I. Các bài toán

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nuông tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp. BI, CI theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. D là hình chiếu của I trên BC. Dựng hình bình hành AIDS. Chứng minh rằng S thuộc EF.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, $AB > AC$, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. S là giao điểm của BC và EF. T là giao điểm thứ hai của AS và (O). M là trung điểm của BC. TM lại cắt (O) tại K.Các đường thẳng đi qua E, F và song song với AK theo thứ tự cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng AI là trục đẳng phương của các đường tròn (ABP), (ACQ).

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC có $AB \neq AC$ và $\widehat{BAC} > 45°$. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các hình vuông ABKL, ACMN. AL, AN theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. P là giao điểm thuộc tam giác ABC của các đường tròn (LME), (NFK). Chứng minh rằng đường tròn (PBC) đi qua tâm đường tròn (ABC).

Bài toán 4. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác A_1BC, B_1CA, C_1AB theo thứ tự vuông cân tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là ảnh đối xứng của A, B, C qua B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, $A_2B_2C_2$ đi qua trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Bài toán 5. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) và có một cặp cạnh đối không song song. Chứng minh rằng O là trọng tâm của ABCD khi và chỉ khi $OA.OC = OB.OD$.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. EF, FD, DE theo thứ tự giao với (O) bằng $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}, \{C_1, C_2\}$. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn (XA_1A_2), (YB_1B_2), (ZC_1C_2) thuộc OI.

Bài toán 7. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ theo thứ tự cắt đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ tại X, Y, Z, T. E, F theo thứ tự là trung điểm của XZ, YT. Chứng minh rằng

1) Tứ giác XYZT nội tiếp và $XZ \perp YT$.
2) O, E, F thẳng hàng.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ không đi qua A, B, C. Điểm O thuộc Δ và không thuộc BC, CA, AB. M, N, P theo thứ tự là giao điểm của các đường thẳng đối xứng với OA, OB, OC qua Δ và BC, CA, AB. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài toán 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm P thuôc tia đối của tia CA sao cho $\widehat{CBP}=\widehat{BPD}.$ Tính $\frac{PB}{PC}.$

Bài toán 10. Hai tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm và AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại O. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp sáu tam giác OBC_1, OB_1C, OCA_1, OC_1A, OAB_1, OA_1B cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC. P là trung điểm của BC. Lấy các điểm X, Y, Z sao cho sao cho A, X / BC; B / CA / Y; C / AB / Z và các tam giác XBC, YAC, ZBA đồng dạng. YZ theo thứ tự cắt AC, AB tại N, M. Chứng minh rằng $YN=ZM$ khi và chỉ khi $\widehat{PAB}=\widehat{XAC}.$

Bài toán 12. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB. Các đường tròn (AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1) theo thứ tự lại cắt (O) tại A_2, B_2, C_2. Tìm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(A_2B_2C_2)}$ nhỏ nhất.

Bài toán 13. Cho tứ giác ABCD, O = AC ∩ BD. Phân giác của các góc $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOA}$ theo thứ tự cắt AB, BC, CA, AD tại M, N, P, Q. X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm của QM, MN, NP, PQ. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy.

Bài toán 14. Cho tam giác ABC, trực tâm H. (S) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Điểm P thay đổi trên (S). Đường thẳng qua B vuông góc BA cắt PC tại M. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt PB tại N. Chứng minh rằng trung điểm MN thay đổi trên một đường thẳng cố định.

Bài toán 15. Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. YZ, ZX, XY theo thứ tự giao với (O) bằng $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}, \{C_1, C_2\}.$ Chứng minh rằng I là tâm đẳng phương của các đường tròn (DA_1A_2), (EB_1B_2), (FC_1C_2).

II. Các lời giải

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp. BI, CI theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. D là hình chiếu của I trên BC. Dựng hình bình hành AIDS. Chứng minh rằng S thuộc EF.

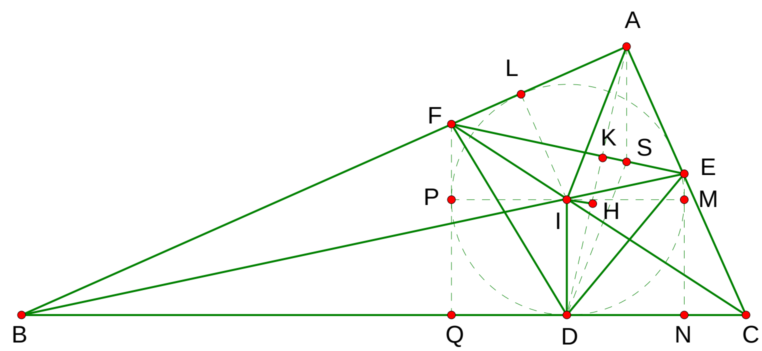
Lời giải 1.

Cách 1.

$$AE^2 - AF^2 = NE^2 - QF^2 = \left(DE^2 - DN^2\right) - \left(DF^2 - DQ^2\right)$$

$$= \left(DE^2 - IM^2\right) - \left(DF^2 - IP^2\right) = DE^2 - DF^2.$$

Do đó $AD \perp EF$.



(h.1.1)

Gọi K là giao điểm của EF và AD, H là hình chiếu của I trên AD.

Vì $AD \perp EF$ nên $KD^2 - KA^2 = ED^2 - EA^2 = ED^2 - EN^2 = DN^2 = IM^2 = r^2$ (1).

Mặt khác $HA^2 - HD^2 = IA^2 - ID^2 = IL^2 + LA^2 - ID^2 = LA^2 = r^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KA = HD$.

Do đó $\Delta SKA = \Delta IHD$ (c.g.c).

Vậy $\widehat{AKS} = \widehat{DHI} = 90° = \widehat{AKE}$.

Kết hợp với $AK \perp EF$, suy ra $S \in EK \equiv EF$.

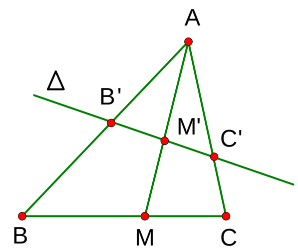
Lời giải 2.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc đoạn BC. Đường thẳng Δ theo thứ tự cắt các đoạn AB, AC, AM tại B', C', M'. Khi đó

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{MC}{BC}.\frac{AB}{AB'} + \frac{MB}{CB}.\frac{AC}{AC'}.$$

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày phép chứng minh ở đây (h.1.2).

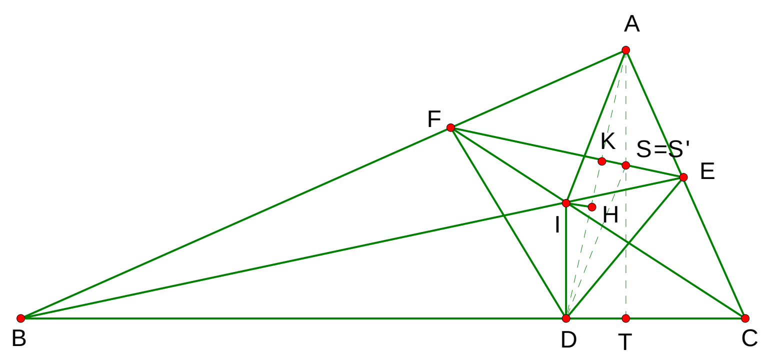


(h.1.2)

Trở lại giải bài toán 1.
Gọi T là hình chiếu của A trên BC; S' là giao điểm của AT và EF (h.1.3).
Theo bổ đề trên, chú ý rằng $\widehat{BAC}=90°$, ta có

$$\frac{AT}{AS'}=\frac{DC}{BC}.\frac{AB}{AF}+\frac{DB}{BC}.\frac{AC}{AE}=\frac{b^2}{a^2}.\frac{a+b}{b}+\frac{c^2}{a^2}.\frac{a+c}{c}=\frac{b(a+b)+c(a+c)}{a^2}$$
$$=\frac{a(a+b+c)}{a^2}=\frac{2S}{ar}=\frac{aAT}{r}=\frac{AT}{r}.$$

Do đó $AS'=r=ID$.



(h.1.3)

Điều đó có nghĩa là AIDS' là hình bình hành.
Vậy $S=S'\in EF$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, $AB>AC$, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. S là giao điểm của BC và EF. T là giao điểm thứ hai của AS và (O). M là trung điểm của BC. TM lại cắt (O) tại K.Các đường thẳng đi qua E, F và song song với AK theo thứ tự cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng AI là trục đẳng phương của các đường tròn (ABP), (ACQ).

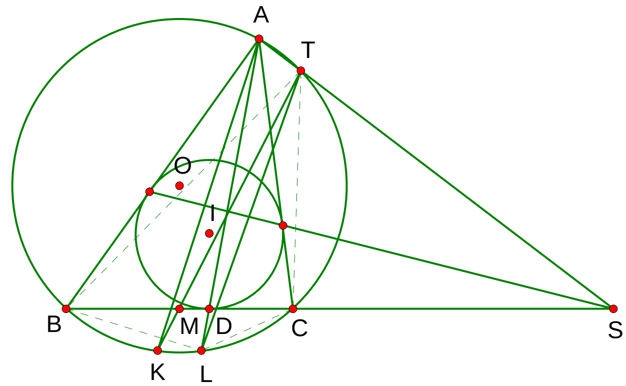
Lời giải.

Gọi L là giao điểm thứ hai của AD và (O); N là giao điểm của AI và BC (h.2.1, h.h.2.2).

