Vietnam Journal of Mathematics **30**:2 (2002) 177–188

Vietnam Journal
of
MATHEMATICS

Comportement Asymptotique des Systèmes Doublement Orthogonaux de Bergman: Une Approche Élémentaire

Ahmed Zeriahi

Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne, F-31062, Toulouse, France

Received February 25, 2001

Abstract. Given a domain $D \subset X$ in a complex analytic space X and a non-pluripolar compact set $K \subset D$, it is possible to construct in a natural way two Hilbert spaces H_1 and H_0 of Bergman type attached to the "condenser" (K, D) in the sense that the following inclusions $H_1 \hookrightarrow \mathcal{O}(D) \hookrightarrow \mathcal{O}(K) \hookrightarrow H_0$ are continuous. Then generalizing a classical construction due to Bergman, it is possible to construct a doubly orthogonal system in H_1 and H_0.

Our main goal here is to describe, in a completely elementary way, the asymptotic behaviour of this doubly orthogonal system in terms of the *plurisubharmonic measure* of the condenser (K, D), using classical ideas of Bergman as well as classical results from both Pluripotential Theory and Spectral Theory.

1. Introduction

Soit X un espace analytique complexe. Rappelons qu'un ouvert $D \subset X$ est dit *hyperconvexe* s'il admet une fonction d'exhaustion plurisousharmonique bornée (cf. [21]).

Si $D \Subset X$ est un domaine hyperconvexe et $K \subset D$ est un compact non-pluripolaire, on définit la *mesure plurisousharmonique* ou encore P-mesure du "condensateur" (K, D) par la formule suivante:

$$\omega(.; K; D) := \Big(\sup\{u : u \in PSH(D), u|K \leq 0, u \leq 1\}\Big)^*, \quad (1.1)$$

où U^* désigne la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure correspondante U (cf. [17,19]).

La fonction $\omega(.;K;D)$ est alors plurisousharmonique sur D. D'après Bedford et Taylor [4, 6], la mesure de Borel positive définie par la formule suivante:

$$\mu_{K,D} := \left(dd^c\omega(.;K;D)\right)^n \tag{1.2}$$

où $(dd^c)^n$ désigne l'opérateur de Monge–Ampère complexe sur X, est concentrée sur K et sa masse totale est égale à la capacité du condensateur (K, D) [4, 6, 17]. On l'appelle la *mesure d'équilibre relative* du condensateur (K, D).

On désignera par $\mathcal{O}(D)$ l'espace des fonctions holomorphes sur D et par $\mathcal{O}(K)$ l'espace des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K.

On notera par $H_1 := L^2_h(D)$ l'espace de Bergman à poids des fonctions holomorphes sur D dont le module est de carré intégrable (au sens de Lebesgue) sur D avec la norme L^2 usuelle et par $H_0 := L^2_h(K)$ la fermeture de $\mathcal{O}(K)$ dans $L^2(K;\mu_{K,D})$ avec la norme L^2 correspondante.

Voici le résultat essentiel que nous avons en vue.

Théorème 1.1. *Soient $D \Subset X$ un domaine hyperconvexe et $K \subset D$ un compact non-pluripolaire. Alors il existe une base orthogonale $(B_j)_{j\geq 1}$ dans $H_1 := L^2_h(D)$ qui forme un système orthonormé dans $H_0 := L^2_h(K)$ vérifiant l'estimation asymptotique suivante:*

$$\limsup_{j\to+\infty} \frac{\log|B_j(x)|}{\log\gamma_j} \leq \omega(x, K, D),\ \forall x \in D, \tag{1.3}$$

où $\gamma_j = \|B_j\|_{H_1}$, pour $j \in \mathbb{N}^*$.

De plus, on a

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j^{-\varepsilon} < +\infty,\ \forall\varepsilon > 0. \tag{1.4}$$

Le système dont l'existence est attestée par ce théorème sera construit selon une méthode classique dûe à Bergman dans le cas d'une variable complexe (cf. [5]). Suivant la terminologie de Bergman, on l'appellera le *système doublement orthogonal de Bergman* associé au condensateur (K, D).

Le théorème précédent joue un rôle essentiel dans l'étude du problème de l'extension des fonctions séparément holomorphes sur des "ensembles croisés" tel qu'il a été abordé dans [15, 16]. Cette approche a été récemment poursuivie et développée dans [3].

Rappelons que le problème de l'extension des fonctions séparément holomorphes sur des "ensembles croisés" fût initié par Siciak [18, 19] donnant ainsi une généralisation substantielle du fameux théorème de Hartogs sur l'analyticité des fonctions séparément holomorphes. Les résultats de Siciak fûrent ensuite généralisés par Zahariuta [22, 23] dans le cadre des variétés de Stein à l'aide de la technique des échelles hilbertiennes et de la théorie de Mityagin [12].

En fait, la construction de ce système doublement orthogonal peut se faire dans le cadre abstrait d'une paire ordonnée d'espaces de Hilbert (H_1, H_0), avec une injection complètement continue $i : H_1 \hookrightarrow H_0$, permettant d'identifier H_1 à un sous-espace de H_0.

