Journal of Mathematics

Tạp chí Toán học **21***(3 & 4)(1993), 35–45*

ƯỚC GIÁ HỮU HIỆU ĐỘ ĐO ĐỘC LẬP ĐẠI SỐ ĐỐI VỚI TRƯỜNG K CỦA CÁC GIÁ TRỊ CỦA CÁC KE - HÀM SỐ

NGUYỄN TIẾN TÀI

Abstract. *In this paper we establish some estimates of algebraic independence measures* $\phi_K^0(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi); s; H)$ *and* $\phi_K(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi); s; H)$, *where the functions* $f_1(z), \dots, f_m(z)$ *belong to the class* $KE(\lambda, c; \mu, q)$ *and at the same time they are the solution of a system of linear differential equations.*

Giả sử K là mở rộng hữu hạn của trường các số hữu tỉ Q, $k = [K : Q]$, Z_K là vành các số nguyên của trường K.

Độ đo độc lập đại số thuần nhất đối với K của các số $\xi_1, \dots, \xi_m$ là hàm

$$\phi_K^0(\xi_1, \dots, \xi_m; s; H) = \min \left|P(\xi_1, \dots, \xi_m)\right|.$$

Ở đây minimum bên phải lấy theo tất cả các đa thức thuần nhất $P = P(x_1, \dots, x_m) \in Z_k[x_1, \dots, x_m]$ sao cho: $\deg P \le s$. $H_p \le H$ (H_p - độ cao của đa thức P).

Tương tự, độ đo độc lập đại số đối với K của các số $\xi_1, \dots, \xi_m$ là hàm

$$\phi_K(\xi_1, \dots, \xi_m; s; H) = \min \left|P(\xi_1, \dots, \xi_m)\right|.$$

Ở đây $P = P(x_1, \dots, x_m) \in Z_K[x_1, \dots, x_m]$, $\deg P \le s$, $H_P \le H$.

Trong công trình [2] Shidlovskii đã cho một ước giá hữu hiệu độ đo độc lập đại số đối với trường K của các giá trị các KE - hàm số, trong trường hợp K là một trường bậc 2 ảo.

Đặc biệt Shidlovskii đã chỉ ra rằng khi tích lũy thừa các hàm đang xét lập nên một hệ bất khả quy các hàm thì ta nhận được sự ước giá hữu hiệu hoàn toàn.

Trong bài này chúng tôi sẽ thiết lập các kết quả tương tự trong trường hợp K là một trường đại số bậc hữu hạn tùy ý. Cũng cần nói thêm rằng những kết quả phụ cần cho sự ước giá đã được Shidlovskii chứng minh tổng quát cho một trường đại số K tùy ý. Điều đó đã được chúng tôi sử dụng trong bài này. Tuy nhiên ở khâu cuối cùng của kỹ thuật chứng minh thì có sự khác nhau cơ bản giữa trường bậc 2 ảo và trường đại số K. Do vậy kết quả đạt được của chúng tôi không được tối ưu như của Shidlovskii trong trường hợp ông đã xét.

Xét các KE - hàm số

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) \tag{1}$$

thuộc lớp KE $(\lambda, c; \mu, q)$ (xem [2]) và là nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$y_k' = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i; \quad Q_{k,i} \in C(z), \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

hay hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$y_k' = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, \quad Q_{k,i} \in C(z), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Theo Bổ đề 10 [3] ta có thể coi rằng các hàm hữu tỉ $Q_{k,i}$ trong hệ (2) hoặc (3) có hệ số thuộc trường K. Ký hiệu $T = T(z) \in Z_k[z]$ là bội chung nhỏ nhất của các mẫu số của các hàm hữu tỉ $Q_{k,i}$ sao cho $T(z)$, $Q_{k,i}(z) \in Z_k[z]$. Các không điểm của $T(z)$ là các điểm kỳ dị của hệ (2) hoặc (3).