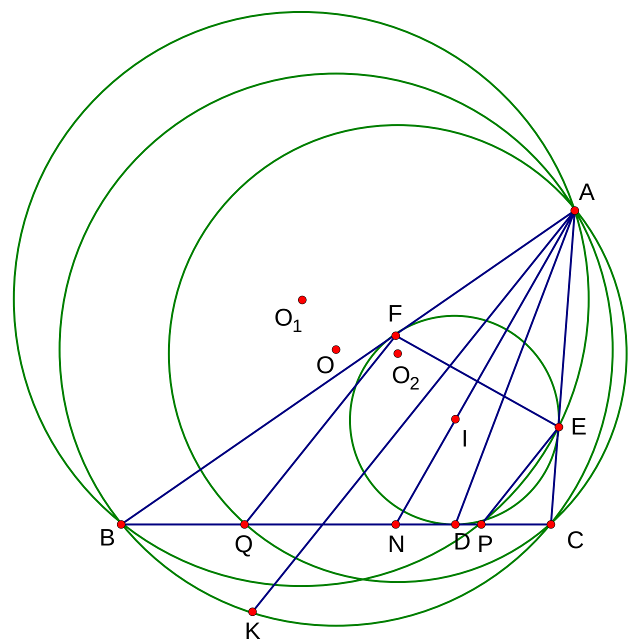
Dễ thấy $A(BCLT)=A(BCDS)=(BCDS)=-1$.

Do đó tứ giác BLCT điều hoà.

Kết hợp với $MB=MC$, suy ra $\widehat{KAB}=\widehat{KTB}=\widehat{MTB}=\widehat{LTC}=\widehat{LAC}=\widehat{DAC}$.



(h.2.1)



(h.2.2)

Vậy, các điều kiện sau tương đương.

1) AI là trục đẳng phương của (ABP), (ACQ).

2) $P_{N/(ABP)} = P_{N/(ACQ)}$.

3) $NB.NP = NC.NQ$.

4) $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{NQ}{NP}$.

5) $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{NB - NQ}{NC - NP}$.

6) $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{QB}{PC}$.

7) $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{QB}{FB}.\dfrac{EC}{PC}.\dfrac{DB}{DC}.$

8) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{QFB}}{\sin\widehat{FQB}}.\dfrac{\sin\widehat{EPC}}{\sin\widehat{PEC}}.\dfrac{S(ADB)}{S(ADC)}.$

9) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{QFB}}{\sin\widehat{PEC}}.\dfrac{AD.AB\sin\widehat{DAB}}{AD.AC\sin\widehat{DAC}}.$

10) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{KAB}}{\sin\widehat{KAC}}.\dfrac{AD.AB\sin\widehat{DAB}}{AD.AC\sin\widehat{DAC}}.$

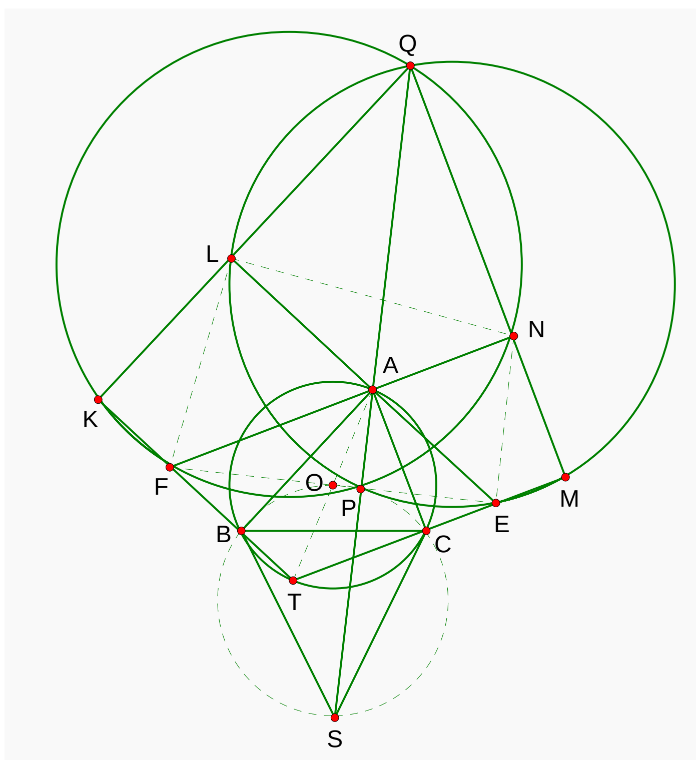
11) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{AC}$ (đpcm).

Chú ý. Tác giả của bài toán trên là TS Hà Duy Hưng, giáo viên Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội.

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC có $AB \neq AC$ và $\widehat{BAC} > 45°$. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các hình vuông ABKL, ACMN. AL, AN theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. P là giao điểm thuộc tam giác ABC của các đường tròn (LME), (NFK). Chứng minh rằng đường tròn (PBC) đi qua tâm đường tròn (ABC).

Lời giải.

Gọi O là tâm đường tròn (ABC); T là giao điểm của BF và CE; Q là giao điểm của KL và MN; S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B, C (h.3).



(h.3)

Dễ thấy $\widehat{ABT} = 90° = \widehat{ACT}.$

Do đó O là trung điểm của AT.

Dễ thấy AETF là hình bình thành.

Vậy O thuộc EF (1).

Vì ABKL, ACMN là các hình vuông và $\widehat{LAF} = 180° - \widehat{BAC} - 90° = \widehat{NAE}$ nên các tam giác LAF, NAE đồng dạng.

Do đó tứ giác NEFL nội tiếp.

Vậy $\overline{AL}.\overline{AE} = \overline{AN}.\overline{AF}$.

Điều đó có nghĩa là $P_{A/(LEM)} = P_{A/(NFK)}$.

Từ đó, chú ý rằng Q chính là giao điểm thứ hai của (LME), (NKF), suy ra A thuộc PQ.

Vậy $\widehat{APE} = \widehat{QPE} = 90° = \widehat{QPF} = \widehat{APF}$.

Điều đó có nghĩa là P thuộc EF và $AP \perp EF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OPA} = 90°$ (3).

Vì $Q \in AP$ và ABKL, ACMN là các hình vuông nên

$$\frac{S(PAB)}{S(PAC)} = \frac{S(QAB)}{S(QAC)} = \frac{S(LAB)}{S(NAC)} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Do đó AP là đường đối trung của ΔABC.

Vậy AP đi qua S (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{OPS} = 90°$.

Kết hợp với $\widehat{OBS} = 90° = \widehat{OCS}$, suy ra B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn (đường kính OS).

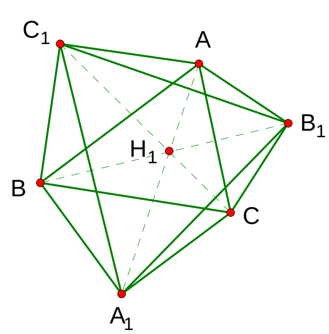
Bài toán 4. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác A_1BC, B_1CA, C_1AB theo thứ tự vuông cân tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là ảnh đối xứng của A, B, C qua B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, $A_2B_2C_2$ đi qua trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Lời giải.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác A_1BC, B_1CA, C_1AB theo thứ tự vuông cân tại A_1, B_1, C_1. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trực tâm H_1 của tam giác $A_1B_1C_1$.

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày phép chứng minh ở đây (h.4.1).



(h.4.1)

Trở lại giải bài toán 4.

Gọi O và O_2 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$; H_1 là trực tâm của $\Delta A_1B_1C_1$; A_4, B_4, C_4 theo thứ tự là điểm đối xứng của O_2 qua B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 (h.4.2).

Ta có $\widehat{B_4BC} = \widehat{B_4BA_1} + \widehat{A_1BC} = \widehat{O_2B_2A_1} + \widehat{A_1CB}$

$= \widehat{O_2C_2A_1} + \widehat{A_1CB} = \widehat{C_4CA_1} + \widehat{A_1CB} = \widehat{C_4CB}.$

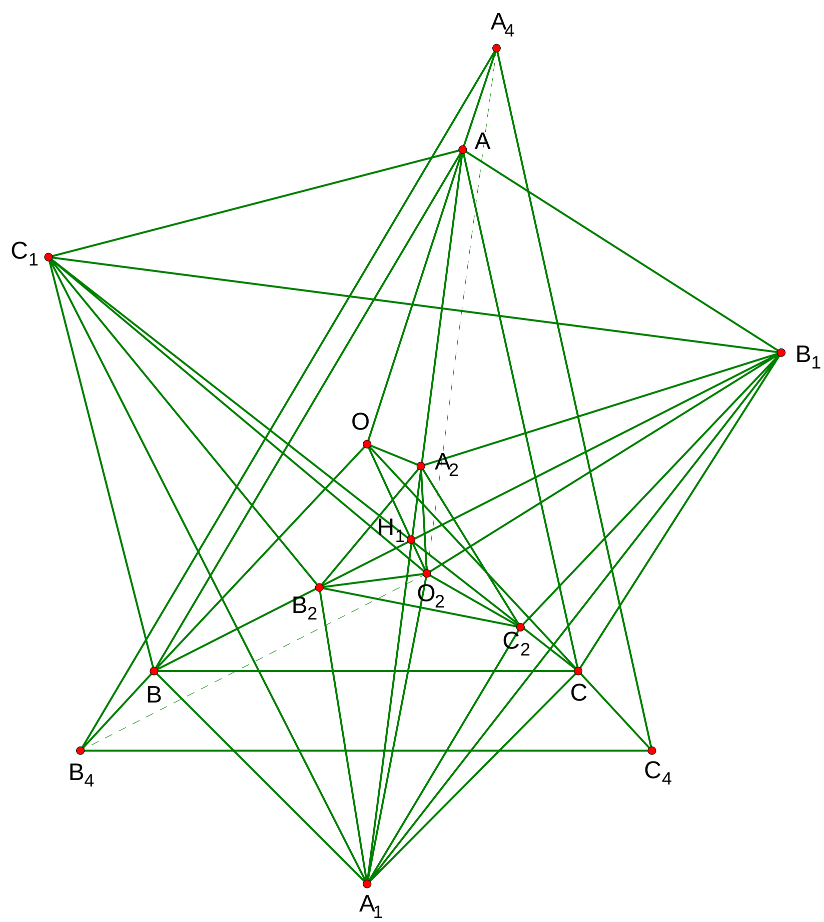
Kết hợp với $BB_4 = O_2B_2 = O_2C_2 = CC_4; OB = OC,$ suy ra $B_4C_4 // BC; OB_4 = OC_4.$

Tương tự $C_4A_4 // CA; OC_4 = OA_4$ và $A_4B_4 // AB; OA_4 = OB_4.$

Vậy các tam giác ABC, $A_4B_4C_4$ có các cạnh tương ứng song song và cùng nhận O là tâm đường tròn ngoại tiếp.