Lorsque K est l'adhérence d'un sous-domaine $D_0 \Subset D \Subset \mathbb{C}^n$, il est assez naturel de prendre pour H_1 et H_0 les espaces de Bergman associés aux domaines $D_1 = D$ et D_0 respectivement.

Cependant dans le cas général important où $K \subset D$ est seulement supposé non-pluripolaire, l'argument utilisé par Zahariuta, notamment pour justifier l'existence d'un espace de Hilbert H_0 attaché au compact K, repose sur un résultat abstrait de Mityagin provenant de la théorie des espaces nucléaires (cf. [12, 22]). Ce passage fût depuis longtemps jugé obscur par les spécialistes.

Un progrès substantiel, reposant sur la théorie du Pluripotentiel, a été réalisé dans [15, 16] en proposant comme espace H_0 le sous-espace fermé $L_h^2(K, \mu_0)$, engendré par le sous-espace $\mathcal{O}(K)$ dans $L_h^2(K, \mu_0)$ où $\mu_0 = \mu_{K,D}$ est la mesure d'équilibre du condensateur (K, D) (cf. [14]).

Cependant le comportement asymptotique du système doublement orthogonal de Bergman correspondant ne pouvait être établi d'une façon directe sans utiliser les résultats de Mityagin cités plus haut.

Récemment, Nguyen Thanh Van a apporté une simplification importante en donnant une nouvelle preuve de la condition (3.3), limitant l'usage de la théorie de Mityagin à des estimations élémentaires sur les k-diamètres de Kolmogoroff (cf. [13]).

Compte tenu de l'importance de ce résultat dans les applications, il nous a semblé utile d'en donner une preuve complètement élémentaire, sans recourir à la théorie de Mityagin.

Notre méthode repose sur la construction initiale de Bergman [5] telle qu'elle a été généralisée dans [15] et utilise des résultats élémentaires provenant à la fois de la théorie du pluripotentiel (cf. [6, 14]) et de la théorie spectrale des opérateurs compacts.

2. Système Doublement Orthogonal Associé à une Paire Hilbertienne

La construction classique de Bergman [5] peut en fait se faire dans un cadre hilbertien assez général, en utilisant des résultats classiques de la théorie spectrale des opérateurs compacts hermitiens positifs d'un espace de Hilbert.

Les espaces de Hilbert considérés ici seront tous supposés séparables et de dimension infinie.

La construction que nous avons en vue repose sur le lemme fondamental suivant.

Lemme 2.1. *Soient $(H_1, \|.\|_{H_1})$ et $(H_0, \|.\|_{H_0})$ deux espaces de Hilbert tels qu'il existe une injection complètement continue $i : H_1 \hookrightarrow H_0$ permettant d'identifier H_1 à un sous-espace vectoriel de H_0. Alors on a les propriétés suivantes:*

(1) *Il existe une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 1}$ de H_1 qui soit un système orthogonal de H_0 telle que*

$$\|e_j\|_{H_1} = 1, \ \forall j \geq 1 \ \ et \ \ \|e_j\|_{H_0}^2 =: \lambda_j \searrow 0, \tag{2.1}$$

où $\lambda_j = \lambda_j(H_1, H_0)$ $(j \geq 1)$ est une suite strictement décroissante de nombre réels positifs tendant vers 0 et ne dépendant que de la paire (H_1, H_0).

(2) *Si* $(\tilde{H}_0, \|\cdot\|_{\tilde{H}_0})$ *est un autre espace de Hilbert avec des injections continues* $H_1 \hookrightarrow \tilde{H}_0 \hookrightarrow H_0$, *alors en notant* $\lambda_j = \lambda_j(H_1, H_0)$ *et* $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j(H_1, \tilde{H}_0)$ *les suites correspondantes aux paires* (H_1, H_0) *et* $(H_1, \tilde{H}_0)$ *respectivement, on a l'inégalité suivante:*

$$\lambda_j \leq c^2 \cdot \tilde{\lambda}_j, \quad \forall j \geq 1 \tag{2.2}$$

où $c > 0$ *est la norme de l'injection continue* $\tilde{H}_0 \hookrightarrow H_0$.

Démonstration. (1) La construction est classique; elle se base sur la décomposition spectrale d'un opérateur compact hermitien positif de l'espace de Hilbert H_1. En effet, considérons l'opérateur injection continue $i : H_1 \hookrightarrow H_0$, qui est compact par hypothèse et notons $T := i^* \circ i$, où i^* est le transposé de i. Alors T est un opérateur linéaire continu et compact de H_1 dans H_1, qui satisfait à l'identité suivante:

$$(Tx \mid y)_{H_1} = (x \mid y)_{H_0}, \quad \forall x, y \in H_1, \tag{2.3}$$

où $(. \mid .)_{H_i}$ désigne le produit scalaire hermitien dans H_i, pour $i = 0, 1$. De plus l'opérateur T est injectif, hermitien et défini positif. Il en résulte que T admet une suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ de valeurs propres simples tendant vers 0 telles que $0 < \ldots < \lambda_{j+1} < \lambda_j < \ldots < \lambda_1$, pour tout $j \geq 2$. La décomposition spectrale de T dans H_1 fournit alors une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 1}$ de H_1 formée de vecteurs propres de T associés à la suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ des valeurs propres de T. De façon plus précise, la méthode classique consiste à maximiser la forme quadratique $(Tx \mid x)_1 = \|x\|_0^2$ sous certaines conditions sur $x \in H_1$ avec $\|x\|_1 = 1$. Cela se fait par récurrence. On sait que le maximum suivant

$$\lambda_1 := \max\{(Tx \mid x)_{H_1} \, ; \, \|x\|_{H_1} = 1\} \tag{2.4}$$

fournit la valeur propre maximale de T et que ce maximum est atteint en un point $e_1 \in H_1$, qui est un vecteur propre normé de T, associé à la valeur propre λ_1. Supposons maintenant que pour un $j \geq 2$ fixé, l'on ait choisi des vecteurs propres normés $e_1, \ldots, e_{j-1}$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 > \ldots > \lambda_{j-1}$. Alors la $j^{\text{ième}}$ valeur propre λ_j de T est donnée par la formule suivante:

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \max\{(Tx \mid x)_{H_1} \, ; \, \|x\|_{H_1} = 1, x \in [e_1; \ldots, e_{j-1}]^\perp\} \\ &= \max\{\|x\|_{H_0}^2 \, ; \, \|x\|_{H_1} = 1, x \in [e_1; \ldots, e_{j-1}]^\perp\}\end{aligned} \tag{2.5}$$

où $[e_1; \ldots, e_{j-1}]$ est le sous-espace vectoriel de H_1 engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_{j-1}$ et $[e_1; \ldots, e_{j-1}]^\perp$ son orthogonal dans H_1. De plus le maximum est atteint en un point $e_j \in H_1$ qui est un vecteur propre normé associé à la valeur propre λ_j.

Il reste à montrer que le système $(e_j)_{j\geq 1}$ est orthogonal dans H_0. En effet, suivant une idée de Bergman [5], fixons deux indices i, j tels que $0 < i < j$ et posons $\sigma := (e_i \mid e_j)_{H_0}$. Nous voulons montrer que $\sigma = 0$. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et posons $x = ae_i + be_j$. Alors par construction $x \in [e_1, \ldots, e_{i-1}]^\perp$ et l'on a

$$\begin{aligned}\|x\|_{H_0}^2 &= |a|^2\lambda_i + |b|^2\lambda_j + 2\Re(a\bar{b}\sigma) \\ &= \lambda_i + 2\Re(a\bar{b}\sigma) + (\lambda_j - \lambda_i)|b|^2.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Posons $b = t\sigma$, où t est un paramètre réel assez petit et $a := \sqrt{1-|b|^2} = \sqrt{1-t^2|\sigma|^2}$. Alors d'après (2.6) on obtient

$$\begin{aligned}\|x\|_{H_0}^2 &= \lambda_i + 2t|\sigma|^2\sqrt{1-t^2|\sigma|^2} + t^2(\lambda_j - \lambda_i)|\sigma|^2 \\ &= \lambda_i + 2t|\sigma|^2 + O(t^2).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Supposons que $\sigma \neq 0$, alors il résulte de (2.7) que $\|x\|_{H_0}^2 > \lambda_i$ pour $t > 0$ assez petit. Comme par construction, le vecteur correspondant $x \in H_1$ vérifie les conditions $\|x\|_{H_1} = 1$ et $x \in [e_1, \dots, e_{i-1}]^\perp$, on a aussi $\|x\|_{H_0}^2 \leq \lambda_i$, ce qui est contradictoire. Par conséquent $(e_i \mid e_j)_{H_0} = 0$ pour $i \neq j$, ce qui implique que le système $(e_j)_{j\geq 1}$ est orthogonal dans H_0.
(2) Pour démontrer les estimations (2.2), rappelons que l'on peut exprimer les valeurs propres (λ_j) de T indépendamment des vecteurs propres auxquels ils sont associés, grâce aux formules classiques suivantes:

$$\lambda_j = \min_{M_{j-1}} \Big(\max \big\{ \|x\|_{H_0}^2 \; ; \; x \in M_{j-1}^\perp, \|x\|_{H_1} = 1 \big\} \Big), \; j \geq 1, \tag{2.8}$$

où, pour chaque $j \geq 1$, le minimum porte sur tous les sous-espaces vectoriels M_{j-1} de H_1 de dimension $j-1$ et $M_{j-1}^\perp$ est l'orthogonal de M_{j-1} dans H_1; le minimum dans (2.8) étant atteint lorsque $M_{j-1} = [e_1, \dots, e_{j-1}]$.

