Tạp chí Toán học *Journal of Mathematics* **22**(1 & 2)(1994), 94–103

SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG CÁC TOÁN TỬ ĐỘC LẬP TRÊN ĐẠI SỐ VON NEUMANN

NGUYỄN VĂN QUẢNG

Abstract. *The aim of this paper is to investigate the almost uniform convergence and the convergence in measure of weigted sums of independent measurable operators in von Neumann algebras. Our results extend some results in [1] and [3].*

Trong thời gian gần đây, lý thuyết xác suất không giao hoán (còn gọi là xác suất lượng tử), được phát triển mạnh mẽ. Đã có một số công trình trên lĩnh vực này nghiên cứu về các dạng hội tụ của dãy tổng các toán tử đo được độc lập (xem [1], [2], [3]). Mục đích của bài báo này là xét sự hội tụ theo độ đo và hội tụ hầu đều của dãy tổng có trọng lượng của các toán tử đo được độc lập. Các kết quả của chúng tôi mở rộng một số kết quả trong [1], [3].

Trong suốt bài này chúng ta luôn luôn giả sử A là đại số von Neumann với trạng thái vết chuẩn tắc, chính xác τ; $\tilde{A}$ là $*$ - đại số các toán tử đo được (xem [2], [4]). Đối với mỗi toán tử tự liên hợp $x \in \tilde{A}$; ta ký hiệu $e_\Delta(x)$ là phép chiếu phổ của x ứng với tập Borel $\Delta \subset R$. Khi đó, hai toán tử tự liên hợp $x, y \in \tilde{A}$ được gọi là cùng phân phối nếu với mọi tập Borel $\Delta \subset R$ thì $\tau(e_\Delta(x)) = \tau(e_\Delta(y))$.

Hai $*$ - đại số con $N_1 \subset \tilde{A}$, $N_2 \subset \tilde{A}$ được gọi là độc lập nếu với mọi $x \in N_1$, $y \in N_2$, $\tau(xy) = \tau(x).\tau(y)$.

Ta nói hai phần tử $x_1 \in \tilde{A}$, $x_2 \in \tilde{A}$ là độc lập nếu các $*$ - đại số $W^*(x_1)$ và $W^*(x_2)$ sinh bởi x_1 và x_2 tương ứng, độc lập. Dãy (x_n) các toán tử đo được (tức là $(x_n) \subset \tilde{A}$) được gọi là độc lập liên tiếp (successively independent) nếu với mọi n, $*$ - đại số $W^*(x_n)$ sinh bởi x_n độc lập với $*$ - đại số $W^*(x_1, \ldots, x_n)$ sinh bởi các phần tử $x_1, \ldots, x_m$ với mọi $m < n$.

Khái niệm hội tụ theo độ đo của dãy các toán tử đo được đã được chúng tôi giới thiệu trong [5]. Do đó, ở đây chúng tôi không nhắc lại nữa, mà chỉ trình bày khái niệm hội tụ hầu đều.

Giả sử $(x_n) \subset \tilde{A}$. Ta nói x_n hội tụ hầu đều đến $x \in \tilde{A}$, khi $n \to \infty$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại phép chiếu trực giao $p \in A$ sao cho $\tau(p) > 1 - \varepsilon$; $(x_n - x)p \in A$ và $\|(x_n - x)p\| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Các thông tin đầy đủ hơn về đại số von Neumann và xác suất trên đại số von Neumann có thể tìm đọc trong [2], [4].

2. SỰ HỘI TỤ THEO ĐỘ ĐO

Bảng (a_{nk}) các số dương được gọi là một ma trận Toeplitz nếu :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ với mỗi $k \geq 1$;

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$ với mỗi $n \geq 1$.

Trong tiết này, chúng tôi sẽ xét điều kiện hội tụ theo độ đo của dãy tổng dạng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k, \tag{2.1}$$

trong đó (a_{nk}) là ma trận Toeplitz, (x_k) là dãy các toán tử độc lập từng cặp, tự liên hợp, đo được và cùng phân phối.

