếu x^* là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (MVI) và $w^* \in F(x^*)$ thì

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{1.5}$$

Do C là nón lồi, $x^* \in C$ nên

$$x^* + x \in C, \quad \forall x \in C.$$

Trong bất đẳng thức trên, thay x bởi $x^* + x$ ta được

$$\langle w^*, x^* + x - x^* \rangle = \langle w^*, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Suy ra w^* thuộc nón đối nhẫu $C^{'}$.

Còn nếu thay $x = 0$ vào (1.5), ta được

$$\langle w^*, x^* \rangle \leq 0.$$

Suy ra $\langle w^*, x^* \rangle = 0$, hay $x^* \in C, w^* \in F(x^*), w^* \in C^{'}$ là nghiệm của bài toán bù (CP).

Ngược lại, nếu $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán bù thì

$$\langle w^*, x^* \rangle = 0, w^* \in F(x^*), \quad w^* \in C^{'}.$$

Vì $w^* \in C^{'}$ nên $\langle w^*, x \rangle \geq 0, \forall x \in C$. Ta có

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C,$$

hay $x^* \in C, w^* \in F(x^*)$ là nghiệm của bài toán (MVI). $\square$

Bài toán quy hoạch lồi

Cho C là tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi trên C. Bài toán quy hoạch lồi được phát biểu như sau:

Tìm $x^* \in C$ sao cho

$$f(x^*) = \min\{f(x) \mid x \in C\}. \tag{1.6}$$

Trong trường hợp f là hàm lồi, khả vi, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.4. *Giả sử $f : C \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi, lồi trên tập lồi $C \subset \mathcal{H}$. Khi đó, $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán* (1.6) *khi và chỉ khi x^* là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (VI), với $F(x) := \nabla f(x)$.*

Chứng minh. Giả sử x^* là nghiệm của bài toán (1.6), tức là:

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in C.$$

Nếu x^* không là nghiệm của bài toán (VI) thì tồn tại $x \in C$ sao cho:

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle < 0.$$

Khi đó, lấy $\alpha > 0$ đủ nhỏ, do C là tập lồi nên

$$y_\alpha = x^* + \alpha(x - x^*) = \alpha x + (1 - \alpha)x^* \in C$$

và

$$f(y_\alpha) = f(x^*) + \alpha\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \theta(\alpha) < f(x^*),$$

tức là x^* không là nghiệm của bài toán (1.6). Điều này trái với giả thiết. Vậy x^* là nghiệm của bài toán (VI).

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của bài toán (VI), tức là:

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Do f là hàm lồi, khả vi nên

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle, \quad \forall x \in C.$$

Suy ra

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in C,$$

hay x^* là nghiệm của bài toán (1.6). □

Trong trường hợp f là hàm không khả vi thì ta có cách tiếp cận dựa trên mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.5. *(xem [2], Định lý 3.5) Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Hàm $f : C \to \mathbb{R}$ là hàm lồi, khả dưới vi phân trên C. Khi đó, x^* là nghiệm của bài toán* (1.6) *khi và chỉ khi x^* là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (MVI), với $F(x) := \partial f(x)$.*

Chứng minh. Giả sử $x^* \in C$ và $w^* \in \partial f(x^*)$ thỏa mãn

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Vì $w^* \in \partial f(x^*)$ nên

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \leq f(x) - f(x^*), \quad \forall x \in C.$$

Từ đó suy ra

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in C.$$

hay x^* là nghiệm của bài toán (1.6).

Ngược lại hiển nhiên đúng (sử dụng Định lí 1.3). □

Dưới đây ta xét ví dụ thực tế của bài toán bất đẳng thức biến phân.

Ví dụ 1.8. Bài toán xác định phương án sản xuất.

Gọi C là tập các phương án sản xuất chấp nhận được và $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, được gọi là vectơ số lượng sản phẩm, với x_i là số sản phẩm thứ i.

• Đặt $F(x)$ là tập các chi phí sản xuất ứng với phương án x. Bài toán đặt ra là hãy tìm một phương án chấp nhận được sao cho ứng với phương án ấy có một chi phí là thấp nhất. Bài toán này có thể được mô tả dưới dạng bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho tồn tại } w^* \in F(x^*) : \langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0.$$

1.3.2 Sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị.

Sự tồn tại nghiệm của bài toán (MVI) phụ thuộc vào hàm giá F và miền ràng buộc C. Định lí sau đây khẳng định sự tồn tại nghiệm của bài toán (MVI).

Định lí 1.5. *(xem [6]) Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của không gian $\mathcal{H}$ và $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ nửa liên tục trên yếu, $F(x)$ là tập lồi, compact yếu với mỗi $x \in C$. Giả sử rằng một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*
(i) C là tập bị chặn,
(ii) Tồn tại một tập con U khác rỗng, đóng và bị chặn của C sao cho với mọi $x \in C \backslash U$, tồn tại $y \in U$ thỏa mãn

$$\langle w, x - y \rangle > 0, \quad \forall w \in F(x).$$

Khi đó, bài toán (MVI) có nghiệm.

Mệnh đề sau chỉ ra tính chất nghiệm của bài toán (MVI).

Mệnh đề 1.6. *(xem [6]) Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của không gian $\mathcal{H}$ và $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ đa trị. Khi đó:*
(i) Nếu F đơn điệu ngặt trên C thì bài toán (MVI) có nhiều nhất một nghiệm.
(ii) Nếu F là đơn điệu mạnh, nửa liên tục trên yếu và $F(x)$ lồi, compact yếu, khác rỗng với mọi $x \in C$ thì bài toán (MVI) có duy nhất nghiệm.

Kết luận chương

Trong chương 1, chúng ta đã nhắc lại các kết quả quan trọng của giải tích lồi, mối quan hệ giữa bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị với các mô hình toán học khác. Đồng thời, chương này cũng trình bày các khái niệm về ánh xạ đa trị nửa liên tục, đơn điệu mạnh, đơn điệu và các điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán (MVI).

Chương 2

Phương pháp lặp giải bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh

Phương pháp lặp theo nguyên lý ánh xạ co Banach là một phương pháp cơ bản, hiệu quả để tính điểm bất động của ánh xạ co. Nguyên lý này sau đó được mở rộng cho ánh xạ đa trị (xem[5], Định lý 14) bởi Nadler. Trong chương này, chúng ta sẽ sử dụng cách tiếp cận điểm bất động theo phương pháp lặp của nguyên lý ánh xạ co bằng cách xây dựng một ánh xạ nghiệm có tập điểm bất động trùng với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu mạnh. Cách tiếp cận này cho phép đánh giá được tốc độ hội tụ của thuật toán nhờ vào nguyên lý ánh xạ co. Các kiến thức được lấy trong các tài liệu [7], [8], [9], [10].