Par conséquent, si c est la norme de l'injection continue $\tilde{H}_0 \hookrightarrow H_0$, on a $\|x\|_{H_0} \leq c\|x\|_{\tilde{H}_0}$ pour tout $x \in \tilde{H}_0$ et l'inégalité (2.2) résulte immédiatement des formules (2.8). ■

Observons que la construction précédente fournit une base orthonormée de H_1, orthogonale dans H_0 qui est unique à une constante mulitiplicative de module 1 près. On l'appellera *système doublement orthogonal* associé au couple (H_1, H_0).

3. Le Système Doublement Orthogonal de Bergman

Nous allons démontrer un résultat un peu plus général que celui énoncé dans l'introduction. Soient X un espace analytique complexe, $D \subset X$ un ouvert hyperconvexe ayant un nombre fini de composantes connexes et $K \subset D$ un compact dont l'intersection avec chaque composante connexe de D soit non pluripolaire. Un tel couple (K, D) sera encore applelé un *condensateur* de X.

Soient μ_1 une mesure lebesguienne sur D (voir définition ci-dessous) et μ_0 une mesure de Borel positive sur K qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. On notera par $H_1 := L_h^2(D; \mu_1)$ l'espace de Bergman à poids des fonctions holomorphes sur D dont le module est de carré μ_1-intégrable sur D et par $H_0 := L_h^2(K; \mu_0)$ la fermeture de $\mathcal{O}(K)$ dans $L^2(K; \mu_0)$.

Alors il est facile de montrer, en utilisant la propriété de sous-moyenne en coordonnées locales, que les injections canoniques suivantes

$$L_h^2(D;\mu_1) \hookrightarrow \mathcal{O}(D) \hookrightarrow \mathcal{O}(K) \hookrightarrow H_0$$

sont continues.

Avant d'énoncer le théorème général que nous avons en vue, nous aurons besoin d'introduire quelques notions.

Définition 3.1. (1) *On appellera mesure lebesguienne sur D une mesure de Borel positive μ_1 sur D telle que $d\mu_1 = \rho\, dV$ où ρ est une densité continue sur D et dV est l'élément de volume associé à une métrique hermitienne donnée sur X.*
(2) *Une mesure lebesguienne μ_1 sur D est dite B-admissible si l'espace de Bergman associé $L_h^2(D;\mu_1)$ est de dimension infinie.*
(3) *La paire (D,μ_1) sera dite B-régulière si l'espace de Bergman associé $L_h^2(D;\mu_1)$ est dense dans $\mathcal{O}(D)$.*

On dira qu'un ouvert $D \Subset X$ est fortement hyperconvexe s'il existe un ouvert pseudoconvexe $D' \supset\supset D$ et une fonction $\varphi : D' \longrightarrow]-\infty, 0[$ plurisousharmonique continue telle que $D = \{x \in D';\, \varphi(x) < 0\}$.

Lorsque (K,D) est un condensateur de X, on définit la P-mesure de (K,D) par la formule (1.1) donnée dans l'introduction.
On définit également les domaines de sous-niveaux de la P-mesure par

$$D_\alpha = D(K;\alpha) := \{x \in D;\, \omega(x;K;D) < \alpha\},\quad \alpha \in]0,1[. \tag{3.1}$$

Voici une autre notion qui sera utile (cf. [11, 14]).

Définition 3.2. *Soient (K,D) un condensateur. Une mesure de Borel positive ν sur K est dite déterminante si elle ne charge pas les ensembles pluripolaires et si pour tout borelien $E \subset K$ tel que $\nu(E) = \nu(K)$, on a $\omega(.;E;D) = \omega(.;K;D)$ sur D.*

Donnons quelques exemples intéressants qui illustrent les notions définies précédemment.

Exemples. (1) Soient $D \Subset X$ un ouvert pseudoconvexe quelconque et μ_1 une mesure lebesguienne sur D. Alors la mesure μ_1 est B-admissible.
Si de plus D est fortement hyperconvexe c'est à dire qu'il existe un ouvert $D' \supset\supset D$ et une fonction $\varphi : D' \longrightarrow]-\infty, 0[$ plurisousharmonique continue telle que $D = \{x \in D';\, \varphi(x) < 0\}$. Comme $\mathcal{O}(D') \subset L_h^2(D;\mu_1) \subset \mathcal{O}(D)$ et que (D,D') est une paire de Runge (cf. [8]), il en résulte que l'espace $L_h^2(D;\mu_1)$ est dense dans $\mathcal{O}(D)$. La paire (D,μ_1) est donc B-régulière.
(2) Supposons maintenant que X soit une variété analytique complexe et que $D \subset X$ soit un ouvert hyperconvexe. Alors, en utilisant les estimations L^2 de Hörmander [9], on montre qu'il existe une mesure lebesguienne positive μ_1 sur D telle que l'espace $L_h^2(D;\mu_1)$ soit dense dans $\mathcal{O}(D)$ (cf. [15, 24]). La paire $(D;\mu_1)$ est alors B-régulière. Lorsque $D \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$, on peut prendre $d\mu_1 = \rho\, dV$, avec $\rho(z) = (1+|z|^2)^{-2}$ (cf. [15, 24]).

