ĐÁP ÁN ĐỀ THI
Ngày thi thứ nhất

Thời gian: 180 phút

Bài 1 (5 điểm). Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ công thức truy hồi ta có

$$x_{n+1}^{11} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + x_n = x_n^{11} + x_n,$$

với mọi $n \geq 2$. Từ đó suy ra $x_{n+1}^{11} > x_n^{11}$, suy ra $x_{n+1} > x_n$ với mọi $n \geq 2$. Như vậy dãy (x_n) là dãy tăng kể từ số hạng thứ hai.

Giả sử (x_n) bị chặn trên thì tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_n x_n = a$, với a là nghiệm của phương trình

$$a^{11} = a^{11} + a, \text{ hay } a = 0.$$

Điều này là vô lý vì (x_n) là dãy các số dương tăng. Do đó (x_n) không bị chặn trên và $\lim_n x_n = +\infty$.

Từ đẳng thức $x_{n+1}^{11} - x_n^{11} = x_n$ ta suy ra

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1}^{10} + x_{n+1}^9 x_n + \ldots + x_{n+1} x_n^9 + x_n^{10}) = x_n.$$

Do đó

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{x_{n+1}^{10} + x_{n+1}^9 x_n + \ldots + x_{n+1} x_n^9 + x_n^{10}} < \frac{x_n}{11 x_n^{10}},$$

vì $0 < x_n < x_{n+1}$ với mọi $n \geq 2$. Từ đó suy ra

$$0 < x_{n+1} - x_n < \frac{1}{11 x_n^9}.$$

Vế phải là dãy số tiến tới 0 khi n tiến ra vô cùng. Vậy

$$\lim_n (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Bài 2 (5 điểm). Quy nạp theo n. Dễ chứng minh bất đẳng thức cho $n = 0, 1$ từ giả thiết $a_1 - a_0 \geq 1$ bằng biến đổi đại số.

Xét $n \geq 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng đến n. Ta chứng minh cho $n + 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh là tổng của hai bất đẳng thức

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

và

$$\frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \frac{1}{a_{n+1} - a_0} \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Như vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cuối này là đủ. Để chứng minh bất đẳng thức này, một lần nữa ta sử dụng quy nạp theo n. Trường hợp $n = 0$ được chứng minh dễ dàng do giả thiết $a_1 - a_0 \geq 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng đến n với $n \geq 0$. Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\frac{1}{a_{n+2}-a_0} \leq \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{a_{n+1}}.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ giả thiết quy nạp cho n và bất đẳng thức sau

$$\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\frac{a_{n+1}-a_0}{a_{n+2}-a_0} \leq \left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}.$$

Bất đẳng thức cuối dễ dàng được suy ra từ giả thiết $a_{n+2} - a_{n+1} \geq 1$ bằng biến đổi đại số đơn giản.

Bài 3 (5 điểm)**.** Ta sẽ chứng minh rằng có một song ánh giữa tập các bảng cỡ $(m-1)\times(n-1)$ với một vài ô tùy ý được tô màu đen và tập các bảng cỡ $m \times n$ thỏa mãn đề bài.

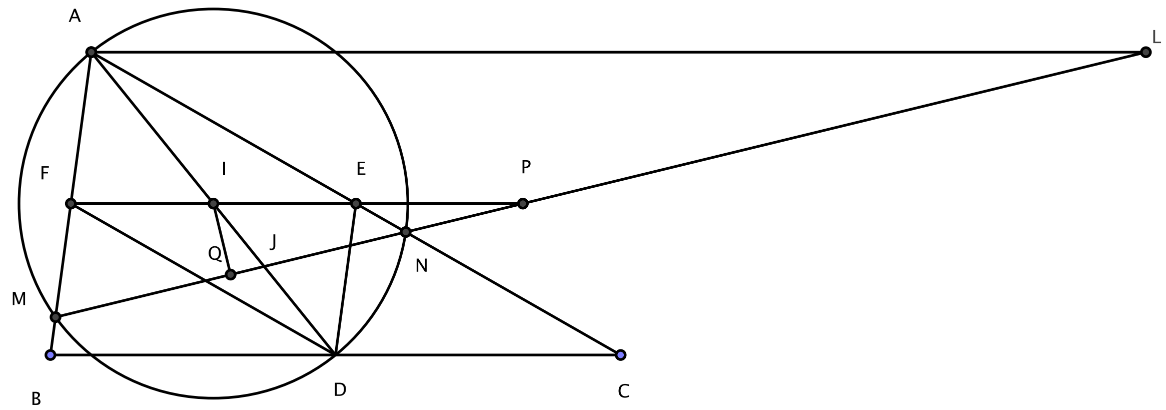
Từ bảng cỡ $(m-1)\times(n-1)$ ta nhận thấy chỉ có duy nhất 1 cách ghép thêm 1 cột gồm $(m-1)$ ô vào bên phải bảng sao cho tất cả các hàng đều có một số chẵn các ô đen: Nếu hàng đó đã có một số chẵn các ô đen thì ta ghép thêm ô trống, còn nếu có lẻ các ô đen thì ta ghép thêm ô đen. Bảng mới nhận được có kích thước $(m-1)\times n$. Tương tự như vậy có duy nhất 1 cách để ghép thêm 1 hàng gồm n ô vào cuối sao cho tất cả các cột đều một số chẵn các ô đen.