Điều đó có nghĩa là O là tâm vị tự biến ΔABC thành $\Delta A_4B_4C_4$.

Do đó các bộ ba điểm O, A, A_4 và O, B, B_4 thẳng hàng (1).



(h.4.2)

Theo bổ đề trên, $H_1A \perp B_1C_1; H_1B \perp C_1A_1.$

Kết hợp với $O_2A_2 \perp B_1C_1; O_2B_4 \perp C_1A_1,$ suy ra $H_1A // O_2A_4; H_1B // O_2B_4$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra O, H_1, O_2 thẳng hàng (đpcm).

Bài toán 5. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) và có một cặp cạnh đối không song song. Chứng minh rằng O là trọng tâm của ABCD khi và chỉ khi $OA.OC = OB.OD$.

Lời giải. (h.5.1).

Vì ABCD có một cặp cạnh đối không song song nên hoặc AD, CB cắt nhau hoặc AB, CD cắt nhau. Không mất tính tổng quát giả sử AD, CB cắt nhau. Gọi S là giao điểm của AD, CB.

Điều kiện cần.

Gọi K, L theo thứ tự là trung điểm của AD, BC (h.5.1).

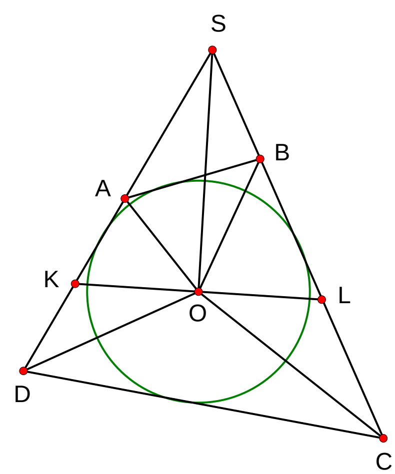
Vì O là trọng tâm của ABCD nên O là trung điểm của KL.

Kết hợp với $\widehat{OSK} = \widehat{OSL}$, suy ra ΔSKL cân tại S.

Do đó $\Delta KAO \sim \Delta LOB; \Delta KDO \sim \Delta LOC$ (kết quả quen thuộc).

Vậy $\frac{OA}{OB} = \frac{OA}{BO} = \frac{KA}{LO} = \frac{KD}{LO} = \frac{OD}{CO} = \frac{OD}{OC}$.

Điều đó có nghĩa là $OA.OC = OB.OD$.



(h.5.1)

Điều kiện đủ.

Qua O dựng đường thẳng vuông góc với SO theo thứ tự cắt AD, BC tại K, L (h.5.1).

Chú ý rằng $\widehat{OSK} = \widehat{OSL}$, suy ra ΔSKL cân tại S và $OK = OL$.

Do đó $\Delta KAO \sim \Delta LOB; \Delta KDO \sim \Delta LOC$ (kết quả quen thuộc).

Vậy $\frac{KA}{KD} = \frac{KA}{LO}.\frac{LO}{KD} = \frac{OA}{BO}.\frac{CO}{OD} = \frac{OA.OC}{OB.OD} = 1$.

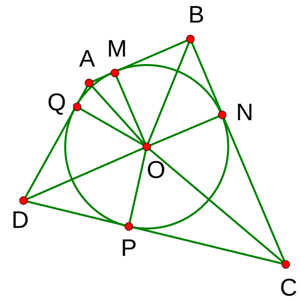
Điều đó có nghĩa là $KA = KD$.

Tương tự $LB = LC$.

Tóm lại O là trọng tâm của ABCD.

Lời giải 2.

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của (O) và AB, BC, CD, DA (h.5.2).



(h.5.2)

Đặt $AQ = AM = x; BM = BN = y; CN = CP = z; DP = DQ = t$.

Theo định lí con nhím,

$$(y+t)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+(x+z)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$$

$$=\left(y\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}\right)+\left(z\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}\right)+\left(t\overrightarrow{OC}+z\overrightarrow{OD}\right)+\left(x\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=(x+y)\overrightarrow{OM}+(y+z)\overrightarrow{ON}+(z+t)\overrightarrow{OP}+(t+x)\overrightarrow{OQ}=\vec{0} \ (1).$$

Giả sử $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\end{array}\right.$ thì, theo (1), $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\end{cases}$. Điều đó có nghĩa là ABCD là hình bình hành, mâu thuẫn.

Do đó, lại theo (1), $(y+t)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=-(x+z)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)\neq\vec{0}$.

Vậy, các điều kiện sau tương đương.

1) O là trọng tâm của ABCD.
2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
3) $(x+z)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=-(x+z)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$.
4) $(x+z)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=(y+t)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$.
5) $x+z=y+t$.
6) $\dfrac{AM}{OM}+\dfrac{CP}{OP}=\dfrac{BN}{ON}+\dfrac{DQ}{OQ}$.
7) $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{D}{2}$.
8) $\dfrac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{B+D}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{D}{2}}$.
9) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{D}{2}$.
10) $\dfrac{OM}{OA}.\dfrac{OP}{OC}=\dfrac{ON}{OB}.\dfrac{OQ}{OD}$.
11) $OA.OC = OB.OD$.

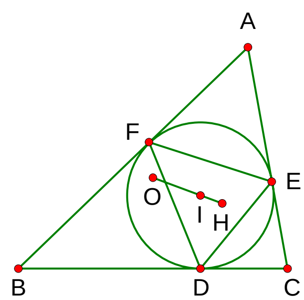
Bài toán 6. Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. EF, FD, DE theo thứ tự giao với (O) bằng $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}, \{C_1, C_2\}$. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn (XA_1A_2), (YB_1B_2), (ZC_1C_2) thuộc OI.

Lời giải 1.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. Khi đó trực tâm H của tam giác DEF thuộc OI.

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày phép chứng minh ở đây (h.6.1).



(h.6.1)

Trở lại giải bài toán 6.

Gọi (O_a), (O_b), (O_c) theo thứ tự là các đường tròn (XA_1A_2), (YB_1B_2), (ZC_1C_2); S là giao điểm của AC và DF; D_1, D_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của A_1A_2 và (O_b), (O_c); D_0, E_0 theo thứ tự là hình chiếu của D, E trên EF, FD; H là giao điểm của DD_0, EE_0 (h.6.2).

Định hướng các đường thẳng EF, FD, DE bởi các vectơ $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{DE}$.

Dễ thấy $P_{D/(O_b)} = \overline{DB_1}.\overline{DB_2} = \overline{DC_1}.\overline{DC_2} = P_{D/(O_c)}$ (1).

Dễ thấy $(SFAB) = -1$.

Từ đó, chú ý rằng Y là trung điểm của AC, theo hệ thức Macluarin, suy ra

$$\overline{SE}.\overline{SY} = \overline{SA}.\overline{SC} = \overline{SB_1}.\overline{SB_2}.$$

Do đó E thuộc (O_b).

Tương tự F thuộc (O_c).

Vậy, chú ý rằng D_0, F, E theo thứ tự thuộc các đoạn EF, AB, AC; $AE = AF$; các tam giác BFD_0, CED_0 đồng dạng, ta có

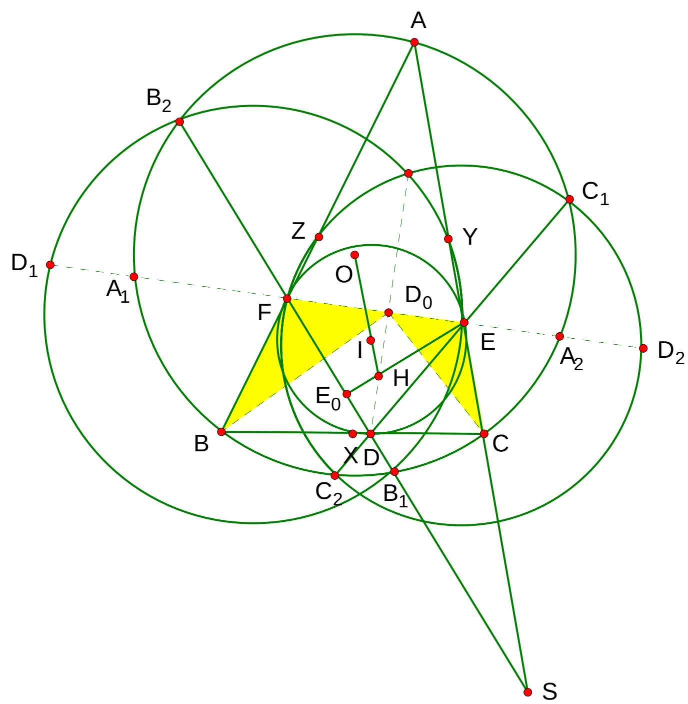
$$P_{D_0/(O_b)} - P_{D_0/(O_b)} = \overline{D_0E}.\overline{D_0D_1} - \overline{D_0F}.\overline{D_0D_2}$$

$$= \overline{D_0E}\left(\overline{D_0F} + \overline{FD_1}\right) - \overline{D_0F}\left(\overline{D_0E} + \overline{ED_2}\right) = -\overline{ED_0}.\overline{FD_1} + \overline{FD_0}.\overline{ED_2}$$

$$= -\overline{ED_0}.\frac{\overline{FB_1}.\overline{FB_2}}{\overline{FE}} + \overline{FD_0}.\frac{\overline{EC_1}.\overline{EC_2}}{\overline{EF}} = \frac{1}{\overline{EF}}\left(\overline{ED_0}.\overline{FA}.\overline{FB} + \overline{FD_0}.\overline{EA}.\overline{EC}\right)$$

$$= \frac{1}{\overline{EF}}\left(ED_0\left(-FA.FB\right) + \left(-FD_0\right)\left(-EA.EC\right)\right) = \frac{EA}{\overline{EF}}\left(-ED_0.FB + FD_0.EC\right) = 0$$

Do đó $P_{D_0/(O_b)} = P_{D_0/(O_c)}$ (2).