(3) Soit $D_0 \Subset X$ un ouvert relativement compact à bord Lipschitzien dans X. Alors toute mesure lebesguienne μ_0 sur $\overline{D}_0$ est déterminante. Dans le cas général où $D \subset X$ est hyperconvexe et $K \subset D$ est non-pluripolaire, la mesure d'équilibre relative $\mu_{K,D}$ du condensateur (K, D) est déterminante sur K (cf. [14, 25]).

Compte tenu des exemples ci-dessus, le Théorème 1.1 énoncé en introduction est clairement une conséquence immédiate du théorème plus général suivant.

Théoème 3.3. *Soient (K, D) un condensateur de X, où D est un ouvert hyperconvexe muni d'une mesure lebesguienne B-admissible μ_1 et $K \subset D$ un compact non-pluripolaire muni d'une mesure de Borel déterminante μ_0. Alors il existe un système $(B_j)_{j\geq 1}$ doublement orthogonal dans $H_1 := L^2_h(D; \mu_1)$ et $H_0 := L^2_h(K; \mu_0)$ tel que:*

$$\|B_j\|_{H_0} = 1, \quad et \quad \|B_j\|_{H_1} = \gamma_j, \quad \forall j \geq 1. \tag{3.2}$$

De plus, on a

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j^{-\varepsilon} < +\infty, \ \forall \varepsilon > 0 \tag{3.3}$$

et

$$\limsup_{j\to+\infty} \frac{\log|B_j(x)|}{\log \gamma_j} \leq \omega(x, K, D), \ \forall x \in D. \tag{3.4}$$

En particulier, pour tout $\alpha \in]0,1[$ et tout compact $E \subset D(K, \alpha)$, il existe une constante $c(E, \alpha) > 0$ telle que:

$$\|B_j\|_E \leq c(E, \alpha)\, \gamma_j^\alpha \ \ \forall j \geq 1. \tag{3.5}$$

La démonstration du théorème repose de façon essentielle sur le lemme élémentaire suivant qui est intéréssant en lui-même.

Lemme 3.4. *Soient $(\varphi_p)_{p\geq 1}$ une suite de fonctions positives, logarithmiquement plurisousharmoniques sur un ouvert $D \subset X$ et $K \subset D$ un compact non-pluripolaire muni d'une mesure déterminante μ_0. On pose $\Delta_s := \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| < s\}$, pour $s > 0$ et on suppose qu'il existe deux nombres réels $0 < r < R$ tels que la série de Hartogs $\sum \varphi_p(x)\zeta^p$ converge localement uniformément sur $D \times \Delta_r$ et que pour μ_0-presque tout $x \in K$, la série entière $\sum \varphi_p(x)\zeta^p$ converge sur Δ_R.*

Alors la suite des fonctions plurisousharmoniques $\{(1/p)\log \varphi_p, p \in \mathbb{N}^*\}$ est localement uniformément majorée sur D et l'on a l'inégalité suivante:

$$\limsup_{p\to+\infty} (1/p) \log \varphi_p(x) \leq -\log R + \log(R/r) \cdot \omega(x; K; D), \ \forall x \in D. \tag{3.6}$$

En particulier, pour tout $\alpha \in]0,1[$, la série $\sum \varphi_p(x)\zeta^p$ converge localement uniformément sur $D_\alpha \times \Delta_{\rho(\alpha)}$, où D_α est l'ouvert défini par la formule (3.1) et $\rho(\alpha) := R^{1-\alpha} \cdot r^\alpha$.

Démonstration. En utilisant la formule de Cauchy pour les coefficients d'une série entière, il résulte des hypothèses du lemme que la suite des fonctions plurisousharmoniques $\{(1/p)\log\varphi_p, p \in \mathbb{N}^*\}$ est localement uniformément majorée sur D. Alors en posant $u := \limsup_{p\to+\infty}(1/p)\log|\varphi_p|$, on conclut que la fonction u^* est plurisousharmonique sur D. Comme pour chaque $x \in D$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \varphi_p(x)\zeta^p$ est égal à $\exp(-u(x))$, les hypothèses du lemme impliquent:

$$u(x) \leq -\log r,\ \forall x \in D \tag{3.7}$$

et

$$u(x) \leq -\log R,\ \mu_0 - \text{p.p. sur } K. \tag{3.8}$$

Comme l'ensemble $A := \{x \in D; u(x) < u^*(x)\}$ est pluripolaire, on a $\mu_0(A) = 0$ (cf. [4, 6]). Il résulte alors des estimations (3.7) et (3.8) que u^* est une fonction plurisousharmonique vérifiant $u^* \leq -\log r$ sur D et $u^* \leq -\log R$ sur K', où $K' \subset K$ est un ensemble borelien tel que $\mu_0(K') = \mu_0(K)$. Il en résulte que la fonction définie par

$$v := (\log(R/r))^{-1} \cdot (u^* + \log R)$$

est plurisousharmonique sur D et vérifie l'inégalité $v \leq \omega(.;K';D)$ sur D. Comme μ_0 est une mesure déterminante sur K, on a $\omega(.;K';D) = \omega(.;K;D)$ sur D et donc $v \leq \omega(.;K;D)$ sur D, ce qui prouve l'inégalité (3.6) du Lemme 3.4. La dernière assertion du Lemme 3.4 en résulte immédiatement en appliquant le lemme de Hartogs (cf. [24]). ■

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème.

