TRƯỜNG XUÂN 2015

I. Các bài toán

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. X là điểm đối xứng của D qua AI, MX lại cắt (I) tại Y, Z là điểm đối xứng của I qua Y; T là điểm đối xứng của Z qua BC. Chứng minh rằng I, B, C, T cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). K, H theo thứ tự là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. δ_A, δ_B theo thứ tự là đường thẳng Simson của A, B đối với các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng $\delta_A \perp OK$ khi và chỉ khi $\delta_B \perp OH$.

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, đường tròn ngoại tiếp (O). Các điểm K, L theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{KHL} = \widehat{BAC}$. M, N theo thứ tự là điểm đối xứng của K, L qua trung điểm AB, AC. Chứng minh rằng $O \in MN$.

Bài toán 4. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định trên (O). Các đường tròn (O_1), (O_2) thay đổi, nằm về một phía của AB, cùng tiếp xúc với AB, cùng tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc ngoài với nhau sao cho $\widehat{O_1AB} < \widehat{O_2AB}$. C là tiếp điểm của (O) và (O_1). Q là tiếp điểm của AB và (O_2). Chứng minh rằng CQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 5. Cho tam giác nhọn ABC. E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của B, C qua AC, AB. D là giao điểm của BF, CE. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng $AK \perp BC$.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC không cân tại A, G là trọng tâm, M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, AB, (O), (O_1), (O_2) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABM, ACN. P là giao điểm thứ hai của (O) và (G, GA). Q là giao điểm của MN và O_1O_2. Chứng minh rằng $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC. Điểm M chạy trên đoạn BC. (I_1), (I_2) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM. Tiếp tuyến chung XY khác BC của (I_1), (I_2) cắt AM tại N ($X \in (I_1)$; $Y \in (I_2)$). Z, T theo thứ tự là tiếp điểm của AM và (I_1), (I_2). K là giao điểm của XT và YZ. Chứng minh rằng NK đi qua một điểm cố định.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và điểm M không thuộc BC, CA, AB. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_0, B_0, C_0. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A_0, B_0, C_0 qua IA_1, IB_1, IC_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC, (O), (I_a) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A. Các tiếp tuyến chung của (O) và (Ia) cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

Bài toán 10. Cho tam giác nhọn ABC, AD, BE, CF là các đường cao. M, N theo thứ tự là trung điểm của DE, DF. $P = BN \cap CM; Q = DP \cap EF$. Chứng minh rằng $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC không cân tại A, (O) là đường tròn ngoại tiêp. Đường tròn (O') khác (O) và đi qua B, C. Đường đối trung xuất phát từ A của tam giác ABC cắt (O') tại L, M. Đường đối trung xuất phát từ L của tam giác LBC lại cắt (O') tại K. Chứng minh rằng (O) và (AMK) tiếp xúc với nhau.

Bài toán 12. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Điểm M thay đổi. X, Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. XH cắt YZ tại T. Chứng minh rằng $\dfrac{\overline{HX}}{\overline{HT}}$ không đổi.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nhọn và $\widehat{BAC} \neq 60°$, (O) là đường tròn ngoại tiếp. A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'. M là trung điểm của OO'. P. Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BB', CC' và (O). Chứng minh rằng:

1) $AM \perp B'C'$.
2) AM, BQ, CP đồng quy.

Bài toán 14. L là điểm Lemoine của tam giác ABC. M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. K là điểm đẳng giác của L đối với tam giác MNP. Chứng minh rằng K thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài toán 15. Cho tứ giác điều hoà ABCD, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Các tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy tại P. Điểm T thuộc AC. (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác TBD. Tiếp tuyến với (O') tại T theo thứ tự cắt AP, CP tại Q, R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với (O').

Bài toán 16. Cho hai tam giác ABC, AB_1C_1 đồng dạng ngược hướng và theo thứ tự có trực tâm là H, H_1. Chứng minh rằng BB_1, CC_1, HH_1 hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC không cân tại A, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. AI lại cắt (O) tại M. K là điểm đối xứng của I qua BC. MK lại cắt (O) tại L. Chứng minh rằng $OI \perp AL$.

Bài toán 18. Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Giả sử tồn tại điểm O sao cho OA, OB, OC, OA', OB', OC' theo thứ tự vuông góc với B'C', C'A', A'B', BC, CA, AB. Chứng minh rằng AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Bài toán 19. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Điểm D chạy trên (O) (khác A, B, C). E, F theo thứ tự là giao điểm của tiếp tuyến với (O) tại D và tiếp tuyến với (O) tại B, C. M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AE, AF và (O). Đường tròn (O_1) đi qua M, tiếp xúc với OA tại A và lại cắt AB tại P. Đường tròn (O_2) đi qua N, tiếp xúc với OA tại A và lại cắt AC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 20. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Điểm P chạy trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Phân giác của các góc $\widehat{ABP}, \widehat{ACP}$ theo thứ tự lại cắt (O) tại E, F. Các đường thẳng đi qua E, F theo thứ tự vuông góc phân giác của các góc $\widehat{PAC}, \widehat{PAB}$ cắt AF, AE tại M, N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 21. Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn Euler N, điểm Lemoine L. AH, BH, CH theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F. X, Y, Z theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy tại một điểm thuộc NL.

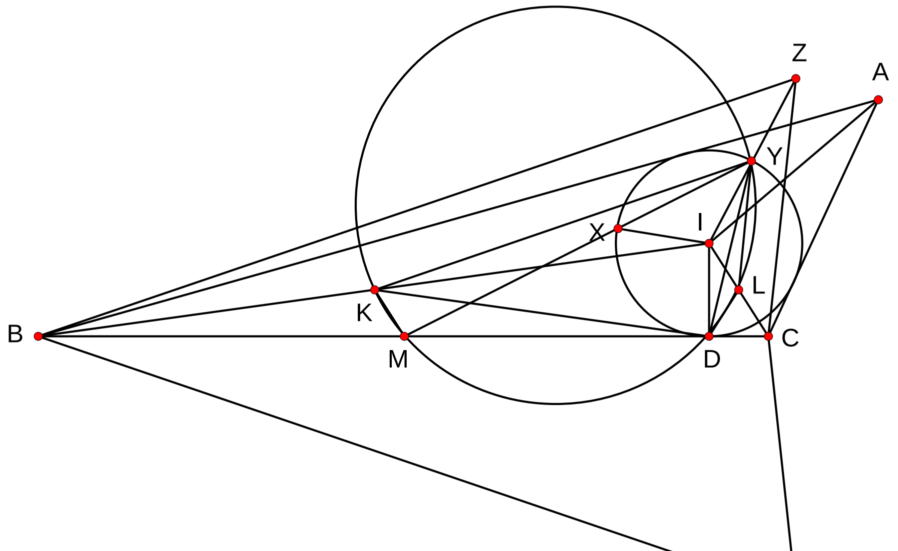
II. Các bài toán và lời giải

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. X là điểm đối xứng của D qua AI, MX lại cắt (I) tại Y, Z là điểm đối xứng của I qua Y; T là điểm đối xứng của Z qua BC. Chứng minh rằng I, B, C, T cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát giả sử $C \geq B$.

Gọi K, L theo thứ tự là trung điểm của IB, IC (h.10.2).



(h.1)

Ta có

$$\widehat{MKD} = \widehat{MKI} - \widehat{IKD} = \left(180° - \widehat{BIC}\right) - \left(180° - 2\widehat{KID}\right) \text{ (vì DK // IC và KI = KI = KD)}$$

$$= 2\widehat{KID} - \widehat{BIC} = \widehat{KID} - \widehat{DIC} = \left(90° - \frac{B}{2}\right) - \left(90° - \frac{C}{2}\right) = \frac{C-B}{2} = \frac{\widehat{XID}}{2} = \widehat{MYD}.$$

Do đó KMDY nội tiếp.

Tương tự LDMY nội tiếp.

Vậy KDLY nội tiếp.

Từ đó suy ra

$$\widehat{BTC} = \widehat{BZC} = \widehat{KYL} \ \text{(vì ZB // YK; ZC // YL)}$$
$$= 180° - \widehat{KDL} \ \text{(vì KDLY nội tiếp)}$$
$$= 180° - \widehat{KIL} \ \text{(vì I và D đối xứng với nhau qua KL)}$$
$$= 180° - \widehat{BIC}.$$

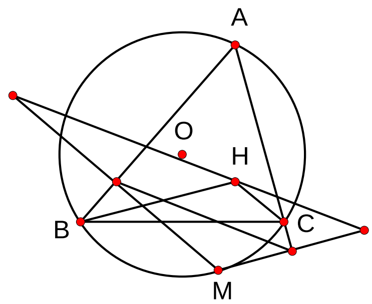
Điều đó có nghĩa là $\widehat{BTC} + \widehat{BIC} = 180°$ (đpcm).

Bài toán 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). K, H theo thứ tự là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. δ_A, δ_B theo thứ tự là đường thẳng Simson của A, B đối với các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng $\delta_A \perp OK$ khi và chỉ khi $\delta_B \perp OH$.

Lời giải.

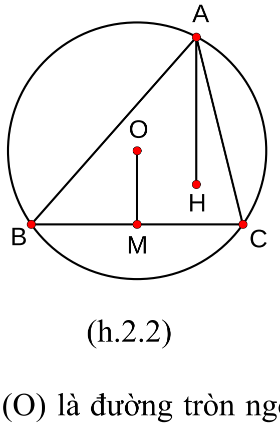
Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, M thuộc (O). Khi đó đường thẳng Simson của M đối với tam giác ABC song song với đường thẳng Steiner của M đối với tam giác ABC (h.2.1).