Bổ đề 2.1. *Giả sử $C \subseteq \mathcal{H}$ là một tập lồi, đóng, khác rỗng. Ánh xạ $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là L-Lipschitz trên C sao cho $F(x)$ là lồi, đóng, khác rỗng với mọi $x \in C$. Khi đó, với mọi $x, x' \in C$ và $w \in F(x)$, đều tồn tại $w' \in F(x')$ (chẳng hạn, có thể lấy $w' = P_{F(x')}(w)$), sao cho*

$$||w - w'|| \leqslant L||x - x'||,$$

trong đó, $P_{F(x')}(w)$ là hình chiếu vuông góc của w lên tập $F(x')$. Ngược lại, nếu F thỏa mãn điều kiện trên thì F là ánh xạ L-Lipschitz.

Chứng minh. Dùng định nghĩa của hình chiếu $w' = P_{F(x')}(w)$, ta có

$$||w - w'|| = \min_{v' \in F(x')} ||w - v'||. \tag{2.1}$$

Theo định nghĩa của khoảng cách Hausdorff, ta có

$$\begin{aligned} \rho\big(F(x), F(x')\big) &= \max\{d\big(F(x), F(x')\big), d\big(F(x'), F(x)\big)\} \\ &\geq d\big(F(x), F(x')\big) \\ &= \max_{v \in F(x)} \min_{v' \in F(x')} ||v - v'||. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Kết hợp (2.1), (2.2) với giả thiết F là L-Lipschitz trên C, ta nhận được

$$||w - w'|| \leqslant L||x - x'||.$$

Ngược lại, nếu với mọi $x, x' \in C, w \in F(x)$, đều tồn tại $w' \in F(x')$ sao cho

$$||w - w'|| \leqslant L||x - x'||$$

thì

$$d(w, F(x')) \leqslant L||x - x'||, \ d(w', F(x)) \leqslant L||x - x'||, \quad \forall x, x' \in C.$$

Ta có

$$d(F(x), F(x')) \leqslant L||x - x'||, \quad \forall x, x' \in C.$$

Do đó,

$$\rho(F(x), F(x')) \leqslant L||x - x'||, \quad \forall x, x' \in C.$$

□

2.1 Tính co của ánh xạ nghiệm

Trong trường hợp ánh xạ F là đơn trị thì bài toán (MVI) được viết lại dưới dạng sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C,$$

(được viết là (VI)). Khi xét bài toán (VI), Auslender đã đưa ra hàm chắn (gap) bằng cách với mọi $x \in C$, đặt

$$g_1(x) = \max\{\langle F(x), x - y \rangle \mid y \in C\}.$$

• Ta dễ dàng nhận thấy rằng $g_1(x) \geq 0$ với mọi $x \in C$. Do đó, bài toán (VI) có thể được viết dưới dạng bài toán tối ưu

$$\min\{g_1(x) \mid x \in C\}. \tag{2.3}$$

• Tuy nhiên, một khó khăn của bài toán này là trong trường hợp tổng quát, hàm g_1 có thể không khả vi. Fukushima (xem [17]) đã giải quyết khó khăn này bằng cách đưa ra hàm chắn mới có dạng:

$$g_2(x) = \max\{-\frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x)\rangle - \langle F(x), y - x\rangle | y \in C\}, \tag{2.4}$$

trong đó, G là ma trận đối xứng, xác định dương.

• Cũng như hàm chắn g_1, ta có $g_2(x) \geq 0$ với mọi $x \in C$ và khi ấy bài toán (VI) có thể được đưa về dạng bài toán tối ưu

$$\min\{g_2(x) \mid x \in C\}. \tag{2.5}$$

• Hàm g_2 được xác định bởi công thức (2.4) là khả vi trên C khi F là hàm khả vi. Khi đó, có thể dùng phương pháp tối ưu trơn để giải bài toán (VI) thông qua việc giải bài toán (2.4). Dựa vào cách xây dựng hàm chắn ở trên, ta trở lại xét bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVI). Với mỗi $x \in C$ và $w \in F(x)$, đặt $y = h(x, w)$ là nghiệm duy nhất của bài toán quy hoạch

$$\min\{\frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x)\rangle + \langle w, y - x\rangle | y \in C\}, \tag{2.6}$$

trong đó, G là ma trận đối xứng, xác định dương. Do C lồi, đóng, khác rỗng và hàm mục tiêu của bài toán (2.6) là lồi mạnh, nửa liên tục dưới trên C, nên $h(x, w)$ được xác định duy nhất.

• Theo Mệnh đề 1.5, $h(x, w)$ là nghiệm của bài toán (2.6) khi và chỉ khi $h(x, w)$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\langle w + G(h(x, w) - x), y - h(x, w)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{2.7}$$

• Với mọi $x \in C$, ta định nghĩa ánh xạ:

$$H(x) := \{h(x, w) \mid w \in F(x)\}.$$

Nói chung, H là ánh xạ đa trị và dom$H \subseteq C$. Để tiện việc trình bày, ta sẽ gọi H là ánh xạ nghiệm của bài toán (MVI). Kết quả dưới đây khẳng định rằng x^* là nghiệm của (MVI) khi và chỉ khi x^* là điểm bất động của H.

Bổ đề 2.2. *x^* là nghiệm của (MVI) khi và chỉ khi $x^* \in H(x^*)$.*

Chứng minh. Giả sử x^* là nghiệm của (MVI). Tức là, tồn tại $w^* \in F(x^*)$ sao cho (x^*, w^*) thỏa mãn:

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{2.8}$$

Với mỗi (x^*, w^*) cho trước, do $h(x^*, w^*)$ là nghiệm duy nhất của bài toán (2.6), nên $h(x^*, w^*) \in C$. Thay thế x bởi $h(x^*, w^*)$ trong (2.8), ta nhận được:

$$\langle w^*, h(x^*, w^*) - x^* \rangle \geq 0. \tag{2.9}$$

Thay y bởi $x^* \in C$ trong bất đẳng thức (2.7), ta có

$$\langle w^* + G(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0. \tag{2.10}$$

Từ các bất đẳng thức (2.9) và (2.10) suy ra

$$\langle G(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0.$$

Do ma trận G là đối xứng, xác định dương, nên ta có $h(x^*, w^*) = x^*$. Từ đó, suy ra $x^* \in H(x^*)$. Xét chiều ngược lại, giả sử rằng $x^* \in H(x^*)$. Khi đó, tồn tại $w^* \in F(x^*)$ sao cho $x^* = h(x^*, w^*)$. Nhưng với mỗi $x \in C, w \in F(x)$, chúng ta luôn có

$$\langle w + G(h(x, w) - x), y - h(x, w) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{2.11}$$

Thay thế x, w bởi các điểm tương ứng $x^* = h(x^*, w^*), w^*$ trong bất đẳng thức (2.11) ta được

$$\langle w^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{2.12}$$

Điều này, có nghĩa rằng x^* là nghiệm của bài toán (MVI).

□

Trở lại bài toán (2.4) với C lồi, đóng, khác rỗng. Bài toán này, tương đương với bài toán sau:

$$g_2(x) = -\min\{\frac{1}{2}\langle y-x, G(y-x)\rangle + \langle F(x), y-x\rangle \mid y \in C\}. \tag{2.13}$$

Vì G là ma trận đối xứng, xác định dương nên (2.13) là một bài toán quy hoạch lồi mạnh và do đó nó có nghiệm duy nhất.