(h.6.2)

Từ (1) và (2) suy ra DD_0 là trục đẳng phương của (O_b), (O_c).

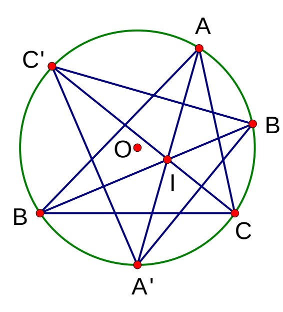
Tương tự EE_0 là trục đẳng phương của (O_c), (O_a).

Vậy, theo bổ đề trên, tâm đẳng phương của (O_a), (O_b), (O_c) chính là điểm H, thuộc OI.

Lời giải 2.

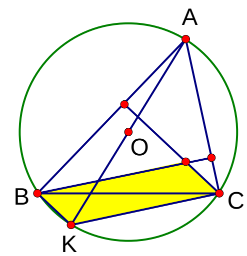
Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề1. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. AI, BI, CI lại cắt (O) tại A', B', C'. Khi đó I là trực tâm của tam giác A'B'C'.



(h.6.3)

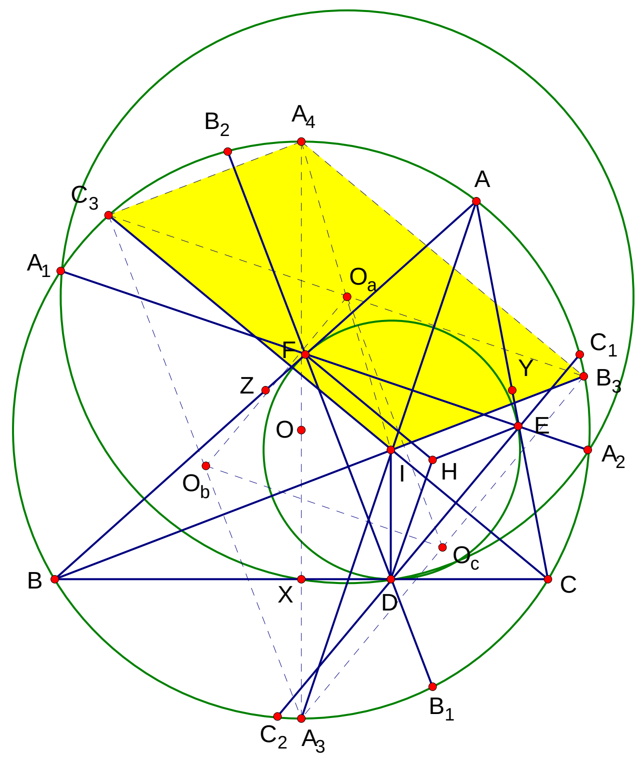
Bổ đề 2. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. AO lại cắt (O) tại K. Khi đó BHCK là hình bình hành.



(h.6.4)

Trở lại giải bài toán 119.

Gọi A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AI, BI, CI và (O); O_a, O_b, O_c theo thứ tự là trung điểmc của B_3C_3, C_3A_3, A_3B_3; A_4 là giao điểm thứ hai của A_3O và (O).



(h.6.5)

Theo lời giải 1, X, Y, Z theo thứ tự thuộc các đường tròn (XA_1A_2), (YB_1B_2), (ZC_1C_2).

Theo bổ đề 1, I là trực tâm của $\Delta A_3B_3C_3$.

Theo bổ đề 2, $IB_3A_4C_3$ là hình bình hành.

Do đó O_a là trung điểm của B_3C_3 và IA_4.

Kết hợp với $A_1A_2B_3C_3$ là hình thang cân và $IDXA_4$ là hình thang, suy ra O_a thuộc trung trực của A_1A_2 và DX.

Vậy O_a là tâm của (XA_1A_2).

Tương tự O_b, O_c theo thứ tự là tâm của (YB_1B_2), (ZC_1C_2).

Kí hiệu (XA_1A_2), (YB_1B_2), (ZC_1C_2) là (O_a), (O_b), (O_c); H là trực tâm của ΔDEF.

Theo lời giải 1, $P_{D/(O_b)} = P_{D/(O_c)}$.

Kết hợp với $DH \perp EF // B_3B_3 // O_bO_c$, suy ra DH là trục đẳng phương của (O_b), (O_c).

Tương tự EH là trục đẳng phương của (O_c), (O_a).

Vậy, theo bổ đề trong lời giải 1, tâm đẳng phương của (O_a), (O_b), (O_c) là H, thuộc OI.

Chú ý. Tác giả của bài toán trên là ThS Trần Quang Hùng, giáo viên TRường THPT chuyên ĐHKH Tự nhiên, ĐHGQ Hà Nội.

Bài toán 7. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ theo thứ tự cắt đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ tại X, Y, Z, T. E, F theo thứ tự là trung điểm của XZ, YT. Chứng minh rằng

3) Tứ giác XYZT nội tiếp và $XZ \perp YT$.

4) O, E, F thẳng hàng.

Lời giải. (h.7).

Gọi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là số đo của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$.

1) Dễ thấy $\widehat{XAB} = \dfrac{180° - \alpha}{2}; \widehat{XBA} = \dfrac{180° - \beta}{2}$.

Do đó $\widehat{TXY} = \widehat{AXB} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

Tương tự $\widehat{TZY} = \widehat{DZC} = \dfrac{\gamma + \delta}{2}$.

Vậy $\widehat{TXY} + \widehat{TZY} = \dfrac{\alpha + \beta}{2} + \dfrac{\gamma + \delta}{2} = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = \dfrac{360°}{2} = 180°$.

Điều đó có nghĩa là XYZT nội tiếp.

Gọi K là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc $\widehat{CAB}, \widehat{CBA}$; I là giao điểm của XZ và YT.

Dễ thấy (kí hiệu $d(X, AB)$ chỉ khoảng cách từ điểm X tới đường thẳng AB).

$$d(X, AD) = d(X, AB) = d(X, BC);$$

$$d(K, AD) = d(K, AB) = d(K, BC);$$

$$d(Z, AD) = d(Z, AB) = d(Z, BC).$$

Do đó X, K, Z thẳng hàng.

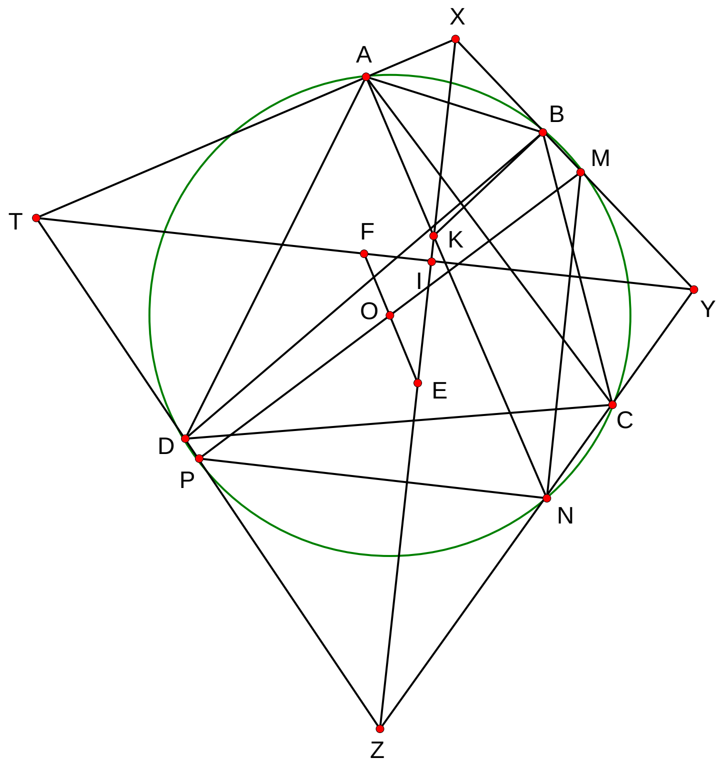
Từ đó, chú ý rằng tứ giác XAKB nội tiếp ($\widehat{XAK} = 90° = \widehat{XBK}$), suy ra

$$\widehat{IXY} = \widehat{KXB} = \widehat{KAB} = \frac{\alpha}{2}.$$

Tương tự $\widehat{IYX} = \dfrac{\gamma}{2}$.

Vậy $\widehat{IXY} + \widehat{IYX} = \dfrac{\alpha + \gamma}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$.

Điều đó có nghĩa là $XZ \perp YT$.



(h.7)

2) Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tứ giác ABCD. E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các đoạn AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Khi đó trung điểm của MN thuộc đoạn EF.

Bổ đề trên chính là ví dụ 1.13, trang 14, **Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10**.

Trở lại giải phần 2.

Gọi M, N, P theo thứ tự là giao điểm thứ hai của XY, YZ, ZT và (O).

Vì XY, ZT theo thứ tự là phân giác ngoài của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{CDA}$ nên, M, P theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{ABC}, \overset{\frown}{CDA}$.

Do đó MP là đường kính của (O).

Nói cách khác O là trung điểm của MP (1).

Vì YZ là phân giác ngoài của góc $\widehat{BCD}$ nên N là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BCD}$.

Do đó, chú ý tới phần 1, $\widehat{YMN} = \widehat{BAN} = \frac{1}{4}\text{sđ}\overset{\frown}{BCD} = \frac{\alpha}{2} = \widehat{BXK} = \widehat{BXZ}.$

Điều đó có nghĩa là $MN \,//\, XZ$.

Tương tự $NP \,//\, YT$.