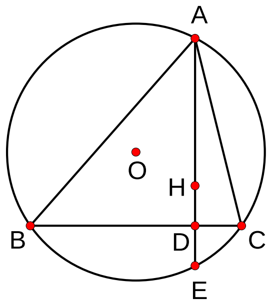
(h.2.1)

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm, M là trung điểm của BC. Khi đó $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ (h.2.2).



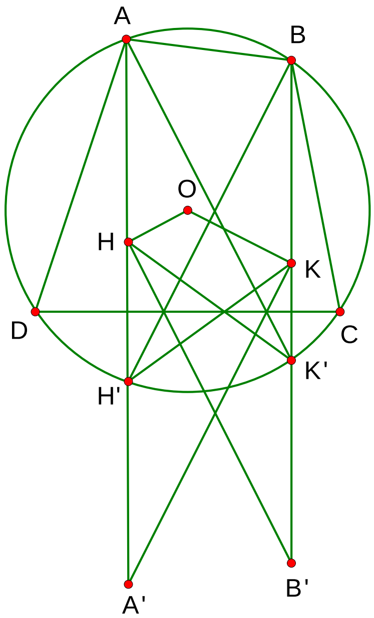
(h.2.2)

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. AH cắt BC tại D và lại cắt (O) tại E. Khi đó $DH = DE$.



(h.2.3)

Trở lại giải bài toán 2.
Gọi A', B', K', H' theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, K, H qua CD (h.2.4).



(h.2.4)

Theo bổ đề 1, $\delta_A \,//\, A'K; \delta_B \,//\, B'H$ (1).

Theo các bổ đề 2, 3, $\overrightarrow{H'A'} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{K'B'}$.

Do đó $A'K \,//\, H'B; B'H \,//\, K'A$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\delta_A \,//\, H'B; \delta_B \,//\, K'A$.

Theo bổ đề 3, $KH' = HK'$.

Vậy các điều kiện sau tương đương.

1) $\delta_A \perp OK$.

2) $H'B \perp OK$.

3) $KH' = KB$.

4) $HK' = HA$.

5) $K'A \perp OH$.

6) $\delta_B \perp OH$.

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, đường tròn ngoại tiếp (O). Các điểm K, L theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{KHL}=\widehat{BAC}$. M, N theo thứ tự là điểm đối xứng của K, L qua trung điểm AB, AC. Chứng minh rằng $O \in MN$.

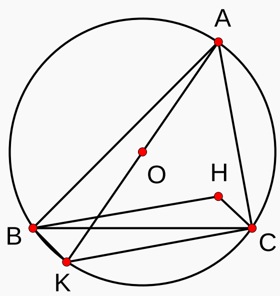
Lời giải.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H trực tâm, . AO lại cắt (O) tại K. Khi đó HBKC là hình bình hành (h.3.1).

Trở lại giải bài toán 3.

Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BO, CO và (O); S là giao điểm của MQ và NP (h.3.2).



(h.3.1)

Theo bổ đề trên, HAQB, HAPC là hình bình hành.

Do đó HKQM, HLQN là hình bình hành.

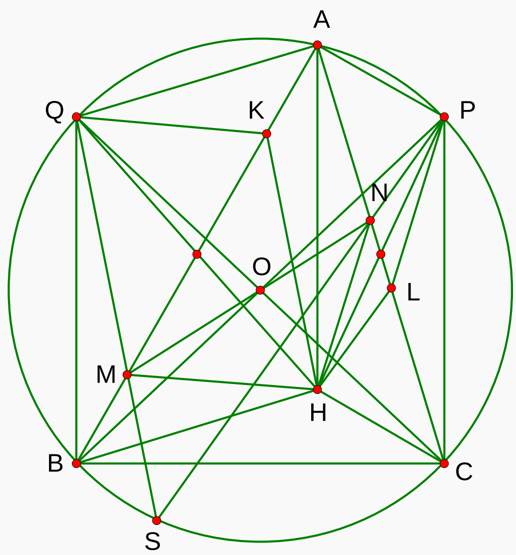
Vậy $QA // HB; PA // HC; QM // HK; PN // HL$.

Điều đó có nghĩa là

$(SQ,SP)\equiv(HK,HL)\equiv(AL,AK)\equiv(AC,AB)\equiv(HB,HC)\equiv(AQ,AP)(\bmod \pi)$.

Vậy S thuộc (O).

Từ đó, áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{matrix}BCS\\QPA\end{matrix}$, chú ý rằng $BP\cap CQ=O;$ $BA\cap SQ=M; CA\cap SP=N$, suy ra $O\in MN$.



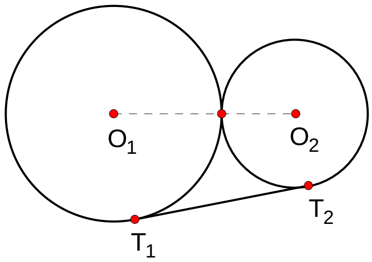
(h.3.2)

Bài toán 4. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định trên (O). Các đường tròn (O_1), (O_2) thay đổi, nằm về một phía của AB, cùng tiếp xúc với AB, cùng tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc ngoài với nhau sao cho $\widehat{O_1AB} < \widehat{O_2AB}$. C là tiếp điểm của (O) và (O_1). Q là tiếp điểm của AB và (O_2). Chứng minh rằng CQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Ta cần có hai bổ đề.

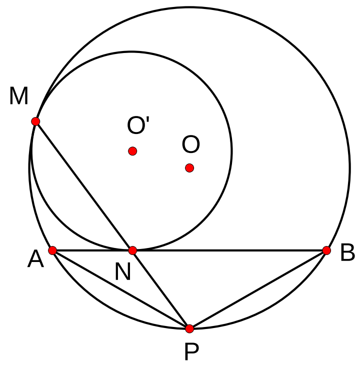
Bổ đề 1. Nếu các đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2) tiếp xúc ngoài với nhau và T_1T_2 là tiếp tuyến chung ngoài của chúng thì $T_1T_2 = 2\sqrt{R_1R_2}$ (h.4.1).



(h.4.1)

Bổ đề 2. Cho đường tròn (O, R), AB là một dây của (O, R). Đường tròn (O’, R’) tiếp xúc trong với (O, R) tại M, tiếp xúc với AB tại N. MN lại cắt (O, R) tại P. Khi đó

$$PA = PB = \sqrt{PM.PN} \text{ và } \frac{MP}{MN} = \frac{R}{R'} \text{ (h.4.2).}$$



(h.4.2)

Trở lại giải bài toán 4.

Gọi E là giao điểm thứ hai của CQ và (O); P là tiếp điểm của (O_1) và AB; D là tiếp điểm của (O_2) và (O); M là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C, D của (O). H là giao điểm của AB và MO; N là giao điểm thứ hai của (O) và MO; R, R_1, R_2 theo thứ tự là bán kính của (O), (O_1), (O_2) (h.4.4).

Đặt $\widehat{ACM} = \alpha; \widehat{QCM} = \beta$.

Theo bổ đề 1, $PQ = 2\sqrt{R_1.R_2}$.

Theo bổ đề 2, $M = CP \cap DQ$ và $\frac{R_1}{R} = \frac{CP}{CM}; \frac{R_2}{R} = \frac{DQ}{DM}; MC.MP = MD.MQ = MA^2$.

Vậy, chú ý rằng $MN = 2R; AB = 2AH$, ta có

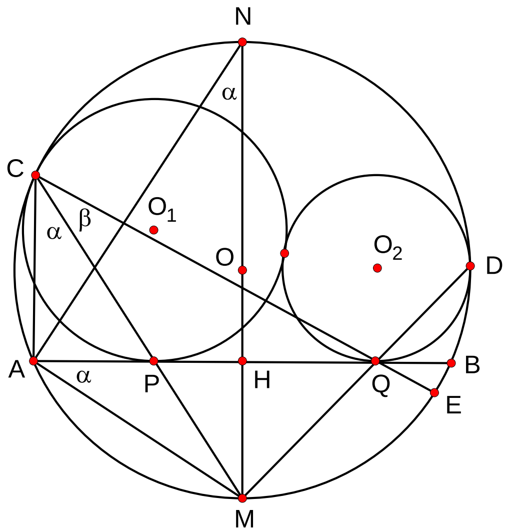
$$PQ^2 = 4R_1.R_2 = 4\frac{R_1}{R}.\frac{R_2}{R}.R^2 = 4\frac{CP}{CM}.\frac{DQ}{DM}.R^2 = 4\frac{CP.MP}{MC.MP}.\frac{DQ.MQ}{MD.MQ}.R^2$$

$$= 4\frac{CP.MP}{MA^2}.\frac{DQ.MQ}{MA^2}.R^2 = 4\frac{AP.BP.AQ.BQ}{AB^2}.\left(\frac{MN}{MA}\right)^2.\left(\frac{AH}{AM}\right)^2.$$

Kết hợp với $\frac{MA}{MN} = \sin\alpha; \frac{AH}{AM} = \cos\alpha,$ suy ra

$$4\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{AB^2.PQ^2}{AP.BP.AQ.BQ} = \frac{S^2(CAB).S^2(CPQ)}{S(CAP).S(CBP).S(CAQ).S(CBQ)}$$

$$= \frac{\sin^2 2\alpha.\sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}.$$



(h.4.4)

Từ đó, sau một vài biến đổi lượng giác đơn giản, suy ra $\cot^2\beta = 1 + \cot^2\alpha$.