Hệ quả 2.1. *x^* là nghiệm của (VI) khi và chỉ khi $x^* = H(x^*)$.*

Để đơn giản, ta coi $G = \alpha I$, trong đó $\alpha > 0$ và I là ma trận đồng nhất. Khi đó, chúng ta sẽ đưa ra cách điều chỉnh tham số α phù hợp, sao cho ánh xạ nghiệm H có tính chất co trên C. Tham số α được gọi là tham số chính quy hóa. Định lý sau khẳng định tính chất co của ánh xạ nghiệm H trong trường hợp F là ánh xạ đơn điệu mạnh trên C.

Định lí 2.1. *Giả sử rằng $F(x)$ là lồi, đóng, khác rỗng với mọi $x \in C$, F là ánh xạ đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ và Lipschitz với hằng số $L > 0$ trên C. Khi đó, với $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, ánh xạ H là co trên C với hệ số $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$. Tức là, ta có*

$$\rho(H(x), H(x')) \leqslant \delta||x - x'||, \quad \forall x, x' \in C.$$

Chứng minh. Bài toán (2.6) có thể được viết dưới dạng

$$\min_y\{\frac{1}{2}\alpha||y-x||^2 + \langle w, y-x\rangle + \delta_C(y)\},$$

với δ_C là hàm chỉ của C. Đây là bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh, do đó, nó có nghiệm duy nhất và nghiệm này được kí hiệu là $h(x, w)$. Theo Mệnh đề 1.5, ta có

$$0 \in \alpha(h(x,w) - x) + w + N_C(h(x,w)).$$

Điều này có nghĩa là tồn tại $z \in N_C(h(x,w))$ sao cho

$$\alpha(h(x,w) - x) + w + z = 0.$$

Do vậy,

$$h(x,w) = x - \frac{1}{\alpha}w - \frac{1}{\alpha}z. \tag{2.14}$$

Tương tự, với $x' \in C, w' \in F(x')$, ta có

$$h(x', w') = x' - \frac{1}{\alpha}w' - \frac{1}{\alpha}z', \tag{2.15}$$

với $z' \in N_C(h(x', w'))$. Do ánh xạ N_C là đơn điệu, ta có

$$\langle z - z', h(x, w) - h(x', w')\rangle \geq 0. \tag{2.16}$$

Thay thế z của công thức (2.14) và z' của công thức (2.15) vào công thức (2.16), ta nhận được

$$\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') - (h(x, w) - h(x', w')), h(x, w) - h(x', w')\rangle \geq 0.$$

Điều này tương đương với

$$||h(x, w) - h(x', w')||^2 \leqslant \langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w'), h(x, w) - h(x', w')\rangle$$
$$\leq ||x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w')||||h(x, w) - h(x', w')||. \tag{2.17}$$

Như vậy là

$$\begin{aligned} ||h(x, w) - h(x', w')||^2 &\leqslant ||x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w')||^2 \\ &= ||x - x'||^2 - \frac{2}{\alpha}\langle x - x', w - w'\rangle + \frac{1}{\alpha^2}||w - w'||^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Do giả thiết ánh xạ F là L-Lipschitz trên C, $F(x')$ đóng với mọi $x' \in C$ và $w(x) \in F(x)$, nên theo Bổ đề 2.1, tồn tại $w(x') \in F(x')$ sao cho

$$||w(x) - w(x')|| \leqslant L||x - x'||.$$

Lại có, F là β - đơn điệu mạnh, sử dụng điều này cho 2.18, ta có

$$||x - x' - \frac{1}{\alpha}(w(x) - w(x'))||^2 \leqslant (1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2})||x - x'||^2. \tag{2.19}$$

Nếu chọn hệ số $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, thì $1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2} > 0$. Cuối cùng, từ (2.18) và (2.19) ta được

$$||h(x, w(x)) - h(x', w(x'))|| \leqslant \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}||x - x'||.$$

Đặt $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$, khi đó,

$$||h(x, w(x)) - h(x', w(x'))|| \leqslant \delta||x - x'||, \quad \forall x, x' \in C, w(x) \in F(x).$$

Do đó,

$$\rho(H(x), H(x')) \leqslant \delta||x - x'||, \quad \forall x, x' \in C.$$

Chú ý rằng nếu $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$ thì $\delta \in (0, 1)$. Như vậy, ánh xạ H là co trên C với hệ số δ. □

Dưới đây là ví dụ về một ánh xạ đa trị vừa đơn điệu mạnh vừa Lipschitz trên C.

Ví dụ 2.1. Ánh xạ G được định nghĩa như sau:

$$G(x, 0) := \{(x, y) \in C| \quad 0 \leq y \leq x\}$$
$$C := \{(x, 0)| \quad x \geq 0\}$$

là đơn điệu trên C, vì với mọi $(x, 0), (x^{'}, 0) \in C$ và với mọi $(x, y) \in G(x, 0)$, $(x^{'}, y^{'}) \in G(x^{'}, 0)$, ta có

$$\begin{aligned}
&\langle (x, y) - (x^{'}, y^{'}), (x, 0) - (x^{'}, 0)\rangle \\
&= \langle (x - x^{'}, y - y^{'}), (x - x^{'}, 0)\rangle \\
&= (x - x^{'})^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dễ thấy, G là ánh xạ Lipschitz với hệ số $L = \sqrt{2}$ trên C. Khi đó, ánh xạ $F := I + G$ (trong đó, I là ánh xạ đồng nhất) là ánh xạ đơn điệu mạnh với hệ số $\beta = 1$ và Lipschitz với hệ số $L = \sqrt{2} + 1$ trên C.

Như vậy, nếu F là đơn điệu mạnh và với cách tham số hóa chính quy α phù hợp thì ánh xạ nghiệm H là co trên C. Trong trường hợp này, theo nguyên lý ánh xạ co được mở rộng bởi Nadler, nghiệm của bài toán (MVI) có thể được xấp xỉ bởi quá trình lặp sau:

$$x^{k+1} \in H(x^k), k = 0, 1, ...,$$

với x^0 là điểm tùy ý của C.
Theo định nghĩa của ánh xạ H, điểm x^{k+1} chính là nghiệm duy nhất của bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh.