Démonstration du théorème. Soit $i : H_1 \hookrightarrow H_0$ l'opérateur restriction qui à tout $f \in H_1$ fait correspondre $f_{|K} \in H_0$. Il est clair que l'opérateur linéaire i est continu et injectif et le théorème de Montel implique que i est un opérateur compact.
Par conséquent, les injections suivantes:

$$H_1 \hookrightarrow \mathcal{O}(D) \hookrightarrow H_0 \tag{3.9}$$

sont complètement continues.
La construction de la base orthogonale s'obtient alors par la même construction que celle décrite dans la preuve du Lemme 2.1, ce qui correspond exactement à la méthode des systèmes doublement orthogonaux de Bergman (cf. [5]) telle qu'elle a été développée dans ce contexte dans [16]. D'après le Lemme 2.1, l'espace de Hilbert H_1 admet alors une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 1}$, qui forme un système orthonormé dans H_0 et qui vérifie les propriétés (2.1). En posant $\gamma_j := \lambda_j^{-1/2}$ et $B_j := \gamma_j \cdot e_j$, pour $j \geq 1$, on obtient une base orthogonale de H_1, qui forme un système orthonormé dans H_0 vérifiant les conditions (3.2).

Pour démontrer la condition (3.3), on procède en deux étapes.
(1) Nous allons d'abord montrer condition (3.3) dans un cas particulier. Considérons un domaine $D_0 \Subset D$ à bord régulier tel que $K \subset D_0$ et dont chaque composante connexe rencontre D et K suivant un ensemble non-pluripolaire. Désignons par $\tilde{H}_0$ l'adhérence de $\mathcal{O}(\overline{D}_0)$ dans l'espace de Bergman $L^2_h(D_0;\mu_{1|D_0})$. Notons $(\tilde{B}_j)_{j\geq 1}$ le système doublement orthogonal de Bergman associé à la paire

$(H_1, \tilde{H}_0)$ et soit $\tilde{\gamma}_j := \gamma_j(H_1, \tilde{H}_0) = \|\tilde{B}_j\|_{H_1}$ la suite des normes associées. Considérons la famille à un paramètre complexe des noyaux définis par

$$\tilde{N}(\tau, x) := \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{\gamma}_j^{-2\tau} |\tilde{B}_j(x)|^2. \tag{3.10}$$

Il est bien connu que la série de fonctions numériques $\sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{\gamma}_j^{-2} |\tilde{B}_j(x)|^2$ converge localement uniformément sur $D_1 := D$ et que sa somme $\tilde{N}_1(x)$ est le noyau de Bergman à poids du domaine D_1 (cf. [5]). Par conséquent la série $\tilde{N}_\tau(x) = \tilde{N}(\tau, x)$ converge localement uniformément en (x, τ) sur le domaine défini par $\{(x, \tau) \in D_1 \times \mathbb{C};\ \Re\tau \geq 1\}$. D'une façon analogue, la série de fonctions numériques $\sum_{j=1}^{+\infty} |\tilde{B}_j(x)|^2 \tilde{\gamma}_j^{-2\tau}$ converge localement uniformément en (x, τ) sur le domaine défini par $\{(x, \tau) \in D_0 \times \mathbb{C};\ \Re\tau \geq 0\}$ et que $\tilde{N}_0$ est le noyau de Bergman à poids du domaine D_0.

Nous voulons démontrer que la série $\tilde{N}(\tau, x)$ converge localement uniformément sur chacun des domaines $\{(x, \tau) \in D_\alpha \times \mathbb{C};\ \Re\tau > \alpha\} (0 < \alpha < 1)$. Nous allons appliquer Lemme 3.4 en posant $\zeta = e^{-\tau}$. Considérons pour cela les fonctions suivantes:

$$\tilde{C}_p(x) := \sum_{p \leq \log \tilde{\gamma}_j < p+1} |\tilde{B}_j(x)|^2 \tag{3.11}$$

pour $x \in D$ et $p \in \mathbb{N}^*$ et observons que les fonctions $\log \tilde{C}_p$ sont plurisousharmoniques sur D.

Alors, en posant $\zeta = e^{-\tau}$ et en tenant compte des propriétés de la série (3.10) démontrées ci-dessus, on conclut immédiatement que la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{C}_p(x)\zeta^{2p}$ converge localement uniformément en (x, ζ) sur chacun des domaines $D_i \times \Delta_{e^{-i}}$ pour $i = 0$ et $i = 1$.