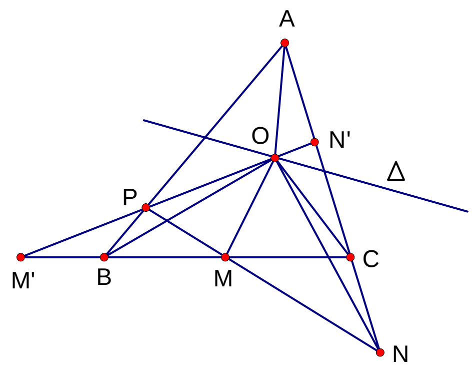
Vậy, theo định lí Thales, $\frac{XM}{XY} = \frac{ZN}{ZY} = \frac{XP}{XT}$ (2).

Từ (1) và (2), theo bổ đề trên, suy ra O thuộc EF.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ không đi qua A, B, C. Điểm O thuộc Δ và không thuộc BC, CA, AB. M, N, P theo thứ tự là giao điểm của các đường thẳng đối xứng với OA, OB, OC qua Δ và BC, CA, AB. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Lời giải 1.

Gọi M', N' theo thứ tự là giao điểm của OP và BC, CA (h.8.1).



(h.8.1)

Dễ thấy

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}:\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}=(BCMM')=P(BCMM')=P(ACNN')=(ACNN')=\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}:\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'C}}.$$

Từ đó, chú ý rằng M', N', P thẳng hàng, theo định lí Menelaus, suy ra

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'C}}.\frac{\overline{M'C}}{\overline{M'B}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=1.$$

Vậy, lại theo định lí Menelaus, M, N, P thẳng hàng.

Lời giải 2.

Để giải bài toán trên, ta cần có một định lí.

Định lí. Cho tam giác ABC, $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ theo thứ tự là vectơ định hướng của các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó

1) $\dfrac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{BC}=\dfrac{\sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}{CA}=\dfrac{\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}{AB}.$

2) $\dfrac{\sin(\vec{\beta},\vec{\gamma})}{\overline{BC}}=\dfrac{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}{\overline{CA}}=\dfrac{\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{\overline{AB}}.$

Chứng minh.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Nếu $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ và $k\neq 0$ thì $\sin(k\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{k}{|k|}\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta}).$

Chứng minh bổ đề.

Trong phép chứng minh này, các kí hiệu $\uparrow\uparrow$ và $\uparrow\downarrow$ theo thứ tự chỉ sự cùng hướng và sự ngược hướng của hai vectơ.

Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. $k>0$. Chú ý rằng $k\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$, ta có

$$\sin(k\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \sin((k\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{\alpha},\vec{\beta})) = \sin(0^\circ+(\vec{\alpha},\vec{\beta})) = 1.\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{k}{|k|}\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta}).$$

Trường hợp 2. $k<0$. Chú ý rằng $k\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$, ta có

$$\sin(k\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \sin((k\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{\alpha},\vec{\beta})) = \sin(180^\circ+(\vec{\alpha},\vec{\beta})) = (-1).\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{k}{|k|}\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta}).$$

Trở lại chứng minh định lí sin dạng đại số.

Không mất tính tổng quát giả sử ΔABC có hướng dương và $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ là các vecctơ đơn vị.

Theo định lí sin và bổ đề trên, ta có

$$\frac{BC}{CA} = \frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{CBA}} = \frac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \frac{\sin(\overline{AB}.\vec{\gamma},\overline{AC}.\vec{\beta})}{\sin(\overline{BC}.\vec{\alpha},\overline{BA}.\vec{\gamma})} = \frac{\dfrac{\overline{AB}}{AB}.\dfrac{\overline{AC}}{AC}\sin(\vec{\gamma},\vec{\beta})}{\dfrac{\overline{BC}}{BC}.\dfrac{\overline{BA}}{BA}\sin(\vec{\alpha},\vec{\gamma})}.$$

Do đó $\dfrac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{BC} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}{CA}$ và $\dfrac{\sin(\vec{\beta},\vec{\gamma})}{\overline{BC}} = \dfrac{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}{\overline{CA}}$.

Tương tự $\dfrac{\sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}{CA} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}{AB}$ và $\dfrac{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}{\overline{CA}} = \dfrac{\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{\overline{AB}}$.

Tóm lại

1) $\dfrac{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{BC} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}{CA} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}{AB}$.

2) $\dfrac{\sin(\vec{\beta},\vec{\gamma})}{\overline{BC}} = \dfrac{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}{\overline{CA}} = \dfrac{\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{\overline{AB}}$.

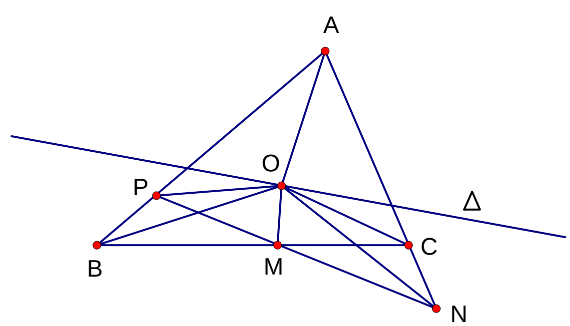
Chú ý.

Định lí trên được gọi là định lí sin dạng đại số.

Trở lại giải bài toán 8 (h.8.2).

Định hướng các đường thẳng $BC, CA, AB, \Delta, OA, OB, OC, OM, ON, OP$ theo thứ tự bởi các vectơ $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{m},\vec{n},\vec{p}$.

Vì OA, OB, OC theo thứ tự đối xứng với OM, ON, OP qua Δ nên, không mất tính tổng quát giả sử $(\vec{y},\vec{m})-(\vec{x},\vec{n}) \equiv (\vec{z},\vec{n})-(\vec{y},\vec{p}) \equiv (\vec{x},\vec{p})-(\vec{z},\vec{m}) \equiv 0^\circ \pmod{360^\circ}$.



(h.8.2)

Vậy, theo định lí sin dạng đại số,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MO}}.\frac{\overline{MO}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NO}}.\frac{\overline{NO}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PO}}.\frac{\overline{PO}}{\overline{PB}}$$

$$=\frac{\sin(\vec{y},\vec{m})}{\sin(\vec{y},\vec{\alpha})}.\frac{\sin(\vec{z},\vec{\alpha})}{\sin(\vec{z},\vec{m})}.\frac{\sin(\vec{z},\vec{n})}{\sin(\vec{z},\vec{\beta})}.\frac{\sin(\vec{x},\vec{\beta})}{\sin(\vec{x},\vec{n})}.\frac{\sin(\vec{x},\vec{p})}{\sin(\vec{x},\vec{\gamma})}.\frac{\sin(\vec{y},\vec{\gamma})}{\sin(\vec{y},\vec{p})}$$

$$=\frac{\sin(\vec{y},\vec{m})}{\sin(\vec{x},\vec{n})}.\frac{\sin(\vec{z},\vec{\alpha})}{\sin(\vec{y},\vec{\alpha})}.\frac{\sin(\vec{z},\vec{n})}{\sin(\vec{y},\vec{p})}.\frac{\sin(\vec{x},\vec{\beta})}{\sin(\vec{z},\vec{\beta})}.\frac{\sin(\vec{x},\vec{p})}{\sin(\vec{z},\vec{m})}.\frac{\sin(\vec{y},\vec{\gamma})}{\sin(\vec{x},\vec{\gamma})}$$

$$=\frac{\overline{BO}}{\overline{CO}}.\frac{\overline{CO}}{\overline{AO}}.\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}=1.$$

Tóm lại, theo định lí menelaus, M, N, P thẳng hàng.

Bài toán 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm P thuôc tia đối của tia CA sao cho $\widehat{CBP}=\widehat{BPD}.$ Tính $\frac{PB}{PC}.$

Lời giải 1.

Gọi H là giao điểm thứ hai của PB và đường tròn (ABCD); Q là giao điểm của PB và AD (h.9).

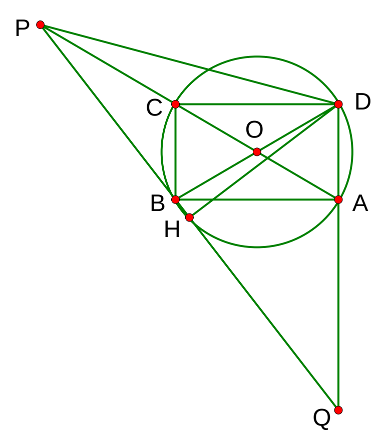
Dễ thấy các tam giác PBC, PAH, PQA đồng dạng.

Do đó $\frac{PB}{PC}=\frac{PA}{PH}=\frac{PQ}{PA}.$

Từ đó, chú ý rằng ΔDPQ cân tại D và $DH\perp PQ,$ suy ra

$$\left(\frac{PB}{PC}\right)^2=\frac{PA}{PH}.\frac{PQ}{PA}=\frac{PQ}{PH}=2.$$

Vậy $\frac{PB}{PC}=\sqrt{2}.$



(h.9)

Lời giải 2.

Đặt $\widehat{CBP}=\widehat{BPD}=\alpha;\widehat{CBD}=\beta.$

Áp dụng định lí Ceva dạng lượng giác cho tam giác BPD, ta có

$$1=\frac{\sin\widehat{CBP}}{\sin\widehat{CBD}}.\frac{\sin\widehat{CPD}}{\sin\widehat{CPB}}.\frac{\sin\widehat{CDB}}{\sin\widehat{CDP}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\frac{\sin(2\alpha-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}.\frac{\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(90^\circ-2\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\frac{\sin2\alpha\cos\beta-\cos2\alpha\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}.\frac{\cos\beta}{\cos2\alpha}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}.\frac{\tan2\alpha\cos\beta-\sin\beta}{\sin\beta\cot\alpha-\cos\beta}.$$

Do đó $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\tan2\alpha\cos\beta-\sin\beta}{\sin\beta\cot\alpha-\cos\beta}=\frac{\tan2\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cot\alpha}.$

Điều đó có nghĩa là $\left(1-\tan^2\alpha\right)\tan^2\beta=2\tan^2\alpha.$

Nói cách khác $\tan^2\alpha=\frac{\tan^2\beta}{2+\tan^2\beta}.$

Vậy $\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\beta}{2\left(1+\tan^2\beta\right)}=\frac{\tan^2\beta.\cos^2\beta}{2}=\frac{\sin^2\beta}{2}$ (1).