Ta cần chứng tỏ rằng hàng mới thêm vào cũng có một số chẵn các ô đen. Vì số các ô đen thêm vào bằng số các cột có một số lẻ các ô đen, tức là cùng tính chẵn lẻ với tổng số ô đen trong bảng cỡ $(m-1)\times n$ nhận được từ bước trước. Nhưng do trong bảng này các hàng đều có một số chẵn các ô đen nên tổng số các ô đen là chẵn. Vậy hàng cuối cùng thêm vào cũng có một số chẵn ô đen.

Dễ nhận thấy phép xây dựng trên là song ánh. Ánh xạ ngược xây dựng bằng cách bỏ đi hàng cuối và cột cuối từ một bảng cỡ $m \times n$ thỏa mãn đề bài.

Như vậy số các bảng thỏa mãn đề bài là $2^{(m-1)(n-1)}$.

Bài 4 (5 điểm). (a) (DIP) đi qua trung điểm Q của MN.



Kẻ đường thẳng qua A, song song với EF và cắt MN tại L thì $A(B,C,D,L)=-1$. Gọi J là giao điểm AD với MN thì $(M,N,J,L)=-1$. Suy ra

$$\overline{JM}.\overline{JN}=\overline{JQ}.\overline{JL}\text{ (Maclauren)}.$$

Để ý rằng $\overline{JM}.\overline{JN}=\overline{JA}.\overline{JD}$ là phương tích điểm J. Do đó

$$\overline{JA}.\overline{JD}=\overline{JQ}.\overline{JL},$$

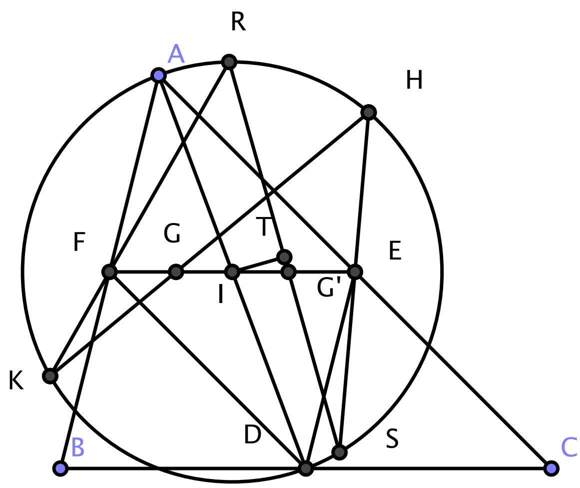
nên tứ giác $QALD$ nội tiếp. Mà IP song song với AL, thành thử tứ giác $QIPD$ nội tiếp.

Vậy (DIP) đi qua Q.

(b) Trung điểm T của RS thuộc đường tròn cố định.

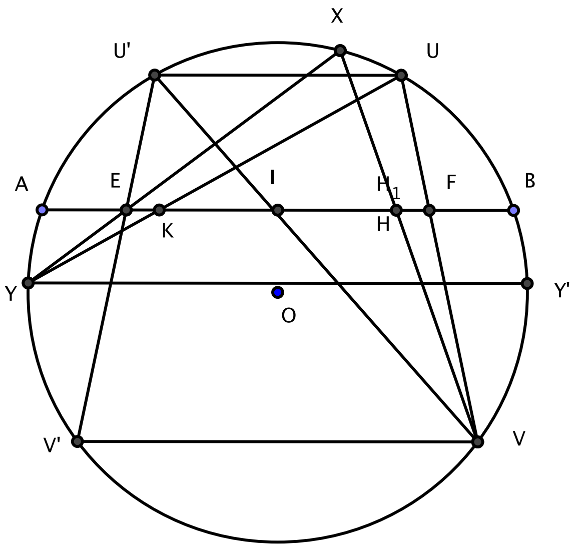
Gọi G' là giao điểm của RS với EF. Ta chứng minh I là trung điểm GG', suy ra điểm G' là cố định. Trung điểm T của RS do đó luôn thuộc đường tròn cố định có đường kính IG'.

Để chứng minh I là trung điểm của GG' ta sử dụng bổ đề sau



Bổ đề. Cho E, F là hai điểm trên dây cung AB của đường tròn (O) sao cho trung điểm I của AB cũng là trung điểm của EF. Cho XY, UV lần lượt là các dây cung đi qua E, F. XU, YV cắt AB lần lượt tại H, K. Lúc đó I cũng là trung điểm của HK.

Chứng minh bổ đề. .



Vẽ UU', VV', YY' song song với AB. Ta có $U'V'$ đi qua E. Gọi H_1 là giao điểm của XV với $U'Y'$. Ta có

$$\widehat{U'H_1X} = \widehat{U'EX} \text{ (góc chắn cung bằng nhau).}$$

Do đó tứ giác $EU'XH_1$ nội tiếp.

Mặt khác, $EU'XH$ cũng là tứ giác nội tiếp do $U'XVV'$ nội tiếp và EM song song với UU'. Do đó H, H_1 đều thuộc $(EU'X)$ và đường thẳng XV. Để ý $H, H_1 \neq X$ nên $H \equiv H_1$. Thành thử $U'Y'$ đi qua H và từ đây suy ra H, K đối xứng nhau qua I. Bổ đề do đó được chứng minh.

□