Vậy $\widehat{ACQ} = \alpha + \beta = \alpha + \operatorname{arccot}\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ không đổi .

Điều đó có nghĩa là E cố định (đpcm). □

Bài toán 5. Cho tam giác nhọn ABC. E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của B, C qua AC, AB. D là giao điểm của BF, CE. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng $AK \perp BC$.

Lời giải.

Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp $\Delta DEF; R_K$ là bán kính của (K) (h.5).

Gọi X là hình chiếu của A trên BC.

Dễ thấy $\widehat{ABC} = \widehat{ABF}; \widehat{ACB} = \widehat{ACE}$.

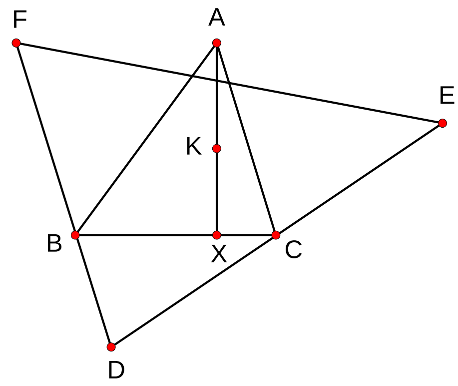
Do đó A là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh D của ΔDBC

Vậy, chú ý rằng $XB = \frac{CB+CD-BD}{2}; XC = \frac{BC+BD-CD}{2}; BC = BF = CE,$ ta có

$$AB^2 - AC^2 = XB^2 - XC^2 = \left(\frac{CB + CD - BD}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC + BD - CD}{2}\right)^2 = BC(CD - BD)$$

$$= CE.CD - BF.BD = -P_{C/(K)} + P_{B/(K)} = -\left(KC^2 - R_K^2\right) + \left(KB^2 - R_K^2\right) = KB^2 - KC^2.$$

Do đó $AK \perp BC$.

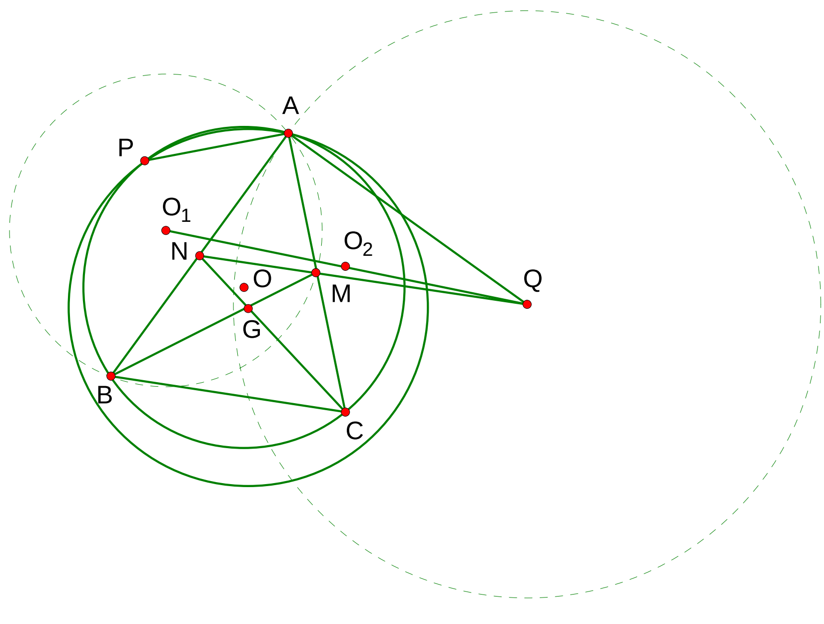


(h.5)

Bài toán 6. Cho tam giác ABC không cân tại A, G là trọng tâm, M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, AB, (O), (O_1), (O_2) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABM, ACN. P là giao điểm thứ hai của (O) và (G, GA). Q là giao điểm của MN và O_1O_2. Chứng minh rằng $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng chứa phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ (h.6).



(h.6)

Đặt $k = \frac{1}{2}AB.AC$.

Qua $Đ_\Delta.N_A^k$, B, C, M, N theo thứ tự biến thành M, N, B, C.

Do đó qua $Đ_{\Delta}.N_A^k$, các đường tròn (O$_1$), (O$_2$), (O) theo thứ tự biến thành các đường thẳng BM, CN, MN (1).

Từ (1), chú ý rằng đường thẳng O_1O_2 vuông góc với các đường tròn (O$_1$), (O$_2$) và (G, GA) vuông góc với BM, CN, suy ra đường thẳng O_1O_2 biến thành đường tròn (G, GA) (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$Đ_{\Delta}.N_A^k(Q) = Đ_{\Delta}.N_A^k(MN \cap O_1O_2) = Đ_{\Delta}.N_A^k(MN) \cap Đ_{\Delta}.N_A^k(O_1O_2)$$
$$= (O)\setminus\{A\} \cap (G, GA)\setminus\{A\} = P.$$

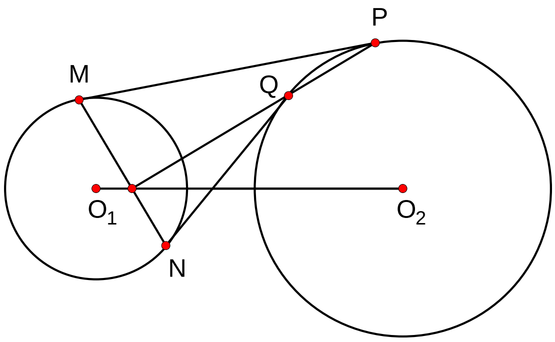
Điều đó có nghĩa là $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC. Điểm M chạy trên đoạn BC. (I$_1$), (I$_2$) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM. Tiếp tuyến chung XY khác BC của (I$_1$), (I$_2$) cắt AM tại N ($X \in (I_1)$; $Y \in (I_2)$). Z, T theo thứ tự là tiếp điểm của AM và (I$_1$), (I$_2$). K là giao điểm của XT và YZ. Chứng minh rằng NK đi qua một điểm cố định.

Lời giải. (h.7.1).

Trước hết ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. MN, PQ, O_1O_2 đồng quy (h.7.1).



(h.7.1)

Trở lại giải bài toán 7.

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp ΔABC; P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của (I$_1$) và BM, BA; Q, S theo thứ tự là tiếp điểm của (I$_2$) và CM, CA; D, E theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và CB, CA, F là giao điểm của XZ và YT; L là giao điểm của NK và YT (h..7.2).

Ta thấy

$$2AN = AZ - NZ + AT - NT = AR - NX + AS - NY = AB - RB + AC - SC - XY$$
$$= AB + AC - PB - QC - PQ = AB + AC - BC = 2AE.$$

Do đó $NY = NT = AT - AN = AS - AE = ES = CE - CS = CD - CQ = DQ$.

Vậy $ND \,//\, YQ$ (1).

Dễ thấy $(LFTY) = -1$ và các tam giác YFX, TFZ đồng dạng.

Do đó $\dfrac{LT}{LY} = \dfrac{FT}{FY} = \dfrac{FZ}{FX}$ (2).

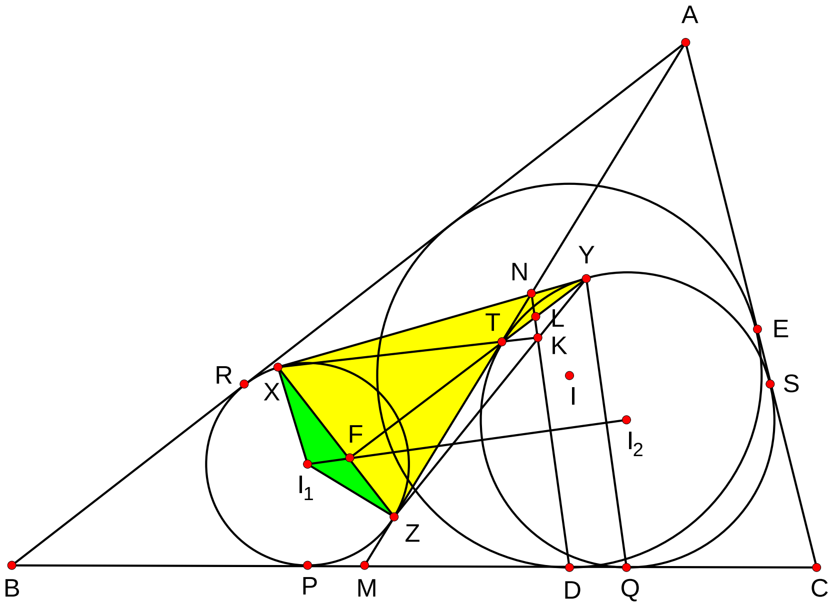
Dễ thấy các tam giác I_1XZ, NYT đồng dạng cùng hướng (3).

Từ (2) và (3) suy ra tam giác I_1XF, NYL đồng dạng cùng hướng.

Mặt khác, theo bổ đề trên, F thuộc I_1I_2.

Vậy $$(NL, I_1I_2) \equiv (NL, I_1F) \equiv (NY, I_1X) \equiv \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Do đó $NL \perp I_1I_2$ (4).



(h.7.2)

Từ (1) và (4), chú ý rằng $YQ \perp I_1I_2$, suy ra $ND \equiv NL$.