Nếu F là đơn trị thì ánh xạ nghiệm H cũng đơn trị và quá trình lặp được thực hiện như sau:

$$x^0 \in C, x^{k+1} := H(x^k), \quad \forall k = 0, 1, ...$$

2.2 Mô tả thuật toán và sự hội tụ

Khi thực hiện các thuật toán vô hạn, việc tìm ra nghiệm chính xác là khó thực hiện được. Vì thế, người ta tìm nghiệm với độ chính xác nào đó. Giả sử x^* là nghiệm chính xác của bài toán (MVI), khi đó $x \in C$ được gọi là ϵ- nghiệm của bài toán (MVI) nếu $||x - x^*|| \leqslant \epsilon$. Thuật toán lặp Banach cho ánh xạ F đơn điệu mạnh trên C được xác định bởi:

Thuật toán 2.1. *Bước đầu.* Chọn sai số $\epsilon \geq 0$.
Chọn tham số chính quy $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, khi F là β-đơn điệu mạnh, ở đây, L là hằng số Lipschitz của F.
Chọn $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh

$$P(x^k): \quad \min\{\frac{1}{2}\alpha||x - x^k||^2 + \langle w^k, x - x^k\rangle \mid x \in C\},$$

thu được nghiệm duy nhất x^{k+1}. Tìm $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$ sao cho

$$||w^{k+1} - w^k|| \leqslant L||x^{k+1} - x^k||,$$

chẳng hạn, có thể chọn $w^{k+1} := P_{F(x^{k+1})}(w^k)$ (hình chiếu của w^k trên $F(x^{k+1})$).
Xét hai trường hợp:

- *Trường hợp 1:* Nếu $||x^{k+1} - x^k|| \leqslant \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$, thuật toán dừng: x^k là một ϵ-nghiệm của bài toán (MVI).

- *Trường hợp 2:* Nếu $||x^{k+1} - x^k|| > \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$ thì ta thay thế $k := k + 1$ và quay về Bước lặp k.

Theo Định lý 2.1 và nguyên lý ánh xạ co, ta có mối quan hệ giữa nghiệm x^k và nghiệm chính xác x^* của bài toán (MVI) được cho bởi công thức sau:

$$||x^{k+1} - x^*|| \leqslant \frac{\delta^{k+1}}{1-\delta}||x^0 - x^1||, \ \forall k.$$

Ở đây, $0 < \delta < 1$ là hệ số co của ánh xạ nghiệm H, với

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}.$$

Định lí 2.2. *Dưới giả thiết của Định lý 2.1, dãy $\{x^k\}$ được xác định bởi thuật toán 2.1 thỏa mãn*

$$||x^{k+1} - x^*|| \leqslant \frac{\delta^{k+1}}{1-\delta}||x^0 - x^1||, \quad \forall k. \tag{2.20}$$

Ở đây, x^* là nghiệm chính xác của (MVI). Nếu ta thêm giả thiết ánh xạ F là đóng trên C, thì dãy $\{w^k\}$ hội tụ tới $w^* \in F(x^*)$ với tốc độ hội tụ được đánh giá như sau:

$$||w^k - w^*|| \leqslant \frac{L\delta^k}{1-\delta}||x^0 - x^1||, \quad \forall k.$$

Chứng minh. Trước hết, ta giả sử các giả thiết của Định lý 2.1 được thỏa mãn. Theo Bổ đề 2.1, ta có

$$x^* \in H(x^*) := \{h(x^*, w) \mid w \in F(x^*)\}.$$

Lấy $w^* \in F(x^*)$ sao cho $x^* = h(x^*, w^*) \in H(x^*)$. Theo cách xây dựng w^{k+1} của Thuật toán 2.1, ta được

$$||w^{k+1} - w^k|| \leqslant L||x^{k+1} - x^k||, \quad \forall k = 0, 1, ...$$

Khi đó, theo Định lý 2.1, ta nhận được

$$||h(x^{k+1}, w^{k+1}) - h(x^k, w^k)|| \leqslant \delta||x^{k+1} - x^k||, \quad \forall k = 0, 1, ...$$

Từ $h(x^{k+1}, w^{k+1}) = x^{k+2}$ suy ra

$$||x^{k+2} - x^{k+1}|| \leqslant \delta||x^{k+1} - x^k||, \quad \forall k = 0, 1, ...$$

Theo nguyên lý ánh xạ co Banach, ta có

$$||x^k - x^*|| \leqslant \frac{\delta^{k+1}}{1-\delta}||x^0 - x^1|| \quad \forall k = 0, 1, ...$$

Như vậy, $x^k \to x^*$ khi $k \to +\infty$. Hơn nữa, sử dụng tính chất co của ánh xạ nghiệm H, ta nhận được

$$||x^{p+k} - x^k|| \leqslant \frac{\delta^k(1-\delta^p)}{1-\delta}||x^{k+1} - x^k||, \quad \forall k, p.$$

Cho $p \to +\infty$, ta được

$$||x^k - x^*|| \leqslant \frac{\delta^k}{1-\delta}||x^{k+1} - x^k||, \quad \forall k = 0, 1, ...$$

Nếu Trường hợp 1 của Thuật toán 2.1 xảy ra thì

$$||x^{k+1} - x^k|| \leqslant \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$$

và do đó, $||x^k - x^*|| \leqslant \epsilon$. Điều đó có nghĩa là x^k là một ϵ-nghiệm của bài toán (MVI). Mặt khác, ta có

$$||w^{k+1} - w^k|| \leqslant L||x^{k+1} - x^k||,$$

suy ra

$$\begin{aligned}
||w^{k+p} - w^j|| &\leqslant ||w^{k+1} - w^k|| + ||w^{k+2} - w^{k+1}|| + ... + ||w^{k+p} - w^{k+p-1}|| \\
&\leqslant L\big(||x^{k+1} - x^k|| + ||x^{k+2} - x^{k+1}|| + ... + ||x^{k+p} - x^{k+p-1}||\big) \\
&\leqslant L\big(\delta^k + \delta^{k+1} + ... + \delta^{k+p-1}\big)||x^1 - x^0||.
\end{aligned}$$

Do vậy

$$||w^{k+p} - w^k|| \leqslant \frac{L\delta^k(\delta^p - 1)}{\delta - 1}||x^1 - x^0||. \tag{2.21}$$

Điều này chỉ ra rằng $\{w^k\}$ là dãy Cauchy trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Do đó, dãy $\{w^k\}$ hội tụ tới $w^* \in C$. Do F là ánh xạ đóng trên C nên $w^* \in F(x^*)$. Trong công thức (2.21), ta cho $p \to +\infty$ và nhận được

$$||w^k - w^*|| \leqslant \frac{L\delta^k}{1-\delta}||x^1 - x^0|| \quad \forall j.$$

□

Chú ý 2.1. Ta thấy rằng hệ số co δ là hàm số theo tham số chính quy α. Dễ thấy rằng δ nhỏ nhất khi chọn tham số $\alpha = \frac{L^2}{\beta}$. Do vậy, Thuật toán 2.1 hội tụ tốt nhất khi chọn tham số $\alpha = \frac{L^2}{\beta}$.

Chú ý 2.2. Trong Thuật toán 2.1, tại Bước lặp k, thuật toán này đòi hỏi phải tìm $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$ sao cho

$$||w^{k+1} - w^k|| \leqslant L||x^{k+1} - x^k||.$$

Chú ý 2.3. Áp dụng Thuật toán 2.1 cho bài toán (VI), khi đó, bài toán phụ của thuật toán là tìm hình chiếu của một điểm trên C. Cụ thể ta có

Bước đầu. Chọn sai số $\epsilon \geq 0$.

