

ĐỀ THI Ngày thi thứ hai

Thời gian: 180 phút

Bài 5 (7 điểm). Cho f là một đa thức bậc ≥ 2 với hệ số nguyên và $f'(0) = 0$. Gọi (a_n) là dãy được cho bởi $a_1 = f(0)$ và $a_{n+1} = f(a_n)$ với mọi $n \geq 1$. Giả sử $a_n \neq 0$ với mọi n . Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p , tồn tại một số nguyên dương e_p với tính chất sau: với mọi n , thì hoặc $p \nmid a_n$ hoặc $p^{e_p} \mid a_n$ nhưng $p^{e_p+1} \nmid a_n$.

Bài 6 (7 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I là trung điểm BC và H là trực tâm ΔABC . Cho BH, CH cắt AC, AB tại E, F ; tia IH cắt đường tròn (O) tại T . Trên đường thẳng EF lấy điểm D sao cho DH song song với BC .

- a. Chứng minh DT tiếp xúc với đường tròn (HEF) .
- b. Gọi M, N lần lượt là các giao điểm của đường thẳng EF với các đường tròn $(IBT), (ICT)$ (điểm M khác phía E đối với F , điểm N khác phía F đối với E). Gọi P là giao điểm của AM với đường tròn (O) .
Chứng minh BM, CN và TP đồng quy.

Bài 7 (6 điểm). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , đa thức

$$\sum_{k=0}^n 2^{k(n-k)} x^k$$

có đúng n nghiệm thực.