Điều đó có nghĩa là đường thẳng NK đi qua một điểm cố định (điểm D).

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và điểm M không thuộc BC, CA, AB. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_0, B_0, C_0. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A_0, B_0, C_0 qua IA_1, IB_1, IC_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Lời giải.

Xét cực và đối cực đối với (I) (h.8).

Đặt $A_3 = A_1A_2 \cap B_0C_0; B_3 = B_1B_2 \cap C_0A_0; C_3 = C_1C_2 \cap A_0B_0;$

$A_4 = A_0A_2 \cap B_0C_0; B_4 = B_0B_2 \cap C_0A_0; C_4 = C_0C_2 \cap A_0B_0.$

Dễ thấy A_4, B_4, C_4 theo thứ tự là cực của AM, BM, CM.

Kết hợp với AM, BM, CM đồng quy, suy ra A_4, B_4, C_4 thẳng hàng.

Do đó, theo định lí Menelaus, $\prod \dfrac{\overline{A_4B_0}}{\overline{A_4C_0}} = 1.$

Dễ thấy AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy.

Do đó, theo định lí Ceva, $\prod \dfrac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} = -1.$

Vì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy (tại M) nên, theo định lí Ceva, $\prod \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = -1.$

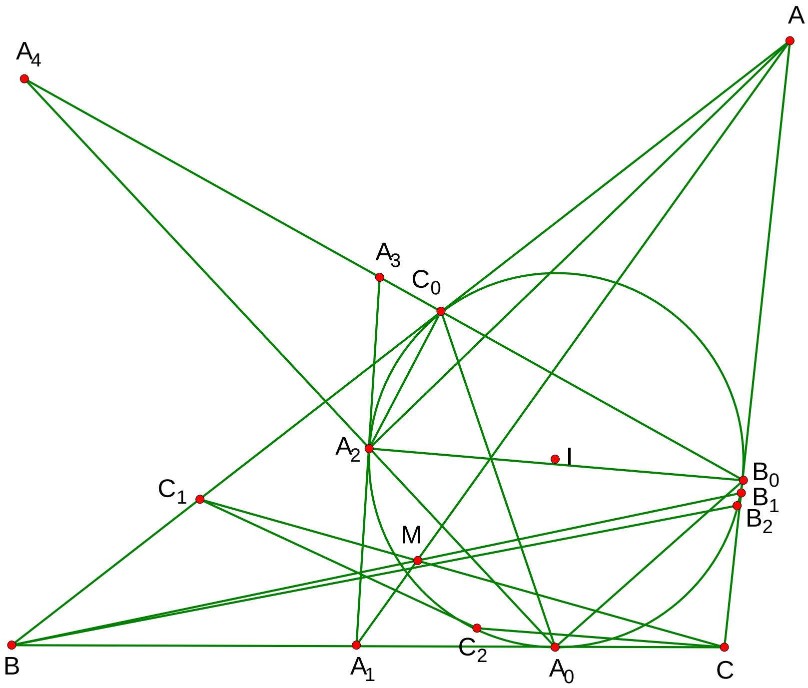
Vậy, chú ý rằng A_0A_2, A_0A_0, A_0B_0, A_0C_0 theo thứ tự vuông góc với IA_1, IA_0, IC, IB, ta có

$$\prod \frac{\overline{A_3B_0}}{\overline{A_3C_0}} = \prod \frac{\overline{A_3B_0}}{\overline{A_3C_0}} : \prod \frac{\overline{A_4B_0}}{\overline{A_4C_0}} = \prod \frac{\overline{A_3B_0}}{\overline{A_3C_0}} : \frac{\overline{A_4B_0}}{\overline{A_4C_0}} = \prod (A_3A_4B_0C_0)$$

$$= \prod A_2(A_3A_4B_0C_0) = \prod A_2(A_2A_0B_0C_0) = \prod A_0(A_2A_0B_0C_0)$$

$$= \prod I(A_1A_0CB) = \prod (A_1A_0CB) = \prod (A_0A_1BC) = \prod \frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} : \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$$

$$= \prod \frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} : \prod \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = (-1) : (-1) = 1.$$



(h.8)

Do đó, theo định lí Menelaus, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Từ đó, chú ý rằng A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là cực của AA_2, BB_2, CC_2, suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC, (O), (I_a) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A. Các tiếp tuyến chung của (O) và (Ia) cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

Lời giải.

Gọi X, Y, Z là tiếp điểm của các tiếp tuyến chung ngoài của (O), (I_a) và (O), (I_a); P là giao điểm thứ hai của AI_a và (O); H là giao điểm của PO và BC (h.9).

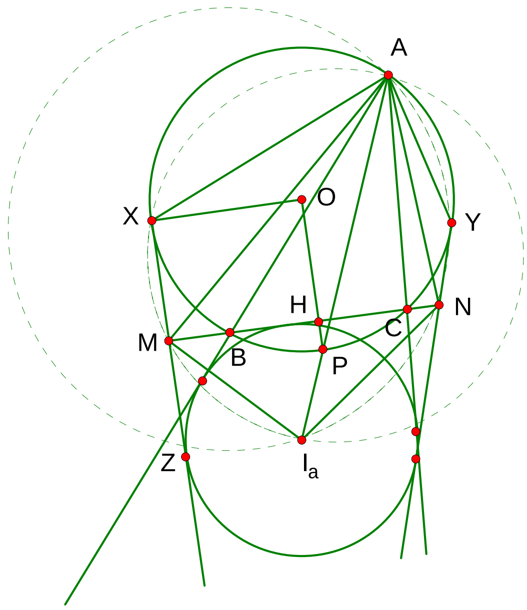
Chú ý rằng XOHM nội tiếp, ta có

$$\widehat{XAI_a} = \widehat{XAP} = \frac{1}{2}\widehat{XOP} = \frac{1}{2}\widehat{XOH} = \frac{1}{2}\widehat{ZMH} = \widehat{ZMI_a}.$$

Do đó tứ giác $AXMI_a$ nội tiếp.

Tương tự $AYNI_a$ nội tiếp.

Vậy $\widehat{MAB} = \widehat{MAI_a} - \widehat{BAI_a} = \widehat{MXI_a} - \widehat{BAI_a} = \widehat{NYI_a} - \widehat{CAI_a} = \widehat{NAI_a} - \widehat{CAI_a} = \widehat{NAC}$.



(h.9)

Bài toán 10. Cho tam giác nhọn ABC, AD, BE, CF là các đường cao. M, N theo thứ tự là trung điểm của DE, DF. $P = BN \cap CM; Q = DP \cap EF$. Chứng minh rằng $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Lời giải 1.

Ta cần có hai bổ đề.

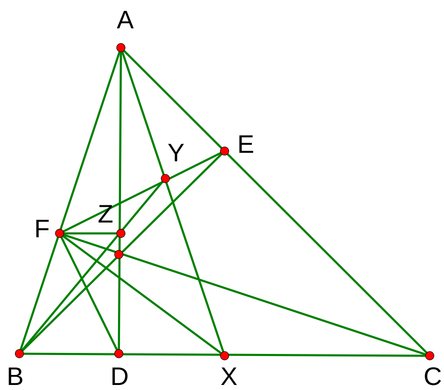
Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nhọn, AD, BE, CF là các đường cao. X là trung điểm của BC. Y là giao điểm của BX và EF. Z là hình chiếu của F trên AD. Khi đó B, Y, Z thẳng hàng.

Chứng minh. (h.10.1).

Dễ thấy $\widehat{CFD} = \widehat{CFE}$ và $\widehat{CFX} = \widehat{XCF} = \widehat{CFZ}$.

Từ đó, chú ý rằng $FZ \equiv FZ // BX$ và phép đối xứng trục bảo toàn tỉ số kép, suy ra

$X(FBYZ) = X(FBAZ) = Z(FBAX) = Z(FBDX) = F(ZBDX) = F(XBYZ)$.



(h.10.1)

Trở lại giải bài toán 10 (h.10.2).

Vì M, N theo thứ tự là trung điểm cuả DE, DF nên BN, CN là đường đối trung của ΔABC.

Do đó P là điểm Lemoine của ΔABC.

Vậy AP lại là đường đối trung của ΔABC.

Điều đó có nghĩa là L lại là trung điểm của EF.

Gọi X là trung điểm của BC; $Q' = AX \cap EF$.

Dễ thấy AQ’ là đường đối trung của ΔAEF.

Vậy $\widehat{LAF} = \widehat{Q'AE}$.

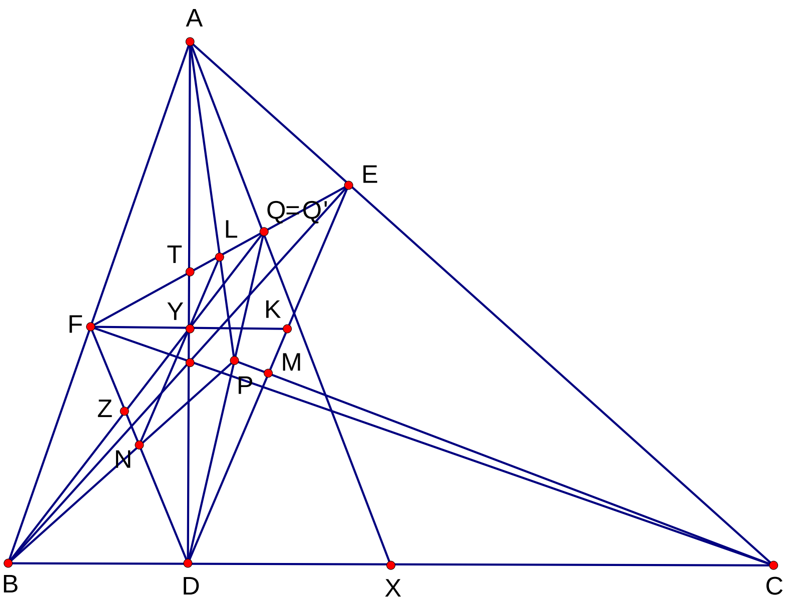
Điều đó có nghĩa là $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$ tương đương với D, P, Q’ thẳng hàng.