Chọn tham số chính quy $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, khi F là β-đơn điệu mạnh, L là hằng số Lipschitz của ánh xạ đơn trị F.

Chọn $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$.

Bước lặp $k(k = 0, 1, 2, ...)$

Giải bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh

$$P(x^k): \quad \min\{\frac{1}{2}\alpha||x - x^k||^2 + \langle F(x^k), x - x^k\rangle \mid x \in C\},$$

thu được nghiệm duy nhất x^{k+1}.

Xét hai trường hợp:

-*Trường hợp 1*: Nếu $||x^{k+1} - x^k|| \leqslant \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$ thì thuật toán dừng: x^k là một ϵ- nghiệm của bài toán (VI).

-*Trường hợp 2*: Nếu $||x^{k+1} - x^k|| > \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$ thì ta thay thế $k := k + 1$ và quay về Bước lặp k.

Kết luận chương

Trong chương 2, chúng ta xây dựng được một ánh xạ nghiệm có tính chất co nhằm đưa bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu mạnh về việc tìm điểm bất động của ánh xạ nghiệm ấy. Đồng thời, chương này cũng trình bày thuật toán để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị với ánh xạ giá là đơn điệu mạnh và còn đánh giá được tốc độ hội tụ của thuật toán.

Chương 3

Kết hợp nguyên lý ánh xạ co và thuật toán điểm gần kề giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu

3.1 Thuật toán điểm gần kề

3.1.1 Sơ bộ về phương pháp điểm gần kề

Trong tài liệu [15], [16], Rockafellar R.T. đã phát triển thuật toán điểm gần kề cho bài toán tìm không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại T trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Để tiện theo dõi, ta nhắc lại một số kết quả của ánh xạ đơn điệu cực đại và thuật toán điểm gần kề.
Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực và ánh xạ đa trị $T : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$. Khi đó,
• T được gọi là ánh xạ *đơn điệu* nếu

$$\langle w - w', x - x' \rangle \geq 0, \quad \forall x, x' \in \mathcal{H}, w \in T(x), w' \in T(x').$$

• T được gọi là ánh xạ *đơn điệu cực đại* nếu T là ánh xạ đơn điệu và không tồn tại ánh xạ đơn điệu $T' : H \to 2^H$ sao cho graph$T \subsetneqq$ graphT'.

Theo Minty, ta có ví dụ minh họa về ánh xạ đa trị đơn điệu cực đại.

Mệnh đề 3.1. *(xem [10]) Nếu $f : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ là hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới, thì ánh xạ dưới vi phân $T := \partial f$ là đơn điệu cực đại.*

Ví dụ 3.1. Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}$. Hàm chỉ

$\delta(.,C)$ của C là hàm lồi có dạng

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Theo mệnh đề 3.1, hàm $\delta(.,C)$ là một hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới, ta có ánh xạ dưới vi phân $\partial\delta(.,C)$ là ánh xạ đơn điệu cực đại. Trong đó, $\partial\delta(.,C)$ là nón pháp tuyến ngoài trên C và được kí hiệu bởi N_C :

$$N_C(x) := \begin{cases} \{w \in \mathcal{H} \mid \langle w, z-x\rangle \leq 0 \ \ \forall z \in C\} & \text{nếu } x \in C, \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Trong trường hợp đơn trị, ví dụ minh họa cho ánh xạ đơn điệu cực đại được phát biểu bởi mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2. *(xem[10]) Giả sử $T : H \to H$ là ánh xạ đơn điệu, đơn trị và liên tục. Khi đó, T là ánh xạ đơn điệu cực đại.*

Cho T là ánh xạ đơn điệu cực đại, với mỗi $c_k > 0$ ta đặt

$$P_k := (I + c_k T)^{-1}, \tag{3.1}$$

ở đây I là ánh xạ đồng nhất.

Mối quan hệ giữa ánh xạ đơn điệu cực đại T và ánh xạ ngược P_k được trình bày trong định lí dưới đây:

Định lí 3.1. *(xem[10]) Cho ánh xạ đa trị $T : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$. Khi đó, T là ánh xạ đơn điệu cực đại khi và chỉ khi P_k là ánh xạ đơn trị, không giãn và $domP_k = H$.*

Từ định lý 3.1, ta nhận thấy mặc dù T là ánh xạ đa trị đơn điệu cực đại nhưng ánh xạ P_k là ánh xạ đơn trị và không giãn trên H. Bây giờ, ta giả sử các giả thiết của định lí 3.3 thoả mãn và P_k được xác định bởi công thức (3.1). Khi đó, x là điểm bất động của ánh xạ đơn trị P_k, hay

$$\begin{aligned} x &= P_k(x) \\ &= (I + c_k T)^{-1}(x) \end{aligned}$$

khi và chỉ khi

$$x \in (I + c_k T)(x) = x + c_k T(x),$$

hay $0 \in c_k T(x)$. Do đó, x là không điểm của ánh xạ T. Vậy x là không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại T khi và chỉ khi x là điểm bất động của ánh xạ P_k. Như vậy, thay vì tìm không điểm của ánh xạ đa trị T ta đi tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn P_k, với $c_k > 0$.

Giả sử T là ánh xạ đơn điệu cực đại . Khi đó, thuật toán điểm gần kề cho bài toán (MVI) có thể được trình bày đơn giản như sau:

Thuật toán 3.1. *Bước 0. Chọn một dãy số dương $\{c_k\}$ thoả mãn $c_k > c > 0$ với mọi $k = 0, 1, ...$, tìm $u^0 \in C$.*

Bước k $(k = 0, 1, ...)$. Xây dựng điểm u^{k+1} thông qua công thức

$$u^{k+1} := P_k(u^k) = (I + c_k T)^{-1}(u^k).$$

Trong trường hợp đặc biệt của thuật toán, $c_k = c > 0$, $\forall k = 0, 1, ...$ và ánh xạ đơn điệu cực đại T với C là một tập bị chặn, Martinet đã chỉ ra rằng dãy điểm $\{u^k\}$ hội tụ yếu tới điểm u^* sao cho $0 \in T(u^*)$.

Xét thuật toán trong trường hợp $c_k > c > 0$ và C là tập lồi, đóng và khác rỗng, Rockafellar chỉ ra rằng dãy điểm u^k hội tụ yếu tới u^* sao cho $0 \in T(u^*)$.

Trong trường hợp tổng quát, một điều rất khó thực hiện được ở thuật toán 3.1 là việc tính toán chính xác điểm $u^{k+1} = P_k(u^k)$. Thuật toán dưới đây sẽ thay thế cách tính chính xác điểm u^{k+1} bằng cách tính xấp xỉ với một sai số ϵ_k mà thuật toán vẫn đảm bảo được sự hội tụ.