Il résulte du Lemme 3.4 que pour chaque $\alpha \in]0, 1[$, la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{C}_p(x)\zeta^{2p}$ converge localement uniformément sur le domaine $D_\alpha \times \Delta_{e^{-\alpha}}$. Soient $\varepsilon > 0$ et α tel que $0 < \alpha < \varepsilon$. Comme $\overline{D}_0 \times \overline{\Delta}_{e^{-\varepsilon}} \subset D_\alpha \times \Delta_{e^{-\alpha}}$, il en résulte que la série $\tilde{C}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{C}_p(x) e^{-2\varepsilon}$ converge uniformément sur $\overline{D}_0$ et que sa somme est une fonction continue sur $\overline{D}_0$.

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \sum_j \tilde{\gamma}_j^{-2\varepsilon} &= \sum_j \tilde{\gamma}_j^{-2\varepsilon} \int_{D_0} |\tilde{B}_j(x)|^2 d\mu_1(x) \\ &= \int_{D_0} \Big(\sum_j \tilde{\gamma}_j^{-2\varepsilon} |\tilde{B}_j(x)|^2 \Big) d\mu_1(x) \\ &\leq \int_{\overline{D}_0} \Big(\sum_p \tilde{C}_p(x) e^{-2\varepsilon p} \Big) d\mu_1(x) < +\infty, \end{aligned}$$

et par suite que

$$\sum_j \tilde{\gamma}_j^{-2\varepsilon} \leq \int_{\overline{D}_0} \tilde{C}(x) d\mu_1(x) < +\infty. \tag{3.12}$$

(2) Revenons maintenant au cas général. Comme $K \Subset D_0$ et que chaque composante de connexe D_0 rencontre K suivant un ensemble non-pluripolaire, on en déduit, avec les notations du Lemme 2.1, que les applications restrictions $H_1 \hookrightarrow \tilde{H}_0 \hookrightarrow H_0$ sont des injections continues. Par construction des suites (γ_j) et $(\tilde{\gamma}_j)$, il résulte de l'estimation (2.2) du Lemme 2.1, que l'on a

$$\tilde{\gamma}_j \leq c^2\,\gamma_j,\ \forall j \in \mathbb{N}^* \tag{3.13}$$

où $c > 0$ est la norme de l'injection canonique $i_0 : \tilde{H}_0 \hookrightarrow H_0$. On en déduit d'après (3.12), que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j^{-\varepsilon} \leq c^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{\gamma}_j^{-\varepsilon} < +\infty,$$

ce qui prouve que la condition (3.3) est satisfaite.

Pour démontrer la propriété (3.4) dans ce cas, on va utiliser la condition (3.3) et encore une fois Lemme 3.4. Posons

$$C_p(x) := \sum_{p \leq \log \gamma_j < p+1} |B_j(x)|^2 \tag{3.14}$$

pour $x \in D$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Comme précédemment, on sait que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j^{-2\tau} |B_j(x)|^2$ converge normalement en (τ, x) sur tout compact de l'ensemble défini par $\Re\tau \geq 1$ et $x \in D$. Il en résulte, en posant $\zeta = \exp(-\tau)$, que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} C_p(x) \zeta^{2p}$ converge localement normalement pour $x \in D$ et $|\zeta| \leq e^{-1}$.

Par ailleurs, fixons $\varepsilon > 0$ et remarquons, en utilisant la condition (3.3), que la série de fonctions numériques positives $\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j^{-2\varepsilon} |B_j(x)|^2$ converge dans $L^1(K;\mu_0)$. Sa somme, qui est donc un élément de $L^1(K;\mu_0)$, est finie μ_0-presque partout sur K. Il en résulte qu'il existe un sous-ensemble borelien $K' \subset K$ avec $\mu_0(K') = \mu_0(K)$ tel que pour chaque $x \in K'$ fixé, la série $\sum_{j=1}^{+\infty} C_p(x)\zeta^{2p}$ converge normalement pour $|\zeta| \leq \exp(-\varepsilon)$. D'après Lemme 3.4, il en résulte que $v := \limsup_p (1/p) \log C_p \leq (1-\varepsilon)\omega(.; K; D) + \varepsilon$ sur D. En observant que $\limsup_j (1/\log \gamma_j) \log |B_j| \leq v$ sur D, on en déduit l'inégalité (3.4) puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Quant à l'estimation (3.5), elle résulte de l'inégalité (3.4) en appliquant le lemme de Hartogs. ■

Le système doublement orthogonal obtenu dans ce théorème par la construction du Lemme 2.1 est unique à une constante multiplicative de module 1 près, on l'appellera le système doublement orthogonal de Bergman associé au condensateur (K, D) muni des mesures (μ_0, μ_1).