Số lớn nhất trong các bậc của các đa thức $T(z)$ và $T(z)Q_{k,i}(z)$ và số lớn nhất trong các mô đun của các hệ số của các đa thức này, cùng các liên hợp của chúng được gọi tương ứng là bậc và độ cao của hệ phương trình (2) hoặc (3).

Ký hiệu t và h là bậc và độ cao của hệ (2), p là số nhỏ nhất trong các bậc không điểm của các hàm số (1) tại điểm $z = 0$.

Giả thiết rằng các hàm số (1) là nghiệm của hệ phương trình (2) và độc lập đại số thuần nhất trên $C(z)$ (xem [3]). Khi đó tập hợp L_N các tích lũy thừa

$$f_m^{k_m}(z) \ldots f_1^{k_1}(z),$$

$$k_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = N \tag{4}$$

với bất kỳ số tự nhiên N, là một hệ thống các hàm độc lập tuyến tính trên $C(z)$.

Đã biết rằng, các hàm (4) thuộc lớp $KE\ (\lambda^N, CN; \mu^{mN}, q^m)$ (xem Bổ đề 6 [2]) và là nghiệm của hệ phương trình vi phân dạng (2) V_N nào đó (xem Bổ đề 12 [3]).

Bậc và độ cao của hệ V_N tương ứng là t và Nh. Các điểm kỳ dị của hệ V_N vẫn là những điểm kỳ dị của hệ (2). Số nhỏ nhất trong các bậc không điểm của các hàm (4) tại $z = 0$ là p^N.

Đánh số lại các hàm (4) theo một thứ tự tùy ý và ký hiệu chúng là:

$$v_1(z), \ldots, v_M(z),$$

$$M = \frac{(N+1)\ldots(N+m-1)}{(m-1)!} = \frac{(N+m-1)!}{N!(m-1)!} \tag{5}$$

Giả sử $P = P(x_1, \ldots, x_m) \in Z_K[x_1, \ldots, x_m]$ là một đa thức thuần nhất, $\deg P = s$, $H(P) \leq H$.

Xét tập hợp các đa thức

$$f_m^{k_m} \ldots f_1^{k_1} \quad P(f_1, \ldots, f_m), \quad \text{với} \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = N - s, \tag{6}$$

và ký hiệu chúng là:

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{M_1}, \quad M_1 = \frac{(N-s+m-1)!}{(N-s)!(m-1)!} \tag{7}$$

Rõ ràng các đa thức (7) là những dạng tuyến tính của các hàm (5). Ta viết

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} v_j, \quad i = 1, \ldots, M_1. \tag{8}$$

Ở đây λ_{ij} là các hệ số của đa thức P, vì thế

$$|\overline{\lambda_{ij}}| \leq H \tag{9}$$

($|\overline{\lambda_{ij}}|$ ký hiệu số lớn nhất trong các mô đun của λ_{ij} và mô đun các liên hợp của nó)

Xây dựng theo Bổ đề 2 trong [2], với một giá trị n nào đó, dạng tuyến tính

$$R_1 = P_{11}v_1 + \dots P_{1M}v_M$$

của các hàm (5) với các hệ số là những đa thức thuộc $Z_K(z)$ bậc không vượt quá n.

Các dạng tuyến tính

$$R_k = TR'_{k-1} = P_{k1}v_1 + \cdots + P_{kM}v_M, \quad k = 2, 3, \dots,$$

được xây dựng từ dạng R_1 cũng như trong [4].

Theo Bổ đề 4 [2] với $n \geq n_0$ nếu $\xi \in K$, $\xi T(\xi) \neq 0$ thì giữa các dạng tuyến tính số

$$R_1(\xi), \dots, R_{M+t}(\xi), \quad t \in \boldsymbol{N}$$

có M dạng độc lập tuyến tính trên K, chẳng hạn đó là

$$R_{i_1}(\xi), \dots, R_{i_M}(\xi). \tag{10}$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 5 [2] ta có ước giá

$$\begin{gathered} \left|\overline{P_{j\ell}(\xi)}\right| < e^{\gamma_1\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}n^n, \\ \left|R_j(\xi)\right| < e^{\gamma_2\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}n^{-(M-1)n}, \\ \max \deg P_{j\ell}(z) \leq \gamma_3 n, \end{gathered} \tag{11}$$

ở đây γ_1, γ_2, γ_3 là những hằng số hữu hiệu, phụ thuộc vào lớp KE $(\lambda, c; \mu, q)$ và các số p, t, h, ξ và $q_0 = q^{m\ln(N+1)}$.