Mặt khác, theo định lí sin, $\frac{PB}{PC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{PB}{PC}=\sqrt{2}.$

Bài toán 10. Hai tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm và AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy tại O. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp sáu tam giác OBC_1, OB_1C, OCA_1, OC_1A, OAB_1, OA_1B cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

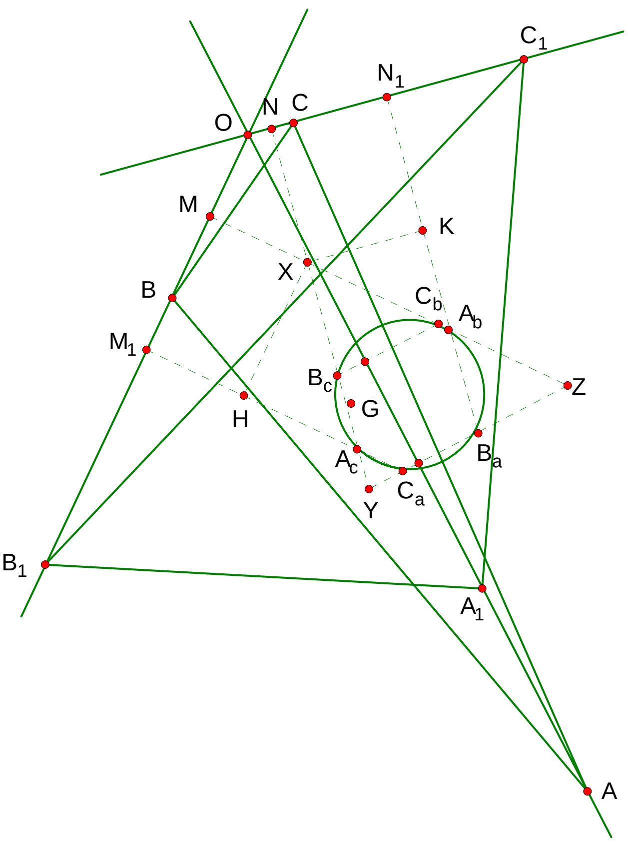
Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC và các bộ hai điểm A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Nếu các bộ bốn điểm B_1, B_2, C_1, C_2; C_1, C_2, A_1, A_2; A_1, A_2, B_1, B_2 cùng thuộc một đường tròn thì sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cùng thuộc một đường tròn.

Bổ đề trên chính là ví dụ 14.8, trang 204, **Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10**.

Trở lại giải bài toán 10.

Gọi A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác OBC_1, OB_1C, OCA_1, OC_1A, OAB_1, OA_1B, X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng A_bC_b, B_cA_c; B_cA_c, C_aB_a; C_aB_a, A_bC_b. H, K theo thứ tự là hình chiếu của X trên A_cC_a, A_bB_a; M, M_1, N, N_1 theo thứ tự là trung điểm của OB, OB_1, OC, OC_1 (h.10).



(h.10)

Định hướng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, YZ, ZX, XY theo thứ tự bởi các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Dễ thấy $B_cC_b \,//\, YZ; XH \,//\, BB_1; XK \,//\, CC_1$.

Do đó, không mất tính tổng quát, định hướng các đường thẳng B_cC_b, XH, XK theo thứ tự bởi $\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}$.

Dễ thấy YZ, ZX, XY theo thứ tự vuông góc với AA_1, BB_1, CC_1. Do đó, không mất tính tổng quát giả sử $(\vec{x}, \vec{a}) \equiv (\vec{y}, \vec{b}) \equiv (\vec{z}, \vec{c}) \equiv 90^\circ (\mathrm{mod}\, 360^\circ)$.

Vì $B_cC_b \,//\, YZ$ nên, theo định lí sin dạng đại số, $\dfrac{\overline{XB_c}}{\overline{XC_b}} = \dfrac{\sin(\vec{x}, \vec{y})}{\sin(\vec{x}, \vec{z})}$ (1).

Chú ý rằng $A_cH \,//\, XZ; XH \,//\, BB_1; A_bK \,//\, XY; XK \,//\, CC_1$, lại theo định lí sin dạng đại số, ta có

$$\frac{\overline{XA_b}}{\overline{XA_c}} = \frac{\overline{XA_b}}{\overline{XK}} \cdot \frac{\overline{NN_1}}{\overline{MM_1}} \cdot \frac{\overline{XH}}{\overline{XA_c}} = \frac{\sin(\vec{z}, \vec{c})}{\sin(\vec{z}, \vec{y})} \cdot \frac{\frac{1}{2}\overline{CC_1}}{\frac{1}{2}\overline{BB_1}} \cdot \frac{\sin(\vec{y}, \vec{z})}{\sin(\vec{y}, \vec{b})} = -\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BB_1}}.$$

Vì các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm nên

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overline{AA_1} + \overline{BB_1}\vec{b} + \overline{CC_1}\vec{c}.$$

Từ đó, chú ý rằng $\vec{x} \perp \overrightarrow{AA_1}$, suy ra

$$0=\vec{x}.\vec{0}=\vec{x}.\overline{AA_1}+\overline{BB_1}\cos(\vec{x},\vec{b})+\overline{CC_1}\cos(\vec{x},\vec{c})=\overline{BB_1}\cos(\vec{x},\vec{b})+\overline{CC_1}\cos(\vec{x},\vec{c}).$$

Do đó $\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{BB_1}}=-\dfrac{\cos(\vec{x},\vec{b})}{\cos(\vec{x},\vec{c})}=-\dfrac{\cos\left((\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{b})\right)}{\cos\left((\vec{x},\vec{z})+(\vec{z},\vec{c})\right)}=-\dfrac{\cos\left((\vec{x},\vec{y})+90^\circ\right)}{\cos\left((\vec{x},\vec{z})+90^\circ\right)}=-\dfrac{\sin(\vec{x},\vec{y})}{\sin(\vec{x},\vec{z})}.$

Vậy $\dfrac{\overline{XA_b}}{\overline{XA_c}}=\dfrac{\sin(\vec{x},\vec{y})}{\sin(\vec{x},\vec{z})}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\overline{XB_c}}{\overline{XC_b}}=\dfrac{\overline{XA_b}}{\overline{XA_c}}.$

Nói cách khác $\overline{XA_b}.\overline{XC_b}=\overline{XA_c}.\overline{XB_c}.$

Điều đó có nghĩa là bốn điểm A_b, A_c, B_c, C_b cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự các bộ bốn điểm B_c, B_a, C_a, A_c; C_a, C_b, A_b, A_c cũng cùng thuộc một đường tròn.

Tóm lại, theo bổ đề trên, A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC. P là trung điểm của BC. Lấy các điểm X, Y, Z sao cho sao cho A, X / BC; B / CA / Y; C / AB / Z và các tam giác XBC, YAC, ZBA đồng dạng. YZ theo thứ tự cắt AC, AB tại N, M. Chứng minh rằng $YN=ZM$ khi và chỉ khi $\widehat{PAB}=\widehat{XAC}$.

Lời giải.

Điều kiện cần.

Gọi K, H theo thứ tự là hình chiếu của Y, Z trên AC, AB; gọi S là giao điểm của AX và YZ (h.11.1).

$$\frac{AC}{AB}=\frac{YK}{ZH}=\frac{\frac{1}{2}YK.AN}{\frac{1}{2}ZH.AM}.\frac{AM}{AN}=\frac{S(AYN)}{S(AZM)}.\frac{AM}{AN}=\frac{YN}{ZM}.\frac{AM}{AN}=\frac{AM}{AN}.$$

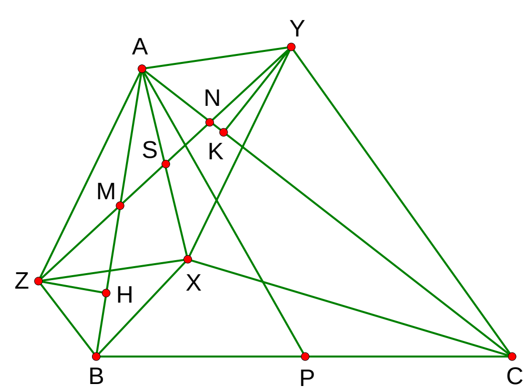
Do đó $\Delta ABC \sim \Delta ANM$ (1).

Dễ thấy SY = SZ (kết quả quen thuộc).

Kết hợp với NY = MZ, suy ra SN = SM.

Do đó $\dfrac{PB}{PC}=1=\dfrac{SN}{SM}$ (2).

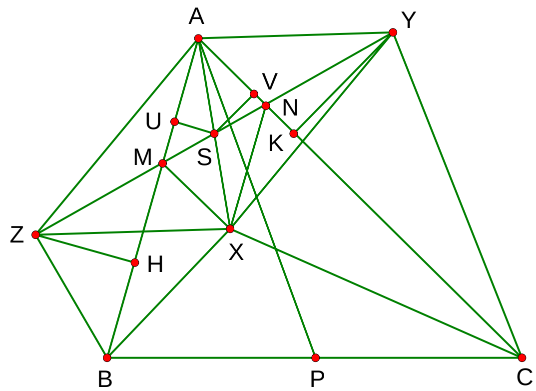
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PAB}=\widehat{SAN}=\widehat{XAC}.$



(h.11.1)

Điều kiện đủ.

Gọi S là giao điểm của AX và YZ; H, K theo thứ tự là hình chiếu của Z, Y trên AB, AC; U, V theo thứ tự là hình chiếu của S trên AB, AC.



(h.11.2)

Vì $\widehat{PAB}=\widehat{XAC}$ và $\Delta BZA \sim \Delta AYC$ nên $\frac{SU}{SV}=\frac{AB}{AC}=\frac{ZH}{YK}$.

Kết hợp với $SU // ZH; SV // YK$, suy ra $\frac{SM}{ZM}=\frac{SU}{ZH}=\frac{SV}{YK}=\frac{SN}{YN}$.

