# ĐÁP ÁN ĐỀ THI
# **Ngày thi thứ hai**

*Thời gian: 180 phút*

**Bài 5** (7 điểm). Nếu $p$ không là ước nguyên tố của bất kì $a_n$ nào thì ta có thể chọn $e_p$ bất kì và bài toán được chứng minh. Giả sử ngược lại, $p$ là một ước nguyên tố của ít nhất một trong các số $a_n$. Gọi $k$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $p \mid a_k$. Gọi $e = e_p =$ số mũ của $p$ trong $a_k$. Ta chứng minh rằng với mọi $n$ thì hoặc $p \nmid a_n$ hoặc $p^e || a_n$. (Kí hiệu $p^e || a_n$ có nghĩa là $p$ xuất hiện với số mũ $e$ trong $a_n$).

Trước hết ta chỉ ra bằng qui nạp theo $i \geq 1$ rằng

$$a_{k+i} \equiv a_i \pmod{p^{2e}}.$$

Viết

$$f(x) = c_0 + \sum_{j=2}^{d} c_j x^j = a_1 + x^2 \left( \sum_{j=2}^{d} c_j x^{j-2} \right),$$

(điều kiện $f'(0) = 0$ nói rằng luỹ thừa bậc nhất của $x$ không xuất hiện trong khai triển của $f$). Với $i = 1$ thì

$$a_{k+1} = f(a_k) = a_k^2 \left( \sum_{j \geq 2} c_j a_k^{j-2} \right) + a_1 \equiv a_1 \pmod{p^{2e}}.$$

Như vậy, $a_{k+1} \equiv a_1 \pmod{p^{2e}}$. Giả sử khẳng định đúng với $i$, nghĩa là $a_{k+i} \equiv a_i \pmod{p^{2e}}$. Từ đó suy ra $f(a_{k+i}) \equiv f(a_i) \pmod{p^{2e}}$, hay $a_{k+i+1} \equiv a_{i+1} \pmod{p^{2e}}$. Như vậy theo nguyên lý qui nạp thì khẳng định được chứng minh.

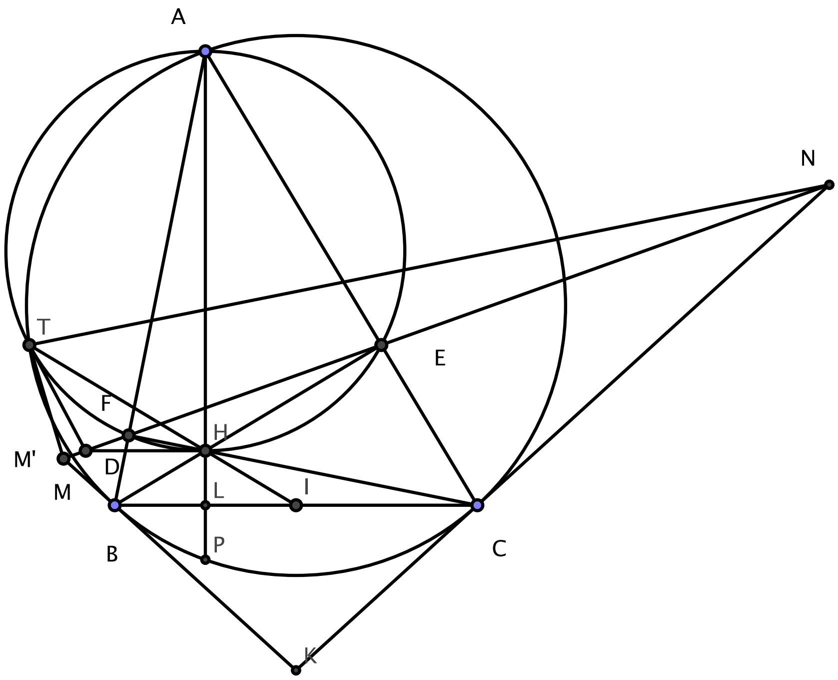
Bây giờ cố định số nguyên dương $n$ bất kì sao cho $p \mid a_n$. Viết $n = kq + i$ với $0 \leq i \leq k - 1$. Giả sử $i > 0$. Thế thì ta có

$$a_n \equiv a_{k(q-1)+i} \equiv \cdots \equiv a_i \pmod{p^{2e}}.$$

Nói riêng, $p \mid a_i$ với $i < k$, nhưng điều này mâu thuẫn với cách chọn của $k$. Như vậy, $i = 0$ và do đó $n = kq$. Thế nhưng đồng dư ở trên cũng nói rằng $a_n \equiv a_k \pmod{p^{2e}}$. Bởi vì $p^e || a_k$, đồng dư này cho thấy $p^e || a_n$. Bài toán được chứng minh.

**Bài 6** (7 điểm). (a) $DT$ tiếp xúc $(HEF)$.

Trước tiên $(HEF)$ là đường tròn đường kính $AH$ (ký hiệu là $[AH]$) và theo tính chất quen biết trong tam giác: "Đường thẳng $HI$ đi qua giao điểm $T' \neq A$ của $(O)$ và $[AH]$". Suy ra $T$ chính là giao điểm của $(O)$ và $[AH]$ ($T \neq A$). Để ý rằng $IF, IE$ chính là các tiếp tuyến với $[AH]$ nên tứ giác $TFHE$ là tứ giác điều hòa. Do đó $EF$ và các tiếp tuyến tại $T$ và $M$ đồng quy tại một điểm. Theo giả thiết, $DH$ là tiếp tuyến tại $M$, suy ra $DT$ là tiếp tuyến tại $T$.