Rõ ràng, các dạng tuyến tính số

$$\psi_1(\xi), \dots, \psi_{M_1}(\xi) \tag{12}$$

độc lập tuyến tính. Vì thế giữa các dạng $R_{i_1}(\xi), \dots, R_{i_M}(\xi)$ tìm được $M - M_1$ dạng

$$R_{j_i}(\xi) = \sum_{k=1}^{M} P_{j_i,k}(\xi)v_k(\xi) \quad j_i \leq M + t, \quad i = M_1 + 1, \dots, M \tag{13}$$

mà đồng thời cùng với M_1 dạng tuyến tính (12) lập nên một hệ độc lập tuyến tính.

Ký hiệu $\Delta(\xi)$ là định thức của ma trận lập nên từ các hệ số của M dạng (12) và (13). Ta có $\Delta(\xi) \neq 0$.

Vì $\xi T(\xi) \neq 0$, nên có ít nhất một trong các số $v_1(\xi), \ldots, v_M(\xi) \neq 0$. Giả sử $v_1(\xi) \neq 0$. Từ các đẳng thức (12) và (13) ta có

$$\begin{aligned} v_1(\xi)\Delta(\xi) &= \Delta_1\psi_1(\xi) + \cdots + \Delta_{M_1}\psi_{M_1}(\xi) \\ &\quad + \Delta_{M_1+1}R_{j_{M_1+1}}(\xi) + \cdots + \Delta_M R_{j_M}(\xi), \end{aligned} \tag{14}$$

ở đây Δ_i $(i = 1, \ldots, M)$ là phần bù đại số của các phần tử ở cột thứ nhất của định thức $\Delta(\xi)$. Nhờ các ước giá (9) và (11) ta nhận được

$$\begin{aligned} &|\Delta_i(\xi)| < H^{M_1-1} e^{\gamma_4\omega\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{\omega n}, \quad i = 1, \ldots, M_1, \\ &|\Delta_{M_1+i}(\xi)| < H^{M_1} e^{\gamma_5(\omega-1)\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{n(\omega-1)}, \quad i = 1, \ldots, M - M_1, \\ &\qquad \omega = M - M_1. \end{aligned} \tag{15}$$

Từ (14) và (15) ta tìm được

$$|\Delta(\xi)| < H^{M_1} e^{\gamma_6\omega\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{\omega n}\left[\frac{|P(\xi)|}{H} + n^{-Mn}\right]. \tag{16}$$

Chọn số $c \neq 0$ sao cho $c\xi \in Z_K$, thì tồn tại hằng số γ_7 sao cho $c^{\gamma_7 n}\Delta(\xi) \in Z_K$ và vì $\Delta(\xi) \neq 0$, nên

$$|N(c^{\gamma_7 n}\Delta(\xi))| \geq 1. \tag{17}$$

Mặt khác từ (9) và (11) ta nhận được

$$\overline{|\Delta(\xi)|} < H^{M_1} e^{\gamma_8\omega\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{\omega n}. \tag{18}$$

Từ (16), (17), (18) ta đi đến:

$$1 \leq H^{M_1 k} e^{k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{k\omega n}\left[\frac{P(\xi)}{H} + n^{-Mn}\right].$$

Từ đó rút ra

$$\frac{|P(\xi)|}{H} H^{kM_1} e^{k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{k\omega n} \geq 1 - H^{kM_1} e^{k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{(k\omega - M)n}. \tag{19}$$

