

ĐỀ THI
Ngày thi thứ nhất

Thời gian: 180 phút

Bài 1 (5 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 29, \quad x_{n+1} = \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, \quad \text{với mọi } n > 0.$$

Tính $\lim_n(x_{n+1} - x_n)$.

Bài 2 (5 điểm). Cho các số thực dương a_0, \dots, a_n sao cho $a_{k+1} - a_k \geq 1$ với $k = 0, 1, \dots, n-1$. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right) \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Bài 3 (5 điểm). Cho một bảng ô vuông hình chữ nhật cỡ $m \times n$ ($m, n \geq 2$). Tô màu đen một số ô của bảng đó. Hỏi có bao nhiêu cách tô sao cho trong bất kỳ hàng nào và cột nào cũng có một số chẵn (có thể bằng 0) các ô đen?

Bài 4 (5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có D, E, F tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Ký hiệu (I) là đường tròn đường kính AD (I là trung điểm AD). Đường tròn (I) cắt các cạnh AB, AC tại M, N . Cho MN cắt EF tại P .

- a. Chứng minh đường tròn (DIP) đi qua trung điểm Q của MN .
- b. Cho G là một điểm cố định trên đoạn EF . Một đường thẳng thay đổi qua G cắt (I) tại K, H ; cho KF, HE cắt (I) tại R, S . Chứng minh trung điểm T của RS thuộc một đường tròn cố định.