Remarques: Soient $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine hyperconvexe, $K \subset D$ un compact non-pluripolaire et μ_1 la mesure lebesguienne sur D de densité $\rho(z) := (1+|z|^2)^{-2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur D. Alors l'espace $H_1 := L_h^2(D;\mu_1)$ est dense dans $\mathcal{O}(D)$ et le système doublement orthogonal dans $H_1 := L_h^2(D;\mu_1)$ et $H_0 := L_h^2(K;\mu_{K,D})$ vérifie l'identité suivante (cf. [16, 24]):

$$\left(\limsup_{j\to+\infty} \frac{\log^+|B_j|}{\log \gamma_j}\right)^*(z) = \omega(z,K,D)\ ,\ \forall z \in D. \tag{3.15}$$

Conjecture. *L'identité* (3.15) *reste encore valable sous les hypothèses générales du Théorème 3.1.*

Problème. *Caractériser les domaines $D \Subset \mathbb{C}^n$ tels que l'espace de Bergman $L^2_h(D)$ soit dense dans l'espace $\mathcal{O}(D)$. Observons que la réponse est oui si D est hyperconvexe (cf.* [16, 24]*), mais que la réponse est non en général comme le montre le cas du disque unité de $\mathbb{C}$ privé de son centre.*

References

1. O. Alehyane, Une extension du théorème de Hartogs pour les applications séparément holomorphes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **324** (1997) 149–152.
2. O. Alehyane, Applications séparément méromorphes dans les espaces analytiques, Prépublication du *Laboratoire de Mathématiques E. Picard*, Université Paul Sabatier, Toulouse n° 79, 1996.
3. O. Alehyane et A. Zeriahi, Une nouvelle version du théorème d'extension de Hartogs pour les applications séparément holomorphes entre espaces analytiques, Prépublication du *Laboratoire de Mathématiques E. Picard*, Toulouse, n° 201, 2000.
4. E. Bedford, The operator $(dd^c)^n$ on complex spaces, Séminaire d'analyse Lelong-Skoda, *Lectures Notes in Math.*, Springer-Verlag, **919** (1981) 294–324.
5. S. Bergman, The Kernel function and conformal mapping, Math. Surveys, *Amer. Math. Soc.* (1950).
6. E. Bedford and B. A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, *Acta Math.* **149** (1982) 1–40.
7. H. J. Borchers, The generalized three circle and other convexity theorems with applications to the construction of envelopes of holomorphy, *Ann. Inst. Poincaré* **27** (1) (1977) 31–60.
8. E. Fornaess and R. Narasimhan, The Levi problem on complex spaces with singularities, *Math. Ann.* **248** (1980) 47–72.
9. L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 3rd edition, North Holland, Amsterdam, 1990.
10. M. Klimek, *Pluripotential Theory*, London Math. Soc., Oxford Sciences Publications, 1991.
11. N. Levenberg, Monge–Ampère measures associated to plurisubharmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **289** (1985) 333–343.
12. B. Mityagin, Approximate dimension and bases in nuclear spaces, *Russian Math. Surveys* **16** (1961) 59–127.
13. Nguyen Thanh Van, Note on doubly orthogonal system of Bergman, *Linear Topological Spaces and Complex Analysis* **3** (1997) 157–159.
14. T. V. Nguyen et A. Zeriahi, Familles de polynômes presque partout bornées, *Bull. Sci. Math.* **107** (1983) 81–91.

15. T. V. Nguyen et A. Zeriahi, Une extension du théorème de Hartogs sur les fonctions séparément analytiques, *Analyse Complexe multivariable: Recents Developpements*, Alex Meril ed., (28 Mars, 3 Avril 1988), 183–194.
16. T. V. Nguyen et A. Zeriahi, Systèmes doublement orthogonaux de fonctions holomorphes et applications, *Topics in Complex Analysis, Banach Center Publications, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa*, **31** (1995) 281–297.
17. A. Sadullaev, Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds, *Russian Math. Surveys* **36** (1981) 61–119.
18. J. Siciak, Analyticity and separate analyticity of functions defined on lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$, *Zeszyty Nauk. Jagiellon. Prace Mat.* **13** (1969) 53–70.
19. J. Siciak, Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$, *Ann. Pol. Math.* **22** (1970) 145–171.
20. J. Siciak, Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^n$, *Ann. Pol. Math.* **34** (1981) 175–211.
21. J. L. Stéhlé, Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certains fibrés analytiques, Séminaire P. Lelong, Année 73–74, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, **447** (1975) 155–179.
22. V. P. Zahariuta, Fonctions plurisubharmoniques extrémales, échelles hilbertiennes et isomorphismes d'espaces de fonctions analytiques de plusieurs variables, I, II, *Teor. Funcii Funkcional. Anal. Priložen.* **19** (1974) 133–157 and **21** (1974) 65–83 (Russe).
23. V. P. Zahariuta, Separately holomorphic functions, generalizations of Hartogs theorem and envelopes of holomorphy, *Math. USSR. Sb.* **30** (1976) 51–76.
24. A. Zeriahi, Bases de Schauder et isomorphismes d'espaces de fonctions holomorphes, *C. R. Acad. Sci., Paris* **310** (1990) 691–694.
25. A. Zeriahi, Fonction de Green pluricomplexe à pôle à l'infini sur un espace de Stein parabolique et applications, *Math. Scandinavica* **69** (1991) 89–126.