Trước hết chúng ta đưa ra một số bổ đề:

Bổ đề 2.1 (Bất đẳng thức Tchebyshev, xem [3]). *Giả sử x là một toán tử đo được. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, ta có*

$$\tau\big(e_{[\varepsilon,\infty)}(|x|)\big) \leq \varepsilon^{-2}\tau(|x|^2).$$

Bổ đề 2.2. *Giả sử A tác động trên không gian Hilbert H; x là toán tử đo được. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, ta có:*

(i) $\| \, |x| e_{[0,\varepsilon)}(|x|) \, (h)\| \leq \varepsilon \|h\|$ *với mỗi* $h \in H$;

(ii) $\| \, |x| e_{[\varepsilon,\infty)}(|x|) \, (h)\| \geq \varepsilon \|h\|$ *với mỗi* $h \in e_{[\varepsilon,\infty)}(|x|)(H)$.

Chứng minh.

i) Giả sử $|x|$ có biểu diễn phổ

$$|x| = \int_0^\infty \lambda e_{d\lambda}.$$

Vậy thì

$$|x|e_{[0,\varepsilon)}(|x|) = \int_0^{\varepsilon} \lambda e_{d\lambda},$$

do đó

$$\| \, |x|e_{[0,\varepsilon)}(|x|)(h)\|^2 = \int_0^{\varepsilon} \lambda^2 de_{h,h}(\lambda) \leq \varepsilon^2 \int_0^{\varepsilon} de_{h,h}(\lambda)$$

$$= \varepsilon^2 e_{h,h}([0,\varepsilon) = \varepsilon^2 \|e_{[0,\varepsilon)}(|x|)(h)\|^2 \leq \varepsilon^2 \|h\|^2.$$

(ở đây, với mỗi $h \in H$; $e_{h,h}$ là độ đo xác định bởi công thức

$$e_{h,h}(\Delta) = (e_{\Delta}(|x|)h, h) = \|e_{\Delta}(|x|)(h)\|^2$$

với Δ là tập con Borel của đường thẳng thực).

Từ đó (i) được chứng minh, (ii) cũng được chứng minh tương tự.

Định lý 2.3. *Giả sử rằng* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k$ *được xác định từ (2.1). Nếu*

$$\lim_{t\to\infty} t\ \tau(e_{[t,\infty)}(|x_1|)) = 0, \tag{2.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tau(x_1 e_{[0,t)}(|x_1|)) = \mu \tag{2.3}$$

và

$$\max_{1\leq k\leq n} a_{nk} \to 0, \quad \textit{khi } n \to \infty$$

thì

$$S_n \to \mu \cdot 1 \textit{ theo độ đo.}$$

(ở đây 1 là toán tử đồng nhất).

Chứng minh. Giả sử A tác động trên không gian Hilbert H. Đặt

$$x_{nk} = x_k e_{[0,a_{nk}^{-1})}(|x_k|),$$

$$S_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{nk}.$$

Khi đó với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có

$$p = e_{[2\varepsilon,\infty)}(|S_n - \mu \cdot 1|) \wedge e_{[0,\varepsilon)}(|S_{nn} - \mu \cdot 1|) \wedge \Big(\bigwedge_{k=1}^{n} e_{[0,a_{nk}^{-1})}(|x_k|)\Big) = 0.$$

Thật vậy; nếu ngược lại, sẽ tồn tại $h \in H\|h\| = 1$ sao cho $h \in p(H)$; lúc đó $h \in e_{[0,a_{nk}^{-1})}(|x_k|)(H)$ $(k = \overline{1,n})$, nên

$$x_k(h) = x_k e_{[0,a_{nk}^{-1})}(h) = x_{nk}(h) \quad \text{và} \quad S_n(h) = S_{nn}(h).$$