Thuật toán 3.2. *Bước 0. Chọn một dãy số dương $\{c_k\}$: $c_k > c > 0$ và $\epsilon_k > 0$ với mọi $k = 0, 1, ...$ sao cho $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty$, lấy $w^0 \in C$.*

Bước k $(k = 0, 1, ...)$. Chọn điểm w^{k+1} thoả mãn

$$||w^{k+1} - x^{k+1}|| \leq \epsilon_{k+1},$$

với $x^{k+1} := P_k(w^k) = (I + c_k T)^{-1}(w^k)$.

Nhận xét 3.1. Nếu ta thay thế điều kiện $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < +\infty$ chỉ bởi điều kiện $\epsilon_k \to 0$ thì thuật toán có thể không hội tụ. Chẳng hạn lấy hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, với

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < 0, \\ 0 & \text{nếu } x \geq 0, \end{cases}$$

và dãy $\{\epsilon_k := \frac{2}{k}\}$ với mọi $k = 1, 2, ...$ có tổng $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = +\infty$ và $\epsilon_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Ta có ánh xạ dưới vi phân của f xác định bởi

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0, \\ [-1, 0] & \text{nếu } x = 0, \\ 0 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Khi đó, $P_k(z) = z$ hay $0 \in T(z)$ khi và chỉ khi $z \geq 0$. Ta chọn một dãy $\{z^k\}$ sao cho

$$P_k(z^k) = z^k, \ ||z^{k+1} - z^k|| = \frac{1}{2}\epsilon_k = \frac{1}{k}, \quad \forall k = 1, 2, ..., \text{ và } z^{k+1} > z^k.$$

Ta có thể tính toán được rằng

$$z^n = z^1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Như vậy, dãy $\{z^k\}$ không hội tụ.

Sự hội tụ của thuật toán điểm gần kề được phát biểu qua định lí sau:

Định lí 3.2. *(xem [16]) Cho $T : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ đơn điệu cực đại. Khi đó, nếu T có không điểm thì dãy điểm $\{w^k\}$ hội tụ yếu tới w^* sao cho $0 \in T(w^*)$. Nếu T không có không điểm thì dãy $\{w^k\}$ không bị chặn.*

3.1.2 Áp dụng thuật toán điểm gần kề giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị

Như ta đã biết, bài toán tìm không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại T là một bài toán khá tổng quát, nó bao hàm bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVI) như một trường hợp đặc biệt. Do vậy, khi áp dụng thuật toán điểm gần kề cho bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu (MVI), ta sẽ sử dụng ánh xạ đơn điệu cực đại được chỉ ra bởi kết quả sau:

Định lí 3.3. *(xem[16]) Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và $F : C \to 2^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ đơn điệu, nửa liên tục trên yếu trên C và $F(x)$ là tập lồi, compact yếu với mỗi $x \in C$. Khi đó,*

$$T(x) := \begin{cases} F(x) + N_C(x) & \text{nếu } x \in C, \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin C \end{cases}$$

là ánh xạ đơn điệu cực đại.

Xét ánh xạ T được xác định bởi định lí 3.3. Khi đó, $0 \in T(x)$ khi và chỉ khi tồn tại $w \in F(x)$ sao cho $-w \in N_C(x)$. Theo định nghĩa của nón pháp tuyến ngoài trên C, ta có

$$\langle -w, z - x \rangle \leq 0, \quad \forall z \in C.$$

Như vậy,

$$\langle w, z - x \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C.$$

Điều này chỉ ra rằng x là không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại T khi và chỉ khi x là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (MVI). Như vậy, ta có thể thay thế việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu (MVI) bằng việc tìm không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại T. Kết hợp điều này với tính chất của ánh xạ không giãn P_k, ta có thuật toán điểm gần kề để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu (MVI) thông qua việc tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn P_k.

3.2 Kết hợp nguyên lý ánh xạ co và thuật toán điểm gần kề

Các kết quả sau được lấy trong tài liệu [10].

3.2.1 Sơ bộ về phương pháp

Từ Thuật toán 3.1, ta có thể viết

$$u^{k+1} = (I + c_k T)^{-1}(u^k)$$

dưới dạng

$$u^k \in (I + c_k T)(u^{k+1}).$$

Thay thế $T(u^{k+1})$ bởi $F(u^{k+1}) + N_C(u^{k+1})$, ta được

$$[u^k - u^{k+1} - c_k F(u^{k+1})] \cap N_C(u^{k+1}) \neq \emptyset.$$

Điều này chứng tỏ rằng tồn tại $v^{k+1} \in F(u^{k+1})$ thỏa mãn

$$\langle u^{k+1} + c_k v^{k+1} - u^k, u - u^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall u \in C. \tag{3.2}$$

Đặt $F_k(u) := u + c_kF(u) - u^k$. Khi đó, (3.2) được viết dưới dạng sau:

$$\langle t^{k+1}, u - u^{k+1}\rangle \geq 0, \quad \forall u \in C, \qquad (MVI_k)$$

với $t^{k+1} \in F_k(u^{k+1})$. Do vậy, u^{k+1} là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (MVI$_k$) với ánh xạ giá F_k. Rõ ràng, nếu F là đơn điệu thì F_k là đơn điệu mạnh với hệ số $\beta = 1$, và nếu F là L-Lipschitz thì F_k là Lipschitz với hằng số $L_k = 1 + c_kL$.

Như vậy, mỗi điểm u^k trong thuật toán điểm gần kề là nghiệm của bài toán (MVI$_k$) với ánh xạ giá

$$F_k(u) := u + c_kF(u) - u^k.$$

Vậy ta có thể vận dụng Thuật toán 2.1 được miêu tả trong Chương 2 để giải bài toán (MVI$_k$). Với mỗi $u \in C$ và $v^k \in F_k(u)$, ta đặt

$$s_k(u, v^k) := \text{argmin}\{\langle v^k, y - u\rangle + \frac{1}{2}\alpha_k||y - u||^2 \mid y \in C\}, \qquad (3.3)$$

ở đây $\alpha_k > 0$. Chú ý rằng do C là tập lồi đóng và hàm mục tiêu là lồi mạnh, nên bài toán (3.3) có nghiệm duy nhất với mọi $u \in domF_k$. Để ý rằng:

$$\text{dom}F_k = \text{dom}F, \quad \forall k = 0, 1, ...$$

Giống như ở Chương 2, ta định nghĩa $H_k : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ như sau:

$$H_k(u) := \{s_k(u, v^k) \mid v^k \in F_k(u)\}.$$

Theo Bổ đề 2.2, nghiệm duy nhất của bài toán (MVI$_k$) là điểm bất động duy nhất của ánh xạ H_k. Điểm bất động này có thể tính được thông qua nguyên lý ánh xạ co Banach. Trên thực tế thì chỉ có thể giải bài toán (MVI$_k$) để tìm nghiệm xấp xỉ. Ta chọn sai số $\epsilon_k > 0$ cho nghiệm của (MVI$_k$) đơn điệu mạnh thỏa mãn $\epsilon_k \searrow 0$ khi $k \to \infty$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty$. Khi đó, thay vì tính chính xác nghiệm u^{k+1} của bài toán (MVI$_k$), ta tính xấp xỉ nghiệm $\bar{u}^{k,j+1}$ sao cho

$$||\bar{u}^{k,j+1} - u^{k+1}|| \leqslant \epsilon_k, \quad \forall k.$$

Chú ý 3.1. Theo Thuật toán 2.1 áp dụng cho bài toán (MVI$_k$), tham số hóa chính quy α_k phải thỏa mãn

$$\alpha_k > \frac{1}{2}L_k^2 = \frac{1}{2}(1 + c_kL)^2.$$

Để đảm bảo sự hội tụ cho thuật toán điểm gần kề, dãy $\{c_k\}$ thỏa mãn $c_k > c > 0$ với mọi k. Do c là số dương tùy ý nên ta có thể chọn $c_k > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$L_k = 1 + c_k L < \sqrt{2}.$$

Do đó, ta có thể lấy $\alpha_k \geq 1$ với mọi k.