Gọi Y là hình chiếu của Y trên AD; $K = FY \cap DE; Z = BY \cap DF; T = EF \cap AD$.

Theo bổ đề trên, Q’, Y, Z thẳng hàng.

Dễ thấy Y là trung điểm của FK.

Kết hợp với L, N theo thứ tự là trung điểm của FE, FD, suy ra L, Y, N thẳng hàng.



(h.10.2)

Vậy $A(BDPQ') = A(FTLQ') = (FTLQ') = (FDNZ) = B(FDNZ) = B(ADPQ')$.

Do đó D, P, Q’ thẳng hàng (đpcm).

Chú ý.

Lời giải trên của bạn Lương Quốc Trung, học sinh Trường THPT chuyên Amsterdam, Hà Nội.

Lời giải 2. (h.10.3).

Vì M, N theo thứ tự là trung điểm cuả DE, DF nên BN, CN là đường đối trung của ΔABC.

Do đó P là điểm Lemoine của ΔABC.

Vậy AP lại là đường đối trung của ΔABC.

Điều đó có nghĩa là L lại là trung điểm của EF.

Gọi X là trung điểm của BC; $Q' = AX \cap EF$.

Dễ thấy AQ’ là đường đối trung của ΔAEF.

Vậy $\widehat{LAF} = \widehat{Q'AE}$.

Điều đó có nghĩa là $\angle PAB = \angle QAC$ tương đương với D, P, Q’ thẳng hàng.

Gọi $P' = AL \cap DQ'$.

Dễ thấy D, P, Q’ thẳng hàng khi và chỉ khi P’ là điểm Lemoine của ΔABC.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC; S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B, C; $V = AL \cap BC$.

Dễ thấy A, L, V, S thẳng hàng.

Dễ thấy $XE = XF$.

Kết hợp với $LE = LF$, suy ra $XL \perp EF$.

Dễ thấy $\angle LQ'X = \angle AQ'E = \angle AVB = \angle LVB$.

Do đó tứ giác LVXQ’ nội tiếp.

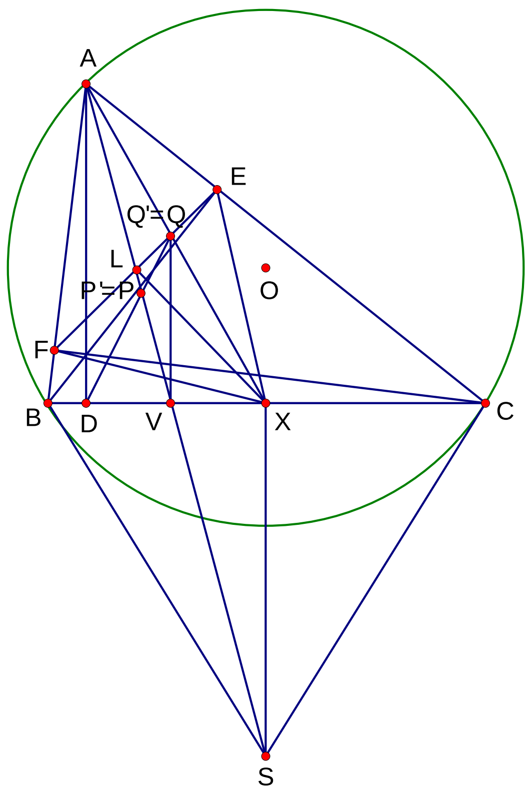
Kết hợp với $XL \perp EF$, suy ra $Q'V \perp BC$.

Điều đó có nghĩa là $Q'V \parallel AD$.

Vậy, theo định lí Thales, ta có $\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'V}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{Q'V}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{XS}} \cdot \frac{\overline{XS}}{\overline{Q'V}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VS}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{AV}} = -\frac{\overline{SA}}{\overline{SV}}$.

Điều đó có nghĩa là $(AVP'S) = -1 = (AVPS)$.

Nói cách khác $P = P'$ (đpcm).

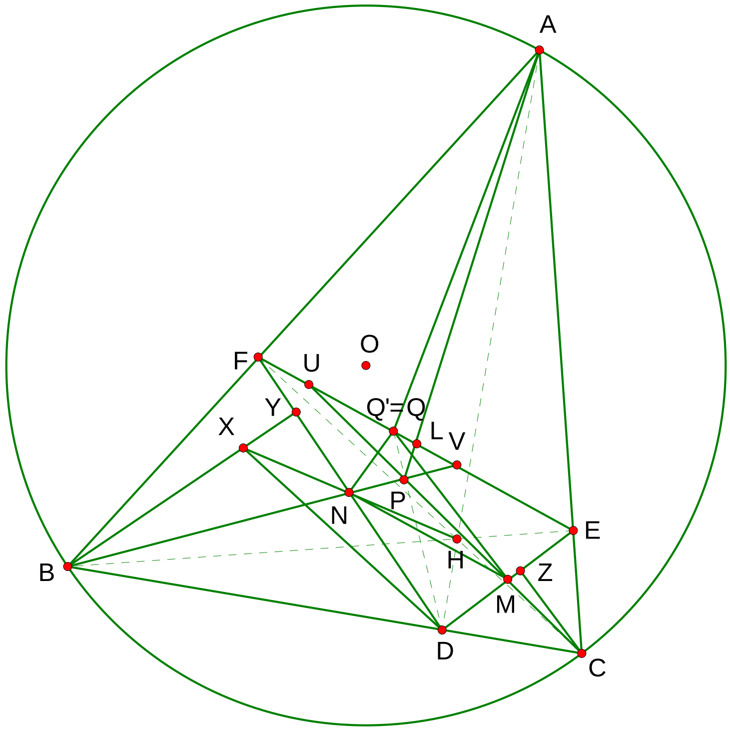


(h.10.3)

Chú ý.

Lời giải trên của bạn Doãn Thanh Tùng, học sinh TRường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

Lời giải 3. (h.10.4).



(h.10.4)

Vì M, N theo thứ tự là trung điểm cuả DE, DF nên BN, CN là đường đối trung của ΔABC.

Do đó P là điểm Lemoine của ΔABC.

Vậy AP lại là đường đối trung của ΔABC.

Điều đó có nghĩa là L lại là trung điểm của EF.

Gọi X là trung điểm của BC; $Q' = AX \cap EF$.

Dễ thấy AQ’ là đường đối trung của ΔAEF.

Vậy $\widehat{LAF} = \widehat{Q'AE}$.

Điều đó có nghĩa là $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$ tương đương với D, P, Q’ thẳng hàng.

Vì AQ’ là đường đối trung của ΔAEF nên , chú ý rằng $\widehat{PAB} = \widehat{Q'AC}; \Delta AEF \backsim \Delta ABC$, ta có $\dfrac{Q'F}{Q'E} = \dfrac{AF^2}{AE^2} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$ (1).

Gọi $V = BP \cap EF; U = CP \cap EF$; H là trực tâm của ΔABC; X là điểm đối xứng của H qua N; $Y = BX \cap DE$; Z là hình chiếu của C trên DE.

Vì $\widehat{BDH} = 90° = \widehat{BFH}$ và DHFX là hình bình hành nên, theo bổ đề trong bài toán 3, X là trực tâm của ΔBDF.

Vậy $\dfrac{VF}{VE} = \dfrac{S(BVF)}{S(BVE)} = \dfrac{S(BNF)}{S(BNE)} = \dfrac{S(BNF)}{\dfrac{BE}{BH}S(BNH)} = \dfrac{S(BNF)}{\dfrac{BY}{BX}S(BNX)} = \dfrac{S(BND)}{S(BNY)} = \dfrac{ND}{NY}$.

Do đó $\dfrac{VF}{EF} = \dfrac{ND}{YD}$.

Tương tự $\dfrac{UE}{FE} = \dfrac{MD}{ZD}$.

Vậy $\frac{VF}{UE}=\frac{VF}{EF}.\frac{FE}{UE}=\frac{ND}{MD}.\frac{ZD}{YD}=\frac{FD}{ED}.\frac{CD}{BD}=\frac{FD}{BD}.\frac{CD}{ED}=\frac{AC}{AB}.\frac{AC}{AB}=\frac{AC^2}{AB^2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{Q'F}{Q'E}=\frac{VF}{UE}$.

Do đó $\frac{UE}{Q'E}=\frac{VF}{Q'F}$.