Dùng Bổ đề 2.2 ta được

$$\begin{aligned} 2\varepsilon = 2\varepsilon\|h\| &\leq \||S_n - \mu \cdot 1| e_{[2\varepsilon,\infty)}(|S_n - \mu \cdot 1)(h)\| \\ &= \||S_n - \mu \cdot 1|(h)\| = \|(S_n - \mu \cdot 1)(h)\| \leq \|(S_n - S_{nn})(h)\| + \|(S_{nn} - \mu \cdot 1)(h)\| \\ &= \||S_{nn} - \mu \cdot 1|(h)\| = \||S_{nn} - \mu \cdot 1| e_{[0,\varepsilon)}(|S_{nn} - \mu \cdot 1|)(h)\| \\ &\leq \varepsilon\|h\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Điều này vô lý. Vậy $p = 0$. Suy ra

$$e_{[2\varepsilon,\infty)}(|S_n - \mu \cdot 1|) \leq e_{[\varepsilon,\infty)}(|S_{nn} - \mu \cdot 1|) \vee \Big(\bigvee_{k=1}^{n} e_{[a_{nk}^{-1},\infty)}(|x_k|)\Big).$$

Từ tính dương của vết, ta nhận được

$$\tau(e_{[2\varepsilon,\infty)}(|S_n - \mu \cdot 1|)) \leq \tau(e_{[\varepsilon,\infty)}(|S_{nn} - \mu \cdot 1|)) + \sum_{k=1}^{n} \tau(e_{[a_{nk}^{-1},\infty)}(|x_k|)). \quad (2.4)$$

Do đó, với mỗi $\delta > 0$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \tau(e_{[a_{nk}^{-1},\infty)}(|x_k|)) &= \sum_{k=1}^{n} \tau(e_{[a_{nk}^{-1},\infty)}(|x_1|)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(a_{nk}^{-1}\tau(e_{[a_{nk}^{-1},\infty)}(|x_1|))) \leq \delta \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \delta \end{aligned} \quad (2.5)$$

với n đủ lớn (vì $\max\limits_{1\leq k\leq n} a_{nk} \to 0$ khi $n \to \infty$).

Tiếp theo, bằng phương pháp tích phân từng phần, ta được

$$\begin{aligned} t^{-1} & \int\limits_{0<\lambda<t} \lambda^2 \tau(e_{d\lambda}(|x_1|)) \\ &= t^{-1}(-t^2\tau(e_{[t,\infty)}(|x_1|)) + 2 \int\limits_{0<\lambda<t} \lambda\tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x_1|))d\lambda) \\ &= -t\tau(e_{[t,\infty)}(|x_1|)) + 2t^{-1} \int\limits_{0<\lambda<t} \lambda\tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x_1|))d\lambda \to 0 \quad \text{khi } t \to \infty. \end{aligned}$$

Điều này, cùng với tính độc lập từng cặp của dãy (x_n), cho ta

$$\begin{aligned} \tau(|S_{nn} - \tau(S_{nn}) \cdot 1|^2) &= \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 \tau(|x_{nk} - \tau(x_{nk})|^2) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 \tau(|x_{nk}|^2) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\Big(a_{nk} \int\limits_{\lambda<a_{nk}^{-1}} \lambda^2(e_{d\lambda}(|x_1|))\Big) \to 0 \end{aligned}$$

khi $n \to \infty$.

Áp dụng Bổ đề 2.1, ta được

$$S_{nn} - \tau(S_{nn}) \cdot 1 \to 0 \text{ theo độ đo.} \tag{2.6}$$

Mặt khác,

$$\tau(S_{nn}) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\tau(x_{nk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\tau(x_k e_{[0,a_{nk}^{-1})}(|x_k|)) \to \mu \text{ khi } n \to \infty. \tag{2.7}$$

Từ (2.6) và (2.7) suy ra

$$S_{nn} \to \mu \cdot 1 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Kết hợp điều này với (2.5) và (2.4) ta được

$$S_n \to \mu \cdot 1 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

3. SỰ HỘI TỤ HẦU ĐỀU

Trong tiết này ta sẽ xét đến sự hội tụ của tổng có trọng lượng của dãy $x_n \subset \tilde{A}$ thỏa mãn điều kiện

$$\tau(e_{[t,\infty)}(|x_n|)) \leq C\tau(e_{[t,\infty)}(|x|)) \quad \forall t \geq 0;\ \forall n, \tag{3.1}$$

với $C > 0$ là hằng số, còn $x \in \tilde{A}$.

