

Bài Giảng Chuyên đề Tổ hợp

Bài toán trò chơi và phương pháp tính số các trường hợp

Phan Thị Hà Dương - Viện Toán học

Ngày 31 tháng 3 năm 2012

- I.A. Tìm đồng xu giả nhẹ hơn đồng xu thật**
1. Cho 9 đồng xu giống hệt nhau, trong đó có 1 đồng giả (các đồng thật đều có khối lượng chuẩn, đồng giả nhẹ hơn đồng thật). Hỏi sau 2 lần cân có thể phát hiện ra đồng giả được không ?
 2. Tổng quát: cho m đồng xu giống hệt nhau, trong đó có 1 đồng giả, và được phép cân n lần. Hỏi số m lớn nhất có thể là bao nhiêu để có thể phát hiện ra đồng xu giả ?

- I.B. Tìm đồng xu giả nhẹ hơn hoặc nặng hơn đồng xu thật**
1. (Bài toán gốc) Cho 12 đồng xu giống hệt nhau, trong đó có 1 đồng giả (các đồng thật đều có khối lượng chuẩn, đồng giả nhẹ hơn hoặc nặng hơn đồng thật). Hỏi sau 3 lần cân có thể phát hiện ra đồng giả và cho biết đồng giả nhẹ hơn hay nặng hơn đồng thật được không ?
 2. (Bài toán đơn giản hơn) Cho 4 đồng xu giống hệt nhau, trong đó có 1 đồng giả (các đồng thật đều có khối lượng chuẩn, đồng giả nhẹ hơn hoặc nặng hơn đồng thật). Hỏi sau 2 lần cân có thể phát hiện ra đồng giả được không ?
 3. Cho 4 đồng xu giống hệt nhau, trong đó có 1 đồng giả (các đồng thật đều có khối lượng chuẩn, đồng giả nhẹ hơn hoặc nặng hơn đồng thật). Hỏi sau 2 lần cân có thể phát hiện ra đồng giả và cho biết đồng giả nhẹ hơn hay nặng hơn đồng thật được không ?
 4. Câu hỏi tương tự cho 14 đồng xu.
 5. Câu hỏi tương tự cho 13 đồng xu.
 6. (Bài toán gốc ở dạng khó hơn) Trình bày cách cân 3 lần để tìm đồng giả và cho biết nó nhẹ hơn hay nặng hơn đồng thật trong đồng 12 đồng xu, hơn nữa các lần cân không phụ thuộc vào nhau.
 7. (Bài toán tổng quát) Tìm số đồng xu tối đa để sau n lần cân có thể tìm được đồng giả và cho biết nó nhẹ hơn hay nặng hơn đồng thật.

II. Câu trả lời Đúng/ Sai Có ba thầy giáo: thầy Vinh luôn nói thật, thầy Vương luôn nói ngược, và thầy Khôi tùy hứng. Hãy hỏi ba câu hỏi mà câu trả lời chỉ là Đúng hoặc Sai (mỗi lần hỏi được phép chọn một thầy nào đó trả lời, có thể chọn đi chọn lại một thầy) để biết tên của từng thầy.

III. Bài toán sắp xếp Có một số viên ngọc khối lượng đôi một khác nhau, và không có cách chọn hai nhóm ngọc nào sao cho tổng khối lượng các viên ngọc trong hai nhóm

bằng nhau. Mục đích bài toán là thực hiện ít lần cân nhất để dựa vào đó có thể sắp xếp các viên ngọc theo thứ tự khối lượng tăng dần.

1. Nếu có 4 viên ngọc, chứng minh rằng 4 lần cân là không đủ.
2. Nếu có 4 viên ngọc, tìm số lần cân nhỏ nhất có thể được.
3. Chứng minh rằng nếu có 8 viên ngọc thì 15 lần cân là không đủ. Tìm một cách thực hiện với 17 lần cân.
4. Chứng minh rằng nếu có 2^n ($n > 0$) viên ngọc thì $(n - 1)2^n + 1$ lần cân là đủ.

Có 6 bạn học sinh có chiều cao khác nhau đang xếp hàng dọc. Một thầy bói mù phải xếp các bạn đứng lại theo thứ tự cao dần. Mỗi lần thầy bói chọn ra 2 bạn và đo xem ai cao hơn, sau đó thầy sẽ yêu cầu một số bạn trong hàng thay đổi vị trí.

- a) Chứng minh rằng nếu thầy bói chỉ gọi 9 cặp bạn ra như vậy thì không thể sắp xếp các bạn theo thứ tự cao dần được.
- b) Thầy bói có thể thực hiện việc sắp xếp này nếu gọi 11 cặp bạn ra đo hay không?

Tương tự bài toán trên với 7 bạn, có thể thực hiện việc sắp xếp với 14 lần gọi các cặp bạn ra hay không?

IV. Bài toán trộn Cho hai dãy số $a = (a_1, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, \dots, b_n)$ sắp xếp theo thứ tự tăng dần và tất cả $2n$ số này đều đôi một khác nhau. Mục đích của bài toán là tạo nên một dãy số theo thứ tự tăng dần từ $2n$ số này bằng cách thực hiện các phép so sánh các cặp số với nhau.

1. Chỉ ra một cách thực hiện bằng $2n - 1$ phép so sánh.
2. Chứng minh rằng trong trường hợp $n = 1, 2, 3, 4$ thì $2n - 1$ là số tối thiểu các phép so sánh cần làm.