Bây giờ ta chọn N sao cho

$$\frac{M_1}{M} \geq \frac{2(k-1)}{2k-1} = 1 - \frac{1}{2k-1} \tag{20}$$

(chẳng hạn, $N = (m-1)(2k-1)s$). Khi đó ta được

$$M - k\omega \geq \frac{1}{2}M_1. \tag{21}$$

Còn số n được chọn là số nhỏ nhất thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$\begin{gathered} n \geq n_0; \quad \sqrt{\ln n} > \frac{1}{M_1} 4k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}M; \\ n^{\frac{1}{2}n} e^{-k\gamma_9 \frac{\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{M_1}} > 2H^k \end{gathered} \tag{22}$$

Từ các bất đẳng thức (19) đến (22) rút ra

$$|P(\xi)| \geq H^{1-kM_1} e^{-k\gamma_{10}\omega\sqrt{\ln 2cq_0 Mn\sqrt{\ln n}}} n^{-k\omega n} \tag{23}$$

Theo các điều kiện (22), từ số H nào đó trở đi sẽ hoàn thành điều kiện

$$(n-1)^{\frac{n-1}{2}} e^{-k\frac{\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}M(n-1)\sqrt{\ln (n-1)}}{M_1}} \leq 2H^k.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}n} e^{-k\frac{\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{M_1}} &\leq 2H^k \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{1/2} \\ &\times e^{\gamma_9 k\omega\sqrt{\ln 2cq_0}M\left(\frac{(n-1)\sqrt{\ln (n-1)} - n\sqrt{\ln n}}{M_1}\right)} \end{aligned}$$

hay

$$n^{\frac{1}{2}n} e^{-k\frac{\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{M_1}} < \gamma_{11} H^k n^{1/2}. \tag{24}$$

Logarít cả hai vế ta được

$$\frac{1}{2}n\ln n - \frac{k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{M_1} \leq \ln \gamma_{11} + k\ln H + \frac{1}{2}\ln n. \tag{25}$$

Từ (22) ta có

$$\frac{k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{M_1} = \frac{k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}M}{M_1\sqrt{\ln n}} n\ln n < \frac{1}{4}n\ln n.$$

Vì thế từ (25) rút ra

$$n\ln n < \gamma_{12} \ln H. \tag{26}$$

Từ (22), (24) và (26) ta được

$$2H^k < n^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{k\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{M_1}} < \gamma_{13} H^k \ln^{1/2} H \tag{27}$$

và

$$\ln\ln(H+2) > \gamma_{14}\ln n.$$

Bây giờ ta ước giá đại lượng

$$e^{-k\gamma_{10}\sqrt{\ln 2cq_0}\ \omega Mn\ \sqrt{\ln n}} n^{-k\omega n}.$$

Theo (27) ta có

$$\begin{aligned} & n^{-k\omega n} e^{-k\gamma_{10}\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}} \\ &= \left(n^{(1/2)n} e^{-k\frac{\gamma_9\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{M_1}}\right)^{-2k\omega} e^{-k\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}\left(\gamma_{10}+\frac{2k\gamma_9\omega}{M_1}\right)} \\ &\geq \gamma_{15} H^{-2k^2\omega}\left(\ln^{1/2} H\right)^{-2k\omega} e^{-k\gamma_{16}\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}\left(1+\frac{2k\omega}{M_1}\right)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Theo (21), $M \geq \frac{1}{2}M_1 + k\omega$ hay $\dfrac{2M}{M_1} \geq 1 + \dfrac{2k\omega}{M_1}$, vì thế

$$e^{-k\gamma_{16}\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}\left(1+\frac{2k\omega}{M_1}\right)} \geq e^{-\frac{2k\gamma_{16}\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{(M_1/M)}}$$

Nhưng

$$\frac{M_1}{M} \geq \frac{2(k-1)}{2k-1} > \frac{k-1}{k},$$

nên ta có

$$\begin{aligned} e^{-k\gamma_{16}\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}\left(1+\frac{2k\omega}{M_1}\right)} &\geq e^{-\frac{2k^2\gamma_{10}\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}}{(k-1)}} \\ &\geq e^{-\gamma_{17}k\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}} \end{aligned}$$

và nhờ bất đẳng thức (26) ta có thể viết tiếp

$$e^{-k\gamma_{16}\omega\sqrt{\ln 2cq_0}Mn\sqrt{\ln n}\left(1+\frac{2k\omega}{M_1}\right)} \geq H^{-\gamma_{18}\frac{k\omega\sqrt{\ln 2cq_0}M}{\sqrt{\ln n}}} \tag{29}$$