(b) $BM, CN, TP$ đồng quy.

Trước hết, ta chứng minh $BM$ là tiếp tuyến tại $B$ của $(O)$. Giả sử tiếp tuyến tại $B$ cắt $EF$ tại $M'$. Để ý rằng các tam giác $IFB$ và $M'FB$ cân tại $I$ và $M'$ nên $IM$ là trung trực của $FB$. Suy ra $\widehat{IM'B} + \widehat{M'BF} = 90°$. Dẫn đến

$$\widehat{IM'B} + \widehat{ACB} = 90°.$$

Mặt khác, do $\widehat{BTA} + \widehat{ACB} = 180°$ và $\widehat{BTA} = \widehat{BTI} + 90°$ nên ta được

$$\widehat{BTI} + \widehat{ACB} = 90°.$$

Từ đây suy ra $\widehat{IM'B} = \widehat{BTI}$ nên $M'$ thuộc đường tròn $(IBT)$. Theo cách dựng điểm $M$, suy ra $M' \equiv M$. Vậy $BM$ là tiếp tuyến tại $B$ của $(O)$.

Tương tự $CN$ cũng là tiếp tuyến của $(O)$ tại $C$.

Gọi $K$ là giao điểm của $BM$ và $CN$. Không khó chứng minh được $\Delta TBC \sim \Delta TFE$. Để ý rằng $K$ là giao điểm của các tiếp tuyến tại $B$ và $C$ của $(TBC)$ cũng như $I$ là giao điểm của các tiếp tuyến tại $F$ và $E$ của $(TFE)$. Suy ra các tứ giác $TBKC$ và $TFIE$ đồng dạng. Suy ra $\widehat{BTK} = \widehat{FTI}$. Vì $\widehat{FTI} = \widehat{BAP}$ nên $\widehat{BTK} = \widehat{BAP}$, thành thử giao điểm của $TK$ với $(O)$ phải trùng với điểm $P$, nên $TK$ đi qua $P$.

Vậy $BM$, $CN$ và $TP$ đồng quy.

**Bài 7** (6 điểm)**.** Ký hiệu

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{k(n-k)} x^k.$$

Để chỉ ra đa thức $P_n(x)$ có đúng $n$ nghiệm thực, ta sẽ chỉ ra các số $(\neq 0)$

$$P_n(-2^{-n}), P_n(-2^{-n+2}), P_n(-2^{-n+4}), \ldots, P_n(-2^{n}),$$

luân phiên đổi dấu. Khi đó kết luận là hiển nhiên.

Với mỗi $j = 0, 1, \ldots, n$, nhóm các đơn thức trong đa thức $P_n(x)$ thành các tổng có dạng

$$\begin{aligned}P_n(x) = \cdots &+ 2^{(j-5)(n-j+5)}x^{j-5} + 2^{(j-4)(n-j+4)}x^{j-4}\\ &+ 2^{(j-3)(n-j+3)}x^{j-3} + 2^{(j-2)(n-j+2)}x^{j-2}\\ &+ 2^{(j-1)(n-j+1)}x^{j-1} + 2^{j(n-j)}x^{j} + 2^{(j+1)(n-j-1)}x^{j+1}\\ &+ 2^{(j+2)(n-j-2)}x^{j+2} + 2^{(j+3)(n-j-3)}x^{j+3}\\ &+ 2^{(j+4)(n-j-4)}x^{j+4} + 2^{(j-4)(n-j-5)}x^{j+5} + \cdots,\end{aligned}$$

Tùy vào tính chẵn lẻ của $j$ và $n-j$, có thể tổng đầu hoặc tổng cuối chỉ có một đơn thức.

Bây giờ thế giá trị $x = -2^{-n+2j}$ vào biểu thức của đa thức $P_n(x)$. Ta có

$$\begin{aligned}P_n(-2^{-n+2j}) = \cdots &+ (-1)^{j-4}(-2^{j^2-5^2} + 2^{j^2-4^2})\\ &+ (-1)^{j-2}(-2^{j^2-3^2} + 2^{j^2-2^2})\\ &+ 0\\ &+ (-1)^{j+2}(2^{j^2-2^2} - 2^{j^2-3^2})\\ &+ (-1)^{j+4}(2^{j^2-4^2} - 2^{j^2-5^2}) + \cdots\end{aligned}$$

Chú ý rằng nếu có tổng đầu hoặc cuối là một đơn thức thì giá trị của đơn thức đó có dấu là $(-1)^j$. Sắp xếp lại ta suy ra

$$\begin{aligned}P_n(-2^{-n+2j}) = (-1)^j \Big( \cdots &+ (2^{j^2-4^2} - 2^{j^2-5^2})\\ &+ (2^{j^2-2^2} - 2^{j^2-3^2})\\ &+ 0\\ &+ (2^{j^2-2^2} - 2^{j^2-3^2})\\ &+ (2^{j^2-4^2} - 2^{j^2-5^2}) + \cdots \Big).\end{aligned}$$

Như vậy $P(-2^{-n+2j})$ mang dấu của $(-1)^j$. Hệ quả là các giá trị $P(-2^{-n+2j})$ đổi dấu liên tục khi $j$ thay đổi từ $0, 1, \ldots, n$.