Nếu (x_n), x thỏa mãn (3.1) thì ta viết $(x_n) < x$.

Bổ đề sau đây tương tự như "bổ đề tương đương" trong lý thuyết xác suất cổ điển.

Bổ đề 3.1 ([3]). *Giả sử (x_n) và (y_n) là các dãy các toán tử đo được và (c_n) là dãy các số dương. Đặt*

$$x_n^{(c_n)} = x_n e_{[0,c_n)}(|x_n|).$$

Khi đó, nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(e_{[c_n,\infty)}(|x_n|)) < \infty,$$

thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ hội tụ hầu đều khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n^{(c_n)} + y_n)$ hội tụ hầu đều.

Sự hội tụ hầu đều của tổng có trọng lượng liên quan đến tốc độ biến thiên của hàm $N(x)$. Hàm đó được định nghĩa như sau:

Giả sử các dãy (a_n), (A_n) thỏa mãn: $a_n > 0$, $0 < A_n \uparrow \infty$ và $(a_n/A_n) \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó $N(x)$ được xác định bởi công thức

$$N(x) = \operatorname{car}\left(n : \frac{A_n}{a_n} \leq x_x\right).$$

Dễ dàng chỉ ra rằng

$$N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\left(x : x \geq \frac{A_n}{a_n}\right)},$$

trong đó I_Δ là hàm chỉ tiêu của tập $\Delta \subset R$.

Bây giờ chúng ta phát biểu những kết quả chính của tiết này. Trước hết, ta giả sử rằng $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$.

Định lý 3.2. *Giả sử $a_n > 0$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \uparrow \infty$, $(a_n/A_n) \to 0$ khi $n \to \infty$ và (x_n) là dãy độc lập liên tiếp các toán tử đo được với $\tau(x_n) = 0$; $(x_n) < x$, $\tau(|x|) < \infty$ và $\tau(N(|x|)) < \infty$. Khi đó, nếu*

$$\int \lambda \tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x|)) \int\limits_{y \geq \lambda} \frac{N(y)}{y^3} dy \, d\lambda < \infty \tag{3.2}$$

thì

$$A_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \to 0 \quad \text{hầu đều; khi } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Chứng minh. Đặt

$$y_k = x_k e_{[0, A_k/a_k)}(|x_k|),$$

khi đó, từ sự phân tích cực

$$x_k - y_k = u_k |x_k - y_k|,$$

ta có (vì $\tau(x_k) = 0, \forall k$)

$$\begin{aligned} |\tau(y_k)| &= |\tau(x_k - y_k)| \leq \|u_k\| \tau(|x_k - y_k|) = \tau(|x_k - y_k|) \\ &= \tau(|x_k|) e_{[A_k/a_k, \infty)}(|x_k|) \to 0 \\ &\quad (\text{vì } \tau(|x_k|) \leq C \cdot \tau(|x|) < \infty). \end{aligned}$$

Suy ra

$$0 \leq \Big| \tau\big(A_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k y_k\big) \Big| \leq A_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k |\tau(y_k)| \to 0, \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.4}$$

Lại có

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \tau\Big(\Big|\frac{a_k}{A_k}(y_k - \tau(y_k) \cdot 1)\Big|^2\Big) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau\Big(\Big|\frac{a_k}{A_k} \cdot y_k\Big|^2\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{a_k}{A_k}\Big)^2 \int\limits_{\lambda < A_k/a_k} \lambda^2 \tau(e_{d\lambda}(|x_k|)) \end{aligned}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_k}\right)^2 \int\limits_{\lambda < A_k/a_k} \lambda\tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x_k|))d\lambda$$

$$\leq 2C\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_k}\right)^2 \int\limits_{\lambda \leq A_k/a_k} \lambda\tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x|))d\lambda$$

$$= 4C\int \lambda\tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x|)) \int\limits_{y\geq\lambda} y^{-3}N(y)dyd\lambda < \infty. \quad (3.5)$$

Suy ra (xem Định lý 4.6.2 [2]).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{A_k}(y_k - \tau(y_k)1) \quad \text{hội tụ hầu đều.}$$