Từ (23), (28), (29) ta nhận được

$$\left|P(\xi)\right| \geq H^{1-kM_1-2k^2\omega-\frac{\gamma_{18}k\omega\sqrt{\ln 2cq_0}M}{\sqrt{\ln n}}}.$$

Chọn n sao cho các điều kiện (22) và điều kiện sau thỏa mãn

$$\sqrt{\ln n} \geq \gamma_{18}k\omega\sqrt{\ln 2cq_0}M \tag{30}$$

ta nhận được

$$\left|P(\xi)\right| \geq H^{-kM_1-2k^2\omega} = H^{-2k\left(\frac{1}{2}M_1+k\omega\right)},$$

hay theo (21),

$$\left|P(\xi)\right| \geq H^{-2kM}. \tag{31}$$

Như vậy với $\ln\ln(H+2) \geq \gamma_{14}\ln n$ và với n thỏa mãn các điều kiện (22) và (30) ta có ước giá (31).

Trong trường hợp tổng quát theo định lý của Nesterenko (Định lý 3 [1]) và hệ quả của nó (Bổ đề 8 [2]) có thể chọn n_0 như sau:

$$n_0 = \Omega(m)N^{(m+1)^{m+1}+m+1},$$

trong đó $\Omega(m)$ là hằng số phụ thuộc m.

Từ bất đẳng thức (22) và (30) rút ra rằng với

$$\ln\ln(H+2) \geq \max\left(\gamma_{18}^2k^2\omega^2M^2m\ln(N+1),\ \gamma_{14}(\ln N+\ln\Omega(m))\right),$$

hay nói cách khác, với điều kiện

$$\ln\ln(H+2) \geq \Omega(m)k^2\omega^2M^2m\ln(N+1), \tag{32}$$

sẽ xảy ra bất đẳng thức (31). Nhưng theo (21) thì

$$M-(2k-1)\omega \geq 0 \quad \text{hay} \quad \omega \leq \frac{M}{2k-1}.$$

Vì thế điều kiện (32) có thể viết thành

$$\ln\ln(H+2) \geq \Omega(m)M^4m\ln(N+1) \tag{33}$$

Trong trường hợp tập hợp các hàm số (4) lập thành một hệ bất khả quy (xem [2]) thì có thể chọn

$$n_0 = P^N + t\frac{M(M-1)}{2}$$

(xem Bổ đề 4 [4]), khi đó bất đẳng thức (31) xảy ra với điều kiện

$$\ln\ln(H+2) \geq \gamma_{18}k^2\omega^2M^2m\ln(N+1),$$

hay với điều kiện (cũng biến đổi như trên)

$$\ln\ln(H+2) \geq \gamma M^4 m\ln(N+1). \qquad (34)$$

(Chú ý trong trường hợp này hằng số γ hữu hiệu và không phụ thuộc m).

Chú ý rằng

$$M = \frac{1}{(m-1)}(N+1)\ldots(N+m-1) \leq \frac{1}{(m-1)!}(N+m-1)^{m-1}$$

và theo (20), $N = (m-1)(2k-1)s$, nên ta có

$$M \leq \frac{1}{(m-1)!}\left[(m-1)(2k-1)s + (m-1)\right]^{m-1} \leq \frac{\left[2(m-1)ks\right]^{m-1}}{(m-1)!},$$

vì vậy bất đẳng thức (33) có thể viết thành

$$\ln\ln(H+2) \geq \Omega(m)\frac{\left[2k(m-1)s\right]^{4(m-1)}m\ln s}{\left[(m-1)!\right]^4}.$$

Bất đẳng thức (34) cũng được viết tương tự với $\Omega(m) = \gamma$.