Chú ý rằng, nếu $P_k(x^k) = x^k$, thì x^k là nghiệm chính xác của bài toán (MVI). Do đó, trong thuật toán được trình bày sau đây, ta gọi x^k là một ϵ- nghiệm của bài toán (MVI) nếu $||P_k(x^k) - x^k|| \leqslant \epsilon$.

3.2.2 Mô tả thuật toán

Trong phần này, chúng ta kết hợp phương pháp lặp Banach vào thuật toán điểm gần kề để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu. Cụ thể, ta sử dụng thuật toán của Chương 2 để giải xấp xỉ bài toán phụ (MVI_k) trong phương pháp điểm gần kề.

Cho một dãy số dương $\epsilon_k > 0$ sao cho

$$\epsilon_k \searrow 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < +\infty.$$

• Nếu tìm được hằng số Lipschitz L của F thì ta chọn một dãy số dương $c_k > c > 0$ sao cho

$$(1 + c_k L)/2 < 1 \ \text{ với mọi } \ k,$$

chẳng hạn có thể chọn

$$c_k = \frac{1}{L+1}.$$

• Nếu hằng số Lipschitz khó xác định thì chọn dãy số dương $\{c_k\}$ đủ nhỏ. Chọn sai số $\epsilon > 0$.

Đặt

$$\delta_k := \sqrt{1 - \frac{2\beta_k}{\alpha_k} + \frac{L_k^2}{\alpha_k^2}} \quad \text{với } \beta_k = 1, L_k = 1 + c_k L.$$

Thuật toán 3.3. *Lấy* $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$.

Bước lặp k, $k = 0, 1, ...$ (*vòng lặp ngoài*).

Bước 0. Lấy $\alpha_k \geq 1$. Đặt $u^{k,0} := x^k, \ j := 0$ và tìm $w^{k,0} \in F_k(u^{k,0})$.

Bước 1 (*vòng lặp trong*). Giải bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh

$$\min\{\frac{1}{2}\alpha_k\|u-u^{k,j}\|^2+\langle w^{k,j},u-u^{k,j}\rangle \mid u\in C\} \tag{3.4}$$

để có được nghiệm duy nhất $u^{k,j+1}$.

Trường hợp1a (*Điều kiện dừng của vòng lặp trong*).

Nếu

$$\frac{\delta_k^{j+1}}{1-\delta_k}||u^{k,1}-u^{k,0}|| \leqslant \epsilon_k,$$

thì đặt

$$x^{k+1} := u^{k,j+1}, \text{và tìm} \quad w^{k+1}\in F_k(x^{k+1}),$$

sao cho

$$||w^{k+1}-w^{k,j}|| \leqslant L_k||x^{k+1}-x^k||,$$

$\big($có thể lấy $w^{k+1}=P_{F(x^{k+1})}(w^{k,j})\big)$.

Nếu

$$\|x^{k+1}-x^k\|+\epsilon_k \leqslant \epsilon, \tag{3.5}$$

thì dừng: x^{k+1} là một ϵ-nghiệm của bài toán (MVI).

Nếu

$$\|x^{k+1}-x^k\|+\epsilon_k > \epsilon,$$

thì tăng k lên 1 và chuyển về Bước lặp k.

Trường hợp 1b.

Nếu

$$\frac{\delta_k^{j+1}}{1-\delta_k}||u^{k,1}-u^{k,0}|| > \epsilon_k,$$

thì lấy

$$w^{k,j+1}\in F_k(u^{k,j+1}),$$

sao cho

$$||w^{k,j+1}-w^{k,j}|| \leqslant L_k||u^{k,j+1}-u^{k,j}||.$$

Đặt $j := j + 1$ và trở lại Bước 1.

Chú ý 3.2. Bài toán chính trong thuật toán trên là bài toán (3.4). Đây là bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh. Ta có thể đưa bài toán này về dạng

$$\min\{||u - (u^{k,j} - \frac{1}{\alpha_k} w^{k,j})||^2 \mid u \in C\}.$$

Giải bài toán này, thực chất là đi tìm hình chiếu của điểm $u^{k,j} - \frac{1}{\alpha_k} w^{k,j}$ trên tập lồi, đóng C.

Chú ý 3.3. Giả sử vòng lặp trong của Thuật toán 3.3 dừng ở bước lặp j, ta có $x^{k+1} = u^{k,j+1}$. Khi đó,

$$x^{k+1} = P_C(u^{k,j} - \frac{1}{\alpha_k} w^{k,j}),$$

với $w^{k,j} \in F_k(u^{k,j})$. Từ $F_k(x) = x + c_k F(x) - x^k$ suy ra

$$x^{k+1} = P_C(\frac{1}{\alpha_k} x^k + (1 - \frac{1}{\alpha_k}) u^{k,j} - \frac{c_k}{\alpha_k} f^{k,j}), \tag{3.6}$$

ở đây $f^{k,j} \in F(u^{k,j})$. Khi $\alpha_k = 1$, ta có

$$x^{k+1} = P_C(x^k - c_k f^{k,j}). \tag{3.7}$$

Sự hội tụ của Thuật toán 3.3 được khẳng định bởi định lý sau:

Định lí 3.4. *(i). Nếu thuật toán dừng ở bước lặp k, thì x^{k+1} là một ϵ-nghiệm của bài toán (MVI).*
(ii). Nếu F là ánh xạ đơn điệu, nửa liên tục trên yếu, đóng yếu và $F(x)$ là một tập compact yếu với mỗi $x \in C$, thì dãy $\{x^k\}$ được xây dựng bởi Thuật toán 3.3 hội tụ yếu tới nghiệm x^* của bài toán (MVI) và bất kỳ điểm tụ yếu w^* của dãy $\{w^k\}$ đều thỏa mãn $w^* \in F(x^*)$.