Kết hợp với $MN // EF$, suy ra

$$M(PQ'DN)=M(UQ'EN)=\frac{UE}{Q'E}=\frac{VF}{Q'F}=N(VQ'FM)=N(PQ'DM).$$

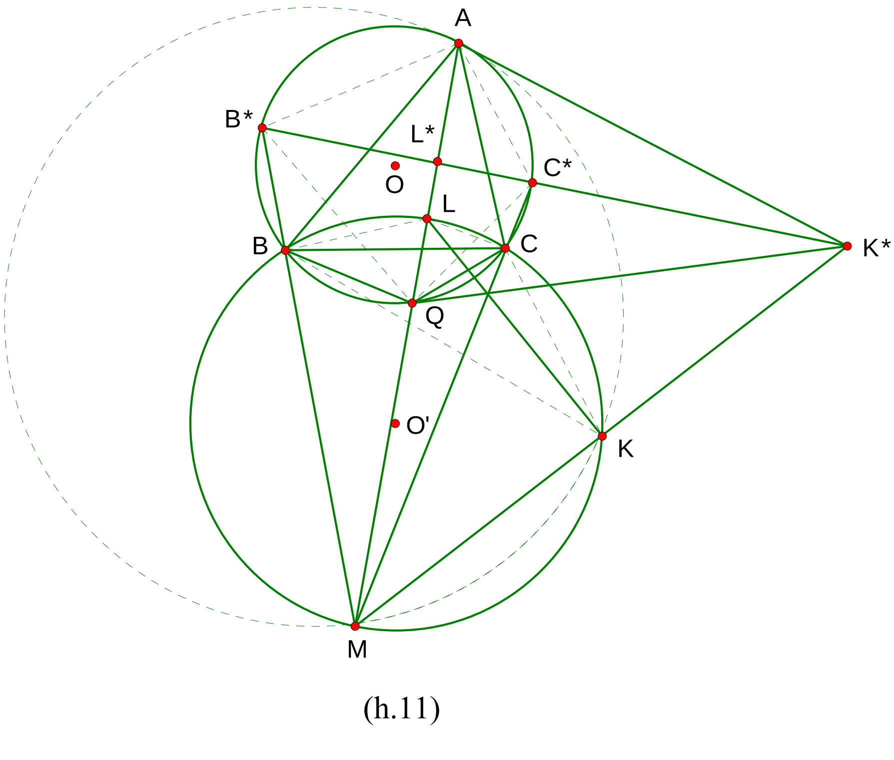
Điều đó có nghĩa là D, P, Q' thẳng hàng (đpcm).

Bài toán 11. Cho tam giác ABC không cân tại A, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn (O') khác (O) và đi qua B, C. Đường đối trung xuất phát từ A của tam giác ABC cắt (O') tại L, M. Đường đối trung xuất phát từ L của tam giác LBC lại cắt (O') tại K. Chứng minh rằng (O) và (AMK) tiếp xúc với nhau.

Lời giải.

Gọi Q là giao điểm thứ hai của (O) là AL (h.11).

.



(h.11)

Qua phép nghịch đảo $N_M^{P_{M/(O)}}$, các điểm A, Q, B, C, L, K theo thứ tự biến thành các điểm Q, A, B*, C*, L*, K*.

Vì LK là đường đối trung của ΔLBC nên BLCK là tứ giác điều hoà.

Từ đó, chú ý rằng B*, C*, L*, K* thẳng hàng, suy ra

$Q(B^*C^*L^*K^*)=(B^*C^*L^*K^*)=M(B^*C^*L^*K^*)=M(BCLK)=-1$ (1).

Vì AL là đường đối trung của ΔABC nên ABQC là tứ giác điều hoà.

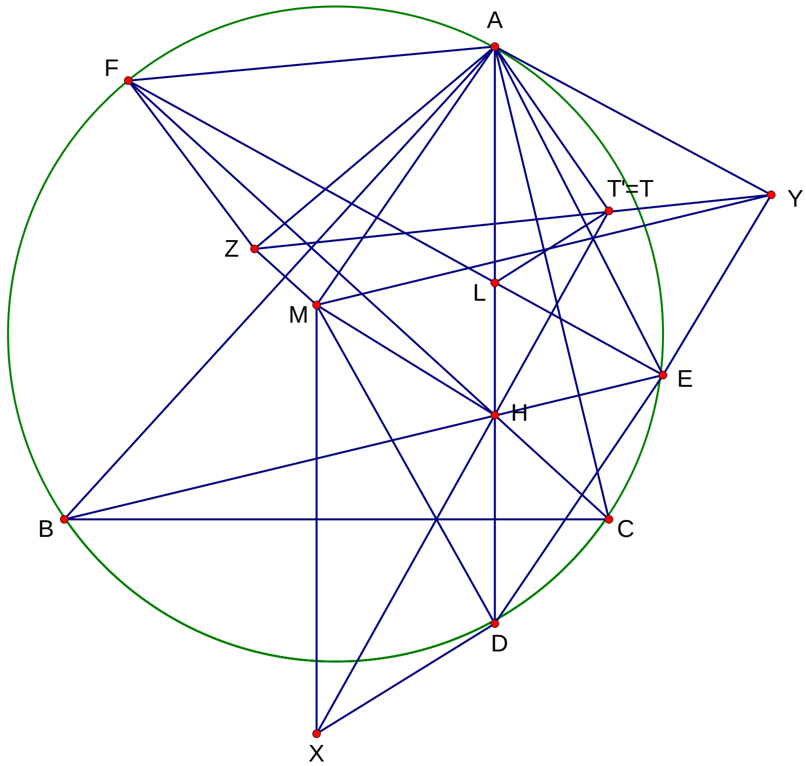
Do đó QB*AC* là tứ giác điều hoà.

Vậy $Q(B^*C^*LQ)=Q(B^*C^*AQ)=-1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $Q(B^*C^*LK^*) = Q(B^*C^*LQ)$.
Vậy $K^*Q \equiv QQ$.
Nói cách khác K*Q tiếp xúc với (O).
Điều đó có nghĩa là đường tròn (MAK) tiếp xúc với đường tròn (O)

Bài toán 12. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Điểm M thay đổi. X, Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. XH cắt YZ tại T. Chứng minh rằng $\frac{\overline{HX}}{\overline{HT}}$ không đổi.

Lời giải. (h.12).



(h.12)

Theo bổ đề 3 trong bài toán 2, các cặp tam giác AFZ, AHM; AHM, AEY bằng nhau ngược hướng.

Do đó các tam giác AFZ, AEY bằng nhau cùng hướng.

Vậy các tam giác AFE, AZY đồng dạng cùng hướng.

Lấy T' thuộc ZY sao cho $\frac{\overline{T'Z}}{\overline{T'Y}} = \frac{\overline{LF}}{\overline{LE}}$.

Đương nhiên các tam giác AFL, AZT' đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác AFZ, ALT' đồng dạng cùng hướng.

Vậy các tam giác AHM, ALT' đồng dạng ngược hướng (1).

Dễ thấy

$(EA, EL) \equiv (EA, EF) \equiv (CA, CF) \equiv (BE, BA) \equiv (DE, DA) \equiv (DE, DL) \pmod{\pi}$.

Do đó AE tiếp xúc với đường tròn (DLE).

Vậy $\overline{AD}.\overline{AL} = \overline{AE}^2 = \overline{AH}^2$.

Điều đó có nghĩa là $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AL}}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra các tam giác ADM, AHT’ đồng dạng ngược hướng.
Từ đó, chú ý rằng D, X là ảnh của H, M qua phép đối xứng trục BC, suy ra

$$(HX, HD) \equiv (DH, DM) \equiv (DA, DM) \equiv (HT', HA) \equiv (HT', HD).$$

Do đó $HX \equiv HT'$.
Điều đó có nghĩa là $T = HX \cap YZ = HT' \cap YZ = T'$.

Từ đó, chú ý rằng các tam giác DHM, T’LH đồng dạng ngược hướng, suy ra

$$(TL, TH) \equiv (T'L, T'H) \equiv (MD, MH) \equiv (XD, XH) \pmod{\pi}.$$

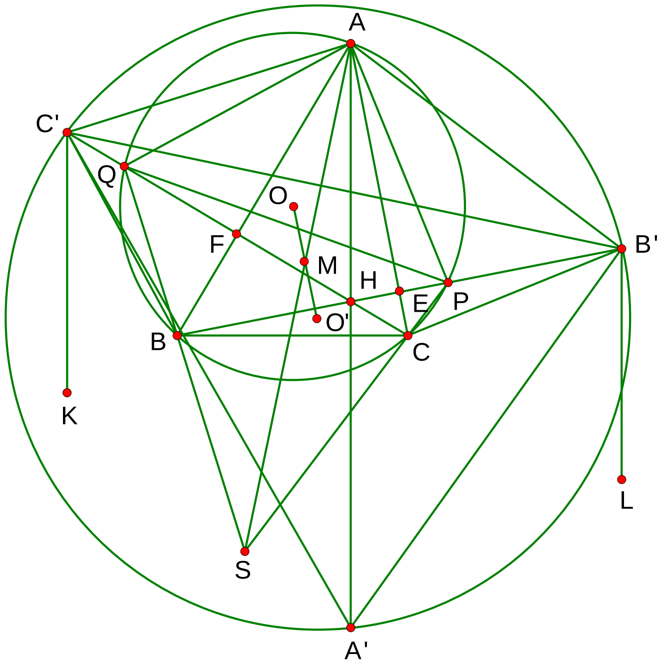
Kết hợp với $TH \equiv XH$, suy ra $TL // XD$.
Vậy, theo định lí Thales, $\dfrac{\overline{HX}}{\overline{HT}} = \dfrac{\overline{HD}}{\overline{HL}}$.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nhọn và $\widehat{BAC} \neq 60°$, (O) là đường tròn ngoại tiếp. A’, B’, C’ theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A’B’C’. M là trung điểm của OO’. P. Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BB’, CC’ và (O). Chứng minh rằng:

1) $AM \perp B'C'$.
2) AM, BQ, CP đồng quy.