Kết hợp với SY = SZ, suy ra $\frac{ZM}{YN}=\frac{SM}{SN}=\frac{ZM+SM}{YN+SN}=\frac{SZ}{SY}=1.$

Do đó $YN=ZM$.

Bài toán 12. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB. Các đường tròn (AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1) theo thứ tự lại cắt (O) tại A_2, B_2, C_2. Tìm M sao cho $\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(A_2B_2C_2)}$ nhỏ nhất.

Lời giải.

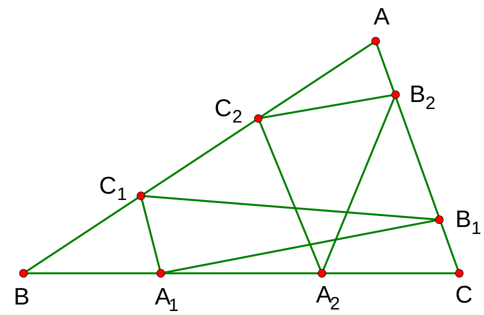
Trong lời giải này các kí hiệu $R(XYZ), r(XYZ)$ theo thứ tự chỉ bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp ΔXYZ.

Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB. Các điểm A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Khi đó $S(A_1B_1C_1)=S(A_2B_2C_2)$.

Chứng minh. (h.12.1).

Đặt $\frac{BA_1}{BC}=\frac{CA_2}{CB}=x; \frac{CB_1}{CA}=\frac{AB_2}{AC}=y; \frac{AC_1}{AB}=\frac{BC_2}{BA}=z.$



(h.12.1)

Ta thấy

$$S(A_1B_1C_1)=S(ABC).\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)}$$

$$=S(ABC).\frac{S(ABC)-S(AB_1C_1)+S(BC_1A_1)+S(CA_1B_1)}{S(ABC)}$$

$$=S(ABC)\left(1-\frac{AC_1}{AB}.\frac{AB_1}{AC}-\frac{BA_1}{BC}.\frac{BC_1}{BA}-\frac{CB_1}{CA}.\frac{CA_1}{CB}\right)$$

$$=S(ABC)\left(1-z\left(1-y\right)-x\left(1-z\right)-y\left(1-x\right)\right)$$

$$=S(ABC)\left(1-x-y-z+yz+zx+xy\right).$$

Tương tự $S(A_2B_2C_2)=S(ABC)\left(1-x-y-z+yz+zx+xy\right)$.

Vậy $S(A_1B_1C_1)=S(A_2B_2C_2)$.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các đường tròn (AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1) và đường tròn (O). A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Khi đó các tam giác $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ đồng dạng cùng hướng.

Chứng minh. (h.12.2).

Dễ thấy các tam giác A_2BC_1, A_2CB_1 đồng dạng cùng hướng (1).

Vì C_3, B_3 theo thứ tự là điểm đối xứng với C_1, B_1 qua trung điểm của AB, AC nên

$$\overline{BC_1}=-\overline{C_1B}=-\overline{AC_3};\overline{CB_1}=-\overline{B_1C}=-\overline{AB_3}\ (2).$$

Do đó $\overrightarrow{BC_1}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AC_3};\overrightarrow{CB_1}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB_3}$.

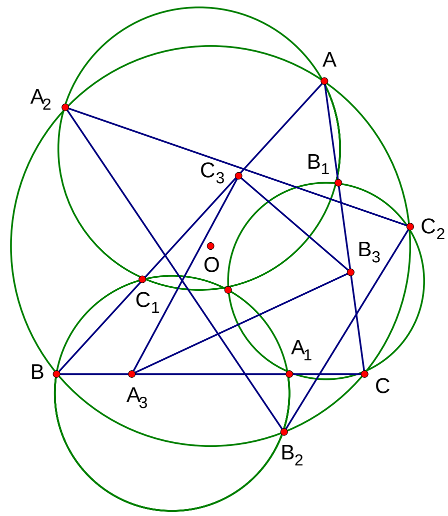
Vậy $(\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CB_1})\equiv(\overrightarrow{AC_3},\overrightarrow{AB_3})(\mathrm{mod}\,2\pi)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{A_2B}{A_2C}=\frac{BC_1}{CB_1}=\frac{AC_3}{AB_3};(\overrightarrow{A_2B},\overrightarrow{A_2C})\equiv(\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CB_1})\equiv(\overrightarrow{AC_3},\overrightarrow{AB_3})(\mathrm{mod}\,2\pi).$$

Do đó các tam giác A_2BC, AC_3B_3 đồng dạng cùng hướng.

Tương tự các cặp tam giác B_2CA, BA_3C_3 ; C_2AB, CB_3A_3 đồng dạng cùng hướng (4).



(h.12.2)

Vậy

$(A_2B_2, A_2C_2) \equiv (A_2B_2, A_2A) + (A_2A, A_2C_2) (\bmod \pi)$

$\equiv (CB_2, CA) + (BA, BC_2) (\bmod \pi)$ (vì $C \in (A_2B_2A); B \in (AA_2C_2)$)

$\equiv (A_3B, A_3C_3) + (A_3B_3, A_3C) (\bmod \pi)$ (vì (4))

$\equiv (A_3B_3, A_3C_3) (\bmod \pi)$ (vì $A_3C \equiv A_3B$).

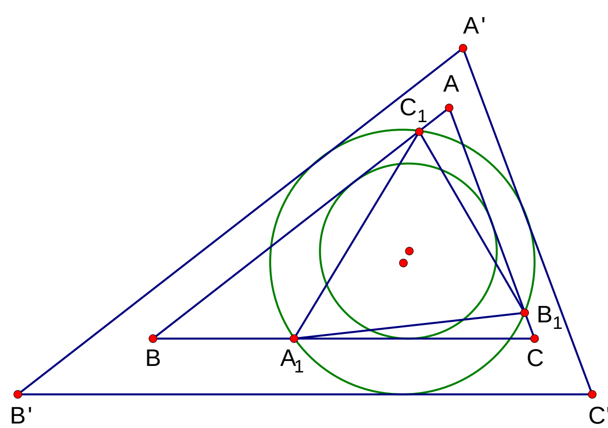
Tương tự $(B_2C_2, B_2A_2) \equiv (B_3C_3, B_3A_3) (\bmod \pi)$.

Tóm lại các tam giác $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ đồng dạng cùng hướng.

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó $R(A_1B_1C_1) \geq r(ABC)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BC, CA, AB.

Chứng minh.

Dựng $\Delta A'B'C'$ nhận $(A_1B_1C_1)$ là đường tròn nội tiếp và B'C', C'A', A'B' tương ứng song song với BC, CA, AB (h.12.3).



(h.12.3)

Dễ thấy các tam giác ABC, A'B'C' đồng dạng (cùng hướng).

Từ đó, chú ý rằng ΔABC nằm trong $\Delta A'B'C'$, suy ra

$$R(A_1B_1C_1)=r(A'B'C')=r(ABC).\frac{r(A'B'C')}{r(ABC)}=r(ABC)\sqrt{\frac{S(A'B'C')}{S(ABC)}}\geq r(ABC).$$

Vậy $R(A_1B_1C_1)\geq r(ABC).$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC và BC, CA, AB.

Trở lại giải bài toán 12.

Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB; D_0, E_0, F_0 theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC và BC, CA, AB; D_1, E_1, F_1 theo thứ tự là điểm đối xứng của D_0, E_0, F_0 qua trung điểm của BC, CA, AB.

Theo bổ đề 1, $S(A_1B_1C_1)=S(A_0B_0C_0).$

Theo bổ đề 2, các tam giác $A_0B_0C_0$, $A_2B_2C_2$ đồng dạng (cùng hướng).

Theo bổ đề 3, $R(A_0B_0C_0)\geq r(ABC).$

Vậy $\dfrac{S(A_1B_1C_1)}{S(A_2B_2C_2)}=\dfrac{S(A_0B_0C_0)}{S(A_2B_2C_2)}=\left(\dfrac{R(A_0B_0C_0)}{R(ABC)}\right)^2\geq\left(\dfrac{r(ABC)}{R(ABC)}\right)^2.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A_0, B_0, C_0 theo thứ tự trùng D_0, E_0, F_0 $\Leftrightarrow$ A_1, B_1, C_1 theo thứ tự trùng D_1, E_1, F_1.

Tóm lại $\dfrac{S(A_1B_1C_1)}{S(A_2B_2C_2)}$ nhỏ nhất khi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự trùng D_1, E_1, F_1.

Bài toán 13. Cho tứ giác ABCD, O = AC ∩ BD. Phân giác của các góc $\widehat{AOB},\widehat{BOC},\widehat{COD},\widehat{DOA}$ theo thứ tự cắt AB, BC, CA, AD tại M, N, P, Q. X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm của QM, MN, NP, PQ. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy.

Lời giải.

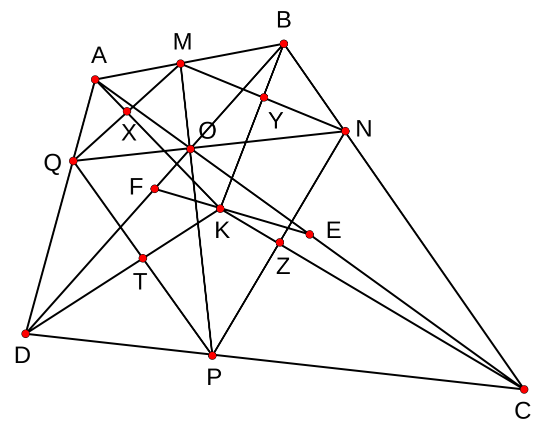
Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Nếu M thuộc cạnh BC của tam giác ABC thì $\overrightarrow{AM}=\dfrac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}+\dfrac{MB}{CB}\overrightarrow{AC}.$

Bổ đề trên chính là ví dụ 1.9, trang 12, **Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10**.

Trở lại giải bài toán 13.

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, BD; K là điểm chia trong đoạn EF theo tỉ số $\dfrac{AC}{BD}$ (h.13).