Chứng minh. (i). Giả sử thuật toán dừng ở Bước lặp k, ta có

$$\frac{\delta_k^{j+1}}{1 - \delta_k} ||u^{k,1} - u^{k,0}|| \leqslant \epsilon_k.$$

Kết hợp điều này với Thuật toán lặp Banach 2.1, ta có x^{k+1} là một ϵ_k-nghiệm của bài toán (MVI$_k$). Mặt khác, theo thuật toán điểm gần kề, nếu x^{k+1} là một ϵ_k-nghiệm của bài toán (MVI$_k$) thì

$$||x^{k+1} - P_k(x^k)|| \leqslant \epsilon_k,$$

tức là,

$$||x^{k+1} - (I + c_k T_k)^{-1}(x^k)|| \leqslant \epsilon_k, \tag{3.8}$$

trong đó

$$T_k(x) := \begin{cases} F_k(x) + N_C(x) & \text{nếu } x \in \text{dom}F, \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin \text{dom}F. \end{cases}$$

Từ (3.5) và (3.8) suy ra

$$\begin{aligned} ||P_k(x^k) - x^k|| &\leqslant ||x^{k+1} - x^k|| + ||x^{k+1} - P_k(x^k)|| \\ &< \epsilon - \epsilon_k + \epsilon_k \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Do vậy, x^{k+1} là ϵ-nghiệm của bài toán (MVI).

(ii). Giả sử F nửa liên tục trên yếu, đóng yếu và $F(x)$ là tập compact yếu với mỗi $x \in C$. Gọi u^{k+1} là nghiệm chính xác của (MVI_k). Kết hợp điều này với Thuật toán điểm gần kề 3.1, ta có dãy nghiệm $\{u^{k+1}\}$ hội tụ yếu tới nghiệm chính xác x^* của bài toán (MVI). Theo chứng minh trên, x^{k+1} là một ϵ_k-nghiệm của bài toán (MVI_k). Khi đó,

$$\begin{aligned} \langle w, x^{k+1}\rangle - \langle w, x^*\rangle &= \langle w, x^{k+1} - u^{k+1}\rangle + \langle w, u^k - x^*\rangle \\ &\leqslant ||w||\ ||x^{k+1} - u^{k+1}|| + \langle w, u^k - x^*\rangle \\ &\leqslant ||w||\epsilon_k + \langle w, u^{k+1} - x^*\rangle. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Trong Thuật toán 3.3, khi cho $k \to \infty$, ta có

$$\epsilon_k \to 0 \quad \text{và} \quad u^{k+1} \rightharpoonup x^*.$$

Kết hợp điều này với (3.9), ta được

$$\langle w, x^{k+1}\rangle - \langle w, x^*\rangle \to 0 \quad \text{khi} \quad k \to \infty.$$

Theo chứng minh trên, từ dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu suy ra dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Theo giả thiết F là nửa liên tục trên yếu và $w^k \in F(x^k)$, nên dãy $\{w^k\}$ bị chặn. Khi đó, tồn tại một dãy con hội tụ yếu. Ta có thể coi $w^k \rightharpoonup w^*$. Do F là ánh xạ đóng yếu trên C và $w^k \in F(x^k)$, nên $w^* \in F(x^*)$. □

Chú ý 3.4. Trong trường hợp F là đơn trị, ta có

$$\begin{aligned}
&w^0 = F(x^0), w^{k,0} = F_k(u^{k,0}),\\
&w^{k+1} = F_k(x^{k+1}), w^{k,j+1} = F_k(u^{k,j+1}),\\
&||w^{k,j+1} - w^{k,j}|| = L_k||u^{k,j+1} - u^{k,j}||,
\end{aligned}$$

trong đó

$$F_k(x) := x + c_k F(x) - x^k.$$

Kết luận chương

Chương này đã trình bày các nội dung cơ bản về ánh xạ đơn điệu cực đại, thuật toán điểm gần kề để tìm không điểm của một ánh xạ đơn điệu cực đại và một phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị. Phương pháp này kết hợp với phương pháp lặp Banach để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị đơn điệu.

Kết luận chung

Luận văn đề cập đến các vấn đề sau:

• Nhắc lại một số khái niệm và tính chất của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,$\cdots$, đồng thời, trình bày các khái niệm về ánh xạ đa trị liên tục Lipschitz theo khoảng cách Hausdorff và một số ví dụ minh họa.

• Phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVI), các bài toán liên quan và sự tồn tại nghiệm của bài toán (MVI).

• Bằng cách xây dựng ánh xạ nghiệm mà bài toán (MVI) được quy về việc tìm điểm bất động của ánh xạ nghiệm thông qua kỹ thuật hiệu chỉnh (chỉ ra cách chọn tham số thích hợp để ánh xạ nghiệm có tính chất co).

• Kết hợp nguyên lý ánh xạ co và thuật toán điểm gần kề giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVI) đơn điệu.

Tài liệu tham khảo

Tài liệu Tiếng Việt

[1] Đỗ Văn Lưu, Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

[2] Hoàng Xuân Phú (1997), *Lý thuyết các bài toán cực trị*, Viện Toán học, Hà Nội.

[3] Lê Dũng Mưu (1998), *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

[4] Nguyễn Đông Yên (2007), *Giáo trình Giải tích đa trị*, Nxb Khoa học Tự nhiên và Công nghệ.

Tài liệu Tiếng Anh

[5] Hoang Tuy (1997), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.

[6] Kinderlehrer D. and Stampacchia G. (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press.

[7] Kinderlehrer D. and Stampacchia G. (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press.

[8] Konnov I. V. (2000), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.

[9] Minty G. J. (1964), *On the Monotonicity of the Gardient of a Convex Function*, Pacific J. Math., **14**, pp. 243-247.

[10] Minty G. J. (1962), *Monotone (Nonlinear) Operators in Hilbert Space*, Duke Math. J., **29**, pp. 341-346.

[11] P. N. Anh and L. D. Muu (2004), *Coupling the Banach Contraction Mapping Principle and the Proximal Point Algorithm for Solving Monotone Variational Inequalites*, Acta Math Vietnamica, **29**, pp. 119-133.

[12] P. N. Anh and L. D. Muu (2006), *Contraction Mapping Fixed Point Algorithms for Multivalued Mixed Variational Inequalities*, Optimization with Multivalued Mappings, Eds Stephan D. and Vyacheslav K., Springer.

[13] P. N. Anh, L. D. Muu, N. V. Hien and Strodiot J. J. (2005), *Using the Banach Contraction Principle to Implement the Proximal Point Method for Multivalued Monotone Variational Inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, **124**, pp. 285-306.

[14] P. N. Anh, L.D.Muu and Strodiot J. J. (2009), *Generalized Projection Method for Non-Lipschitz Multivalued Monotone Variational Inequalities*, Acta Mathematica Vietnamica, **34**, pp. 67-79.

[15] Rockafellar R. T. (1976), *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm*, SIAM J. Control and Optimization. **14**, pp. 877-897.

[16] Rockafellar R. T. (1970), *On the Maximality of Sums of Nonlinear Monotone Operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **149**, pp. 75-88.

[17] Taji K. and Fukushima M. (1996), *A New Merit Funtion and a Successive Quadratic Programming Algorithm for Variational Inequality Problem*, SIAM Jounal on Optimization, **6**, pp. 704-713.