Lời giải 1.

1) Đặt $E = BB' \cap AC; F = CC' \cap AB; H = BB' \cap CC'$ (h.13.1).



(h.13.1)

Chú ý rằng $B'O' = C'O'$; E là trung điểm của BB’ và HP; F là trung điểm của CC’ và HQ; $AB = AB'; AC = AC'$, theo bổ đề 3 trong bài toán 2, chú ý rằng các tứ giác AEHF, BCEF nội tiếp, ta có

$$B'M^2 - C'M^2 = \frac{2\left(B'O^2 + B'O'^2\right) - OO'^2}{4} - \frac{2\left(C'O^2 + C'O'^2\right) - OO'^2}{4}$$

$$= \frac{B'O^2 - C'O^2}{2} = \frac{\left(B'O^2 - R^2\right) - \left(C'O^2 - R^2\right)}{2} = \frac{P_{B'/(O)} - P_{C'/(O)}}{2}$$

$$= \frac{\overline{B'B}.\overline{B'P} - \overline{C'C}.\overline{C'Q}}{2} = \frac{2\overline{BE}.\overline{BH} - 2\overline{CF}.\overline{CH}}{2} = \overline{BE}.\overline{BH} - \overline{CF}.\overline{CH}$$

$$= \overline{BA}.\overline{BF} - \overline{CA}.\overline{CE} = \overline{BA}\left(\overline{BA} - \overline{FA}\right) - \overline{CA}\left(\overline{CA} - \overline{EA}\right)$$

$$= BA^2 - CA^2 - \overline{AB}.\overline{AF} + \overline{AC}.\overline{AE} = B'A^2 - C'A^2.$$

Do đó $AM \perp B'C'$.

2) Vì $A \neq 60°$ nên

$$\widehat{QBC} + \widehat{PCB} = \widehat{QBA} + \widehat{ABC} + \widehat{PCA} + \widehat{ACB} = \widehat{EBA} + \widehat{ABC} + \widehat{FCA} + \widehat{ACB}$$

$$= \left(90° - A\right) + B + \left(90° - A\right) + C = 180° + \left(A + B + C\right) - 3A = 360° - 3A \neq 180°.$$

Do đó BQ và PC cắt nhau.

Đặt $S = BQ \cap CP$.

Lấy hai điểm K, L sao cho $C'K \parallel B'L \perp BC$.

Vì phép đối xứng trục bảo toàn trực tâm nên Q là trực tâm của $\Delta ABC'$; P là trực tâm của $\Delta AB'C$ (1).

Theo phần 1, $BM \perp C'A'$ và $CM \perp B'A'$ (2).

Từ (1) và (2), chú ý rằng $C'K \parallel HAA'$ và $B'L \parallel HAA'$, suy ra $C'H, C'A, C'A', C'K$ theo thứ tự vuông góc với BA, BS, BM, BC và $B'H, B'A, B'A', B'L$ theo thứ tự vuông góc với CA, CS, CM, CB.

Vậy $0 = (HAA') - (HAA') = C'(HAA'K) - B'(HAA'L) = B(ASMC) - C(ASMB)$.

Do đó A, M, S thẳng hàng (đpcm).

Lời giải 2. (h.13.2).

1) Như lời giải 1.

3) Vì $A \neq 60°$ nên

$$\widehat{QBC} + \widehat{PCB} = \widehat{QBA} + \widehat{ABC} + \widehat{PCA} + \widehat{ACB} = \widehat{EBA} + \widehat{ABC} + \widehat{FCA} + \widehat{ACB}$$

$$= \left(90° - A\right) + B + \left(90° - A\right) + C = 180° + \left(A + B + C\right) - 3A = 360° - 3A \neq 180°.$$

Do đó BQ và PC cắt nhau.

Đặt $E = AC \cap BB'; F = AB \cap CC'; S = BQ \cap CP;$

$N = SA \cap B'C'; U = SP \cap AB'; V = SQ \cap AC'.$

Chú ý rằng U, V theo thứ tự là điểm đối xứng của F, E qua AC, AB và tứ giác BCEF nội tiếp, ta có

$$\widehat{AUC} = \widehat{AFC} = 90°; \widehat{AVB} = \widehat{AEB} = 90° \text{ và } \overline{AU}.\overline{AB'} = \overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AE}.\overline{AC} = \overline{AV}.\overline{AC'}.$$

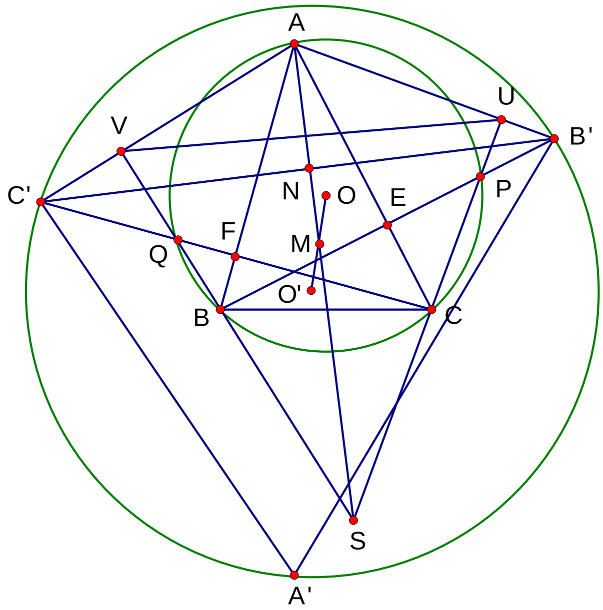
Do đó AUSV và B'UVC' là tứ giác nội tiếp.

Vậy $\widehat{ASV} = \widehat{AUV} = \widehat{VC'N}$.

Do đó tứ giác SNVC' nội tiếp.

Vậy $\widehat{SNC'} = \widehat{SVC'} = 90°$.

Điều đó có nghĩa là $AS \perp B'C'$.



(h.13.2)

Mặt khác, theo phần 1, $AM \perp B'C'$.

Vậy AM đi qua S (đpcm).

Chú ý.

Lời giải trên của bạn Doãn Thanh Tùng, học sinh Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

Bài toán 14. L là điểm Lemoine của tam giác ABC. M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. K là điểm đẳng giác của L đối với tam giác MNP. Chứng minh rằng K thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC. Đường cao AA'. M. X theo thứ tự là trung điểm của BC, AA'. Khi đó MX đi qua điểm Lemoine của tam giác ABC.

Chứng minh.

Bỏ qua trường hợp đơn giản: tam giác ABC vuông tại A.

Gọi L là điểm Lemoine của ΔABC; S là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn (ABC) tại B, C; Q là giao điểm của AS và BC (h.14.1).

Dễ thấy L thuộc AS và $M(AA'LS) = M(AQLS) = (AQLS) = -1$.

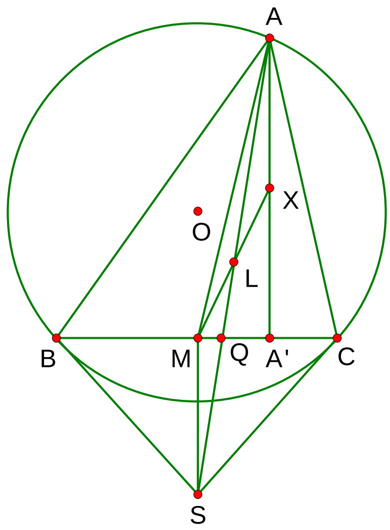
Vì $MS \perp BC; AA' \perp BC$ nên $MS // AA'$.

Kết hợp với $XA = XA'$, suy ra $M(AQXS) = M(AA'XS) = -1$.

Vậy $M(AQLS) = M(AQXS)$.

Điều đó có nghĩa là $ML \equiv MX$.

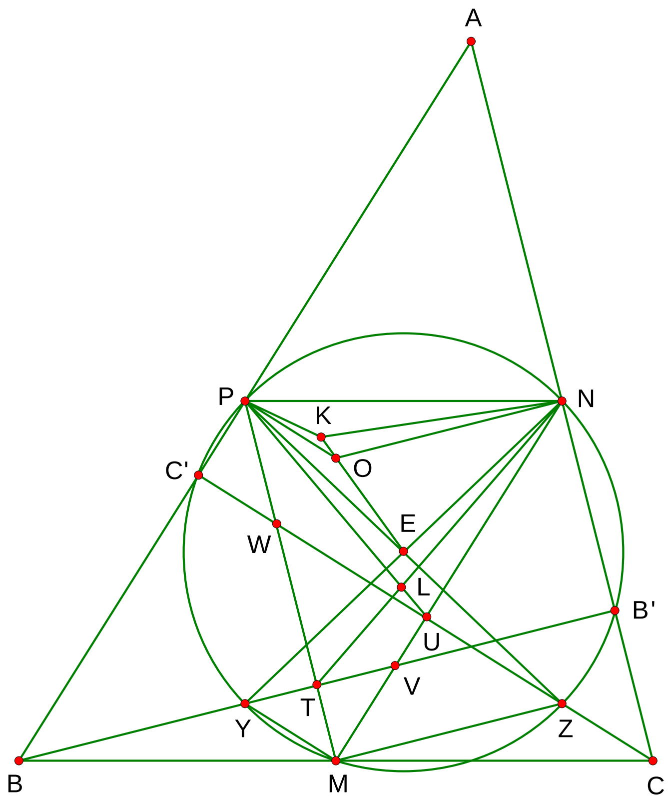
Nói cách khác MX đi qua điểm Lemoine của ΔABC.