Mặt khác,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tau\left(e_{[1,\infty)}\left(\left|\frac{a_k}{A_k}x_k\right|\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\tau(e_{[A_k/a_k,\infty)}(|x_k|))$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\tau(e_{[A_k/a_k,\infty)}(|x|)) = C\tau(N(|x|)) < \infty.$$

Áp dụng Bổ đề 3.2 cho $\left(\frac{a_k}{A_k}x_k\right)$ và $\left(\frac{a_k}{A_k}y_k\right)$ sẽ được

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{A_k}(x_k - \tau(y_k)\cdot 1) \quad \text{hội tụ hầu đều.} \quad (3.6)$$

Kết hợp (3.4), (3.6) và bổ đề Kronecker sẽ được (3.3) và định lý được chứng minh.

Trong trường hợp tổng quát hơn, khi không nhất thiết $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; ta cần đặt thêm điều kiện lên $N(x)$.

Định lý 3.3. *Giả sử $a_n > 0$, $A_n > 0$, $A_n \uparrow \infty$ $(a_n/A_n) \to 0$ và (x_n) là dãy thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.2, đồng thời $N(x)$ thỏa mãn (3.2) và*

$$\int \tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x|)) \int_0^{\lambda} y^{-2}N(y)dyd\lambda < \infty \quad (3.7)$$

thì (3.3) đúng.

Chứng minh. Từ chứng minh của định lý trên, ta nhận được (3.6) nếu $N(x)$ thỏa mãn (3.2). Do đó ta chỉ còn phải chứng minh rằng với điều kiện (3.7) thì

$$\left|A_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_k\tau(y_k)\right| \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Để chứng minh điều đó, chỉ cần chứng minh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A_k}|\tau(y_k)| < \infty.$$

Ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A_k}|\tau(y_k)| \leq C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A_k}\Big(\int\limits_{\lambda\geq A_k/a_k} \tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x|)) + \tau(e_{[A_k/a_k,\infty)}(x))\Big)$$

$$= C\int \tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x|)) \sum_{(k:0<A_k/a_k\leq\lambda)} (a_k/A_k)d\lambda + C\tau(N(|x|))$$

$$= C\int \tau(e_{[\lambda,\infty)}(|x|)) \int\limits_0^{\lambda} y^{-2}N(y)dyd\lambda + C\tau(N(|x|)) < \infty.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Hệ quả 3.4 (xem [3]). *Giả sử (x_n) là dãy độc lập liên tiếp các toán tử đo được sao cho $\tau(x_n) = 0$ $(x_n) < x$, khi đó nếu*

$$\tau(|x|^p) < \infty \quad (\textit{với } 1 \leq p < 2)$$

$$\textit{thì} \quad n^{-1/p}\sum_{k=1}^{n} x_k \to 0 \quad \textit{hầu đều.}$$

Chứng minh. Đặt $a_n = 1$, $A_n = n^{1/p}$, khi đó $N(x) = 0(x^p)$. Áp dụng Định lý 3.6 ta được điều phải chứng minh.

Lời cám ơn. Tác giả xin chân thành cảm ơn Giáo sư Nguyễn Duy Tiến đã tận tình giúp đỡ hoàn thành bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. C. J. K. Batty, *The strong laws of large numbers for states and for traces of a W^* algebra*, Z. W. **48** (1979), 177-191.

2. R. Jajte, *Strong limit theorems in non-commutative probability*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin and New York, **1110** (1985).

3. A. Luczak, *Laws of large numbers in von Neumann algebras and related results*, Studia Math., T. LXXXI (1985), 231-243.

4. R. Nelson, *Notes on non-commutative integration*, J. Functional Analysis, **15** (1974), 103-116.

5. Nguyễn Văn Quảng và Nguyễn Duy Tiến, *Luật yếu số lớn đối với martingale hiệu trên đại số von Neumann*, Tạp chí Toán học, T. XVIII (1990), no. 1, 1-5.

Faculty of Mathematics
Pedagogical College of Vinh
Nghe An, Vietnam

Received February 2, 1991