(h.13)

Ta có

$$\left(AC+BD\right)\overrightarrow{AK}=BD.\overrightarrow{AE}+AC.\overrightarrow{AF}=\frac{BD.AE}{AO}.\overrightarrow{AO}+\frac{AC}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{AC}{2AO}.BD.\overrightarrow{AO}+\frac{AC}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{AC}{2}\left(\frac{1}{AO}.\left(OD.\overrightarrow{AB}+OB.\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\right)$$

$$=\frac{AC}{2}\left(\frac{OD+OA}{OA}.\overrightarrow{AB}+\frac{OB+OA}{OA}.\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{AC}{2}\left(\frac{AD}{AQ}.\frac{AB}{AM}.\overrightarrow{AM}+\frac{AB}{AM}.\frac{AD}{AQ}\overrightarrow{AQ}\right)$$

$$=\frac{AC}{2}.\frac{AD}{AQ}.\frac{AB}{AM}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AQ}\right)$$

$$=\frac{AB.AC.AD}{AM.AQ}.\overrightarrow{AX}.$$

Do đó AX đi qua K.
Tương tự BY, CZ, DT cũng đi qua K.
Tóm lại AX, BY, CZ, DT đồng quy (tại K).

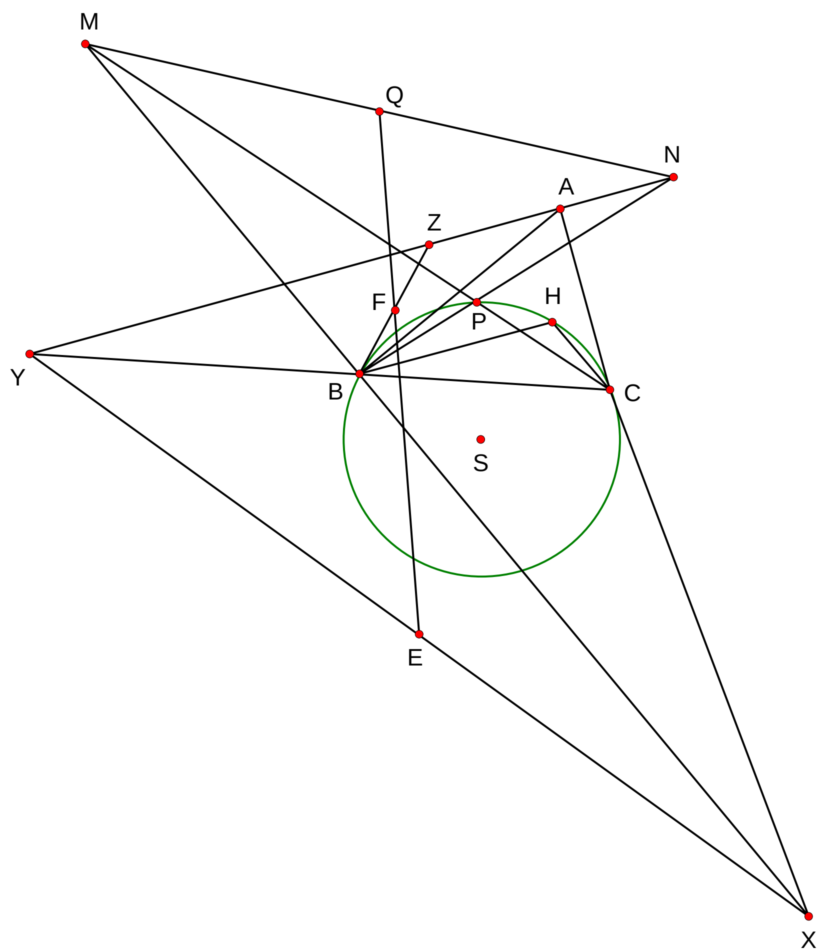
Bài toán 14. Cho tam giác ABC, trực tâm H. (S) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Điểm P thay đổi trên (S). Đường thẳng qua B vuông góc BA cắt PC tại M. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt PB tại N. Chứng minh rằng trung điểm MN thay đổi trên một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Gọi X là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với BA và tiếp tuyến với (S) tại C; Y là giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc với AC và BC; Z là giao điểmcủa đường thẳng qua A vuông góc với AC và tiếp tuyến với (S) tại B; E, F, Q theo thứ tự là trung điểm của XY, BZ, MN (h.14).

$$\text{Ta có } \frac{\overline{MX}}{\overline{MB}} = C(XBMH) \text{ (vì } CH \parallel BXM)$$
$$= C(CBPH) \text{ (vì } CX \equiv CC; CM \equiv CP)$$
$$= B(CBPH) \text{ (vì } B, C, H, P, M \text{ đồng viên)}$$
$$= B(YZNH) \text{ (vì } BC \equiv BY; BB \equiv BZ; BP \equiv BN)$$
$$= \frac{\overline{NY}}{\overline{NZ}} \text{ (vì } BH \parallel ZYN).$$

Từ đó, theo bổ đề trong bài toán 7, suy ra E, F, Q thẳng hàng.
Nói cách khác Q thay đổi trên một đường thẳng cố định, đường thẳng EF.



(h.14)

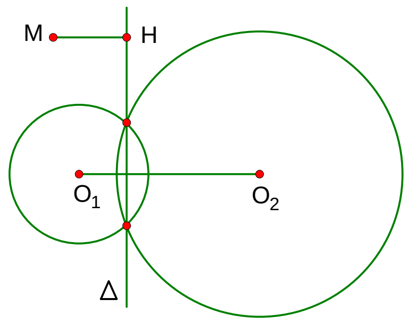
Bài toán 16. Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. YZ, ZX, XY theo thứ tự giao với (O) bằng $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}, \{C_1, C_2\}$. Chứng minh rằng I là tâm đẳng phương của các đường tròn (DA_1A_2), (EB_1B_2), (FC_1C_2).

Lời giải.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và điểm M. Nếu Δ là trục đẳng phương của (O_1), (O_2) và H là hình chiếu của M trên Δ thì $P_{M/(O_1)} - P_{M/(O_2)} = 2\overline{O_1O_2}.\overline{HM}$.

Chứng minh. (h.15.1).



(h.15.1)

Ta có

$$P_{M/(O_1)} - P_{M/(O_2)} = \left(P_{M/(O_1)} - P_{H/(O_1)}\right) - \left(P_{M/(O_2)} - P_{H/(O_2)}\right)$$
$$= \left(MO_1^2 - HO_1^2\right) - \left(MO_2^2 - HO_2^2\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{MO_1} - \overrightarrow{HO_1}\right)\left(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{HO_1}\right) - \left(\overrightarrow{MO_2} - \overrightarrow{HO_2}\right)\left(\overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{HO_2}\right)$$
$$= \overrightarrow{MH}\left(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{HO_1} - \overrightarrow{MO_2} - \overrightarrow{HO_2}\right)$$
$$= \overrightarrow{HM}.2\overrightarrow{O_2O_1} = 2\overrightarrow{MH}.2\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overline{O_1O_2}.\overline{HM}.$$

Trở lại giải bài toán 15 (h.15.2).

Gọi K là điểm đối xứng của D qua X; M là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O).

Lấy O_a thuộc tia đối của tia XM sao cho $O_aX = R$.

Gọi (O_a) là đường tròn tâm O_a và đi qua D; H là giao điểm của XM và trục đẳng phương của (O) và (O_a); P là giao điểm của DI và A1A2; Q là giao điểm thứ hai của DI và (DA_1A_2); N là hình chiếu của O_a trên DI.

Theo bổ đề trên $\overline{XB}.\overline{XC} - \overline{XD}.\overline{XK} = P_{X/(O)} - P_{X/(O_a)} = 2\overline{HX}.\overline{OO_a} = 2\overline{HX}.\overline{MX}$.

Do đó

$$HX = \frac{XB.XC - XD.XK}{2XM} = \frac{\frac{a2}{4} - \frac{(b-c)2}{4}}{2.\frac{a}{2}\tan\frac{A}{2}} = \frac{(p-b)(p-c)}{a\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}$$
$$= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \frac{S}{a} = \frac{1}{2}h_a.$$

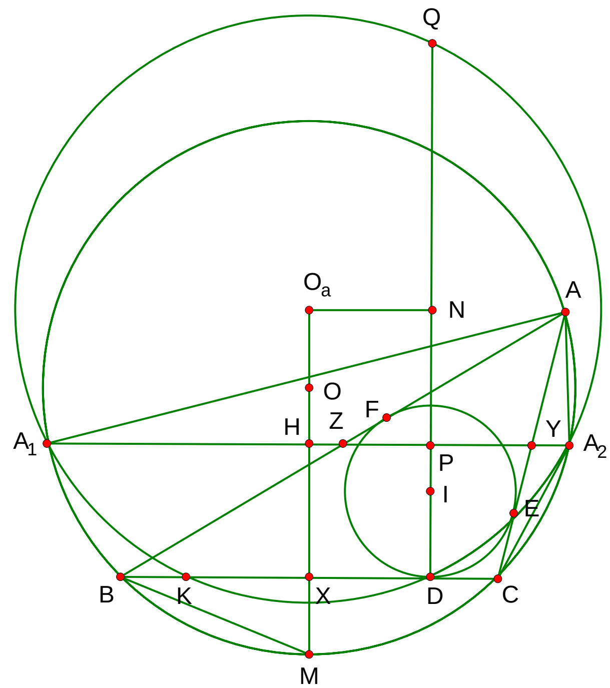
Điều đó có nghĩa là trục đẳng phương của (O) và (O_a) chính là A_1A_2. Do đó (O_a) chính là (DA_1A_2).

Từ đó suy ra $DQ = 2DN = 2XO_a = 2R$.

Do đó $P_{I/(DA_1A_2)} = \overline{IQ}.\overline{ID} = -IQ.ID = -(2R - r)r$.

Tương tự $P_{I/(EB_1B_2)} = -(2R-r)r$ và $P_{I/(FC_1C_2)} = -(2R-r)r$.

Vậy I là tâm đẳng phương của (DA_1A_2), (EB_1B_2), (FC_1C_2).



(h.15.2)