Trong trường hợp $\ln\ln(H+2) < \Omega(m)\dfrac{[2k(m-1)s]^{4(m-1)}m\ln s}{[(m-1)!]^4}$ từ $H <$ $\exp\exp\Omega(m)\dfrac{[2k(m-1)s]^{4(m-1)}m\ln s}{[(m-1)!]^4}$ suy ra

$$\phi_K^0(f_1(\xi),\ldots,f_m(\xi);s;H)$$

$$\geq \phi_K^0\Big(f_1(\xi),\ldots,f_m(\xi);s;\exp\exp\Omega(m)\frac{[2k(m-1)s]^{4(m-1)}m\ln s}{[(m-1)!]^4}\Big).$$

Vì thế ta có định lý sau

Định lý. *Giả sử tập hợp các KE - hàm số $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ $(m \geq 2)$ thuộc vào lớp KE $(\lambda, c; \mu, q)$ thỏa mãn hệ phương trình vi phân (2) và độc lập đại số thuần nhất trên $C(z)$. Giả sử $\xi \in K$, $\xi T(\xi) \neq 0$. Khi đó xảy ra sự ước giá sau:*

$$\phi_K^0\big(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi); s; H\big) > CH^{-\frac{2^m k^m (m-1)^{m-1} s^{m-1}}{(m-1)!}}$$

ở đây

$$c = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \rho < 1, \\ \exp\left\{ -\frac{2^m k^m (m-1)^{m-1} s^{m-1}}{(m-1)!} \exp \Omega(m) \frac{[2k(m-1)s]^{4m-4}}{[(m-1)!]^4} m \ln s \right\} & \text{nếu } \rho \geq 1 \end{cases}$$

với

$$\rho = \frac{\Omega(m)[2k(m-1)s]^{4(m-1)} m \ln s}{[(m-1)!]^4 \ln\ln(H+2)},$$

$\Omega(m)$ là một hằng số dương chỉ phụ thuộc vào trường K, các hàm số (1) và hệ phương trình (2). Trong trường hợp tập hợp các hàm số (4) với bất kỳ $N = 1, 2, \ldots$ lập nên hệ bất khả quy các hàm số thì $\Omega(m) = \gamma$ là một hằng số hữu hiệu phụ thuộc vào lớp KE $(\lambda, c; \mu, q)$ và các số p, t, k và ξ.

Từ định lý trên dễ dàng nhận được kết quả tương tự đối với độ đo độc lập đại số

$$\phi_K\big(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi); s; H\big)$$

trong trường hợp các hàm số (1) độc lập đại số và thỏa mãn hệ phương trình vi phân (3). Thật vậy, khi đó thay cho m hàm số (1) ta xét $m+1$ hàm số sau:

$$1, f_1(z), \ldots, f_m(z).$$

Rõ ràng rằng các hàm số này thỏa mãn các điều kiện của định lý trên và độ đo độc lập đại số thuần nhất của chúng là độ đo độc lập đại số của các hàm (1), vì thế trong kết luận của định lý trên ta chỉ việc thay m bởi $m+1$ sẽ nhận được sự ước giá cận dưới của

$$\phi_K\big(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi); s; H\big).$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Yu. V. Nesterenko, *Estimates for the order of zero of some functions and their applications in the theory of transcendental numbers*, Izv. Acad. Nauk SSSR, **41** (1977), 253-284 (Russian).

2. A. B. Shidlovskii, *On the estimates of the algebraic independence measures of the values of E-functions*, J. Austral . Math. Soc. **27** (1979), 385-407.

3. ———— , *On the criterion of algebraic independence for the values of some entire functions*, Izv. Acad. Nauk SSSR, **23** (1959), 35-66 (Russian).

4. ———— , *On the transcendence and algebraic independence of the values of some entire functions*, Uch. Zapiski M. G. U., 186 Math. 9 (1959), 11-70 (Russian).

Department of Mathematics
Hanoi Pedagogical Institute I,
Hanoi, Vietnam

Received January 25, 1991
Revised June 20, 1993