(h.14.1)

Trở lại giải bài toán 14.

Gọi O, E theo thứ tự là tâm các đường tròn (ABC), (MNP); B’, C’ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (MNP) và AC, AB; Y, Z theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (MNP) và BB’, CC’ ; T, V theo thứ tự là giao điểm của MP, MN và BB’; U, W theo thứ tự là giao điểm của MN, MP và CC’ (h.14.2).



(h.14.2)

Dễ thấy $NM // AB; PM // AC$.

Do đó

$$(YM, YV) \equiv (YM, YB') \equiv (NM, NB') \equiv (AB, AC) \pmod{\pi}$$
$$\equiv -(AC, AB) \equiv -(PM, PC') \equiv -(ZM, ZC') \equiv -(ZM, ZW) \pmod{\pi}.$$

Dễ thấy E là trung điểm chung của NY, PZ.

Do đó $\widehat{YMV} = \frac{\pi}{2} = \widehat{ZMW}$.

Vậy các tam giác MYV, MZW đồng dạng (ngược hướng).

Từ đó, chú ý rằng $MT \,//\, AC \perp BB' \equiv YV; MU \,//\, AB \perp CC' \equiv ZW$, suy ra

$$\frac{\overline{YT}}{\overline{YV}} = \frac{\overline{ZU}}{\overline{ZW}} \text{ (1).}$$

Dễ thấy T, U theo thứ tự là trung điểm của BB' và CC'.

Do đó, theo bổ đề trên, $L = NT \cap PU$ (2).

Dễ thấy O, E theo thứ tự là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔMNP.

Do đó O, E là hai điểm đẳng giác của ΔMNP và $ON \,//\, TV; OP \,//\, UW$ (3).

Từ (1), (2) và (3), chú ý rằng K, L là hai điểm đẳng giác đối với ΔMNP và phép đối xứng trục bảo toán tỉ số kép, suy ra

$$N(KPOE) = N(LMEO) = N(TVYO) = \frac{\overline{YT}}{\overline{YV}}$$
$$= \frac{\overline{ZU}}{\overline{ZW}} = P(UWZO) = P(LMEO) = P(KNOE).$$

Vậy K thuộc OE.

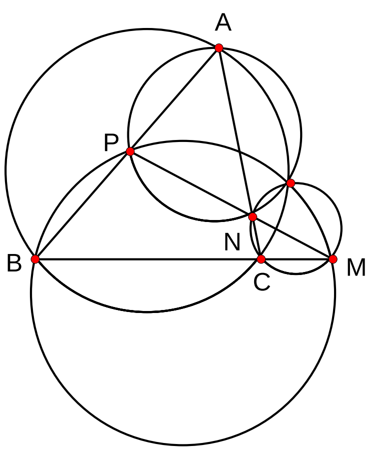
Nói cách khác K thuộc đường thẳng Euler của ΔABC.

Bài toán 15. Cho tứ giác điều hoà ABCD, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Các tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy tại P. Điểm T thuộc AC. (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác TBD. Tiếp tuyến với (O') tại T theo thứ tự cắt AP, CP tại Q, R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với (O').

Lời giải.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc BC, CA, AB. Nếu M, N, P thẳng hàng thì các đường tròn (ABC), (MBC), (NCA), (PAB) cùng đi qua một điểm (h.15.1).



(h.15.1)

Trở lại giải bài toán 15.

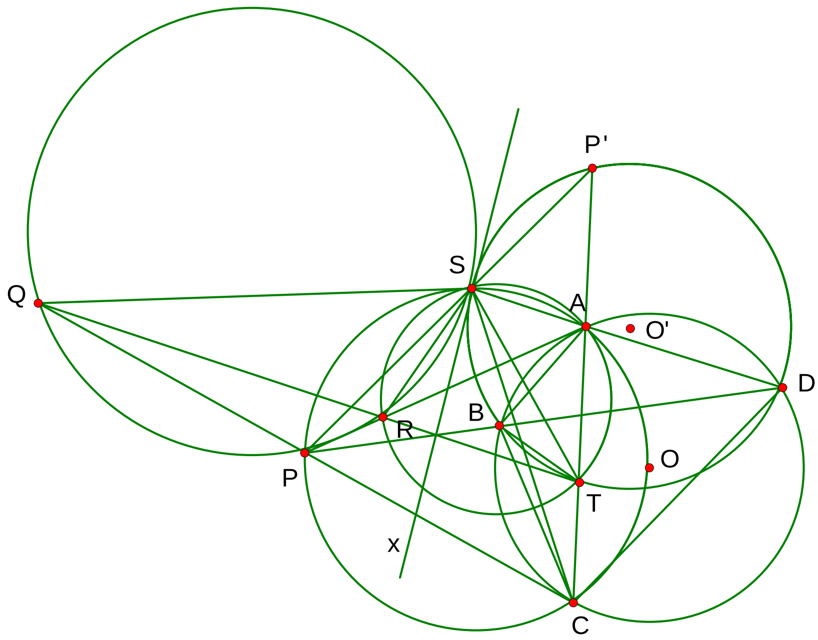
Gọi P’ là giao điểm thứ hai của AC và (O’); S là giao điểm thứ hai của PP’ và (O’); Sx là tiếp tuyến với (O’) tại S (h.15).

Dễ thấy $PA^2=PC^2=PB.PD=PS.PP'$.

Do đó $\widehat{SAP}=\widehat{SP'A}=\widehat{SP'C}=\widehat{SCP}$ và $\widehat{SAR}=\widehat{SAP}=\widehat{SP'A}=\widehat{SP'T}=\widehat{STR}$;

Điều đó có nghĩa là các tứ giác SACP, SATR nội tiếp.

Từ đó, áp dụng bổ đề trên cho ΔPAC và ba điểm thẳng hàng T, R, Q, suy ra tứ giác SQPR nội tiếp.



(h.15)

Do đó $\widehat{STP'}=\widehat{SQC}$.

Từ đó, chú ý rằng $\widehat{TSP}=\widehat{SP'T}+\widehat{STP'}$; $\widehat{SP'T}=\widehat{xST}$, suy ra

$$\widehat{xSP}=\widehat{TSP}-\widehat{xST}=\widehat{SP'T}+\widehat{STP'}-\widehat{xST}=\widehat{STP'}=\widehat{SQC}=\widehat{SQP}.$$

Do đó Sx tiếp xúc (tại S) với đường tròn (PQR).

Điều đó có nghĩa là đường tròn (PQR) tiếpxúc với (O’) (tại S).

Bài toán 16. Cho hai tam giác ABC, AB_1C_1 đồng dạng ngược hướng và theo thứ tự có trực tâm là H, H_1. Chứng minh rằng BB_1, CC_1, HH_1 hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Lời giải. (h.16).

Gọi M, N, S theo thứ tự là trung điểm của BB_1, CC_1, HH_1 (h.16).

Vì hai tam giác AB_1C_1, ABC đồng dạng ngược hướng nên

$AH_1.BC=AH.B_1C_1$; $(\overrightarrow{AH_1},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{B_1C_1})\equiv(\overrightarrow{AH_1},\overrightarrow{B_1C_1})+(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC})\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Vậy, chú ý rằng $BC\perp AH; B_1C_1\perp AH_1$, ta có

$$\overrightarrow{HH_1}.2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{AH_1}-\overrightarrow{AH}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)=\overrightarrow{AH_1}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{B_1C_1}$$

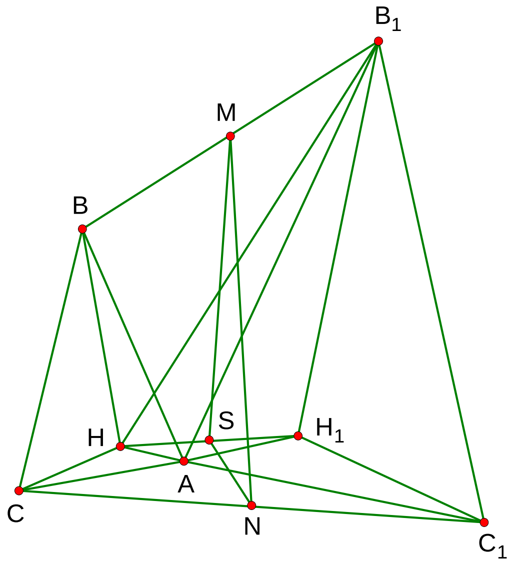
$$=AH_1.BC\cos(\overrightarrow{AH_1},\overrightarrow{BC})-AH.B_1C_1\cos(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{B_1C_1})=0.$$

Do đó $HH_1 \perp MN$ (1).

Vì hai tam giác AB_1C_1, ABC đồng dạng ngược hướng nên

$AB_1.CH_1 = AB.C_1H_1$;

$(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CH}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C_1H_1}) \equiv (\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{C_1H_1}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CH}) \equiv 0 \,(\text{mod}\, 2\pi).$



(h.16)

Vậy, chú ý rằng $AB_1 \perp C_1H_1; AB \perp CH,$ ta có

$$\overrightarrow{BB_1}.2\overrightarrow{SN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1}\right).\left(\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{C_1H_1}\right) = \overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C_1H_1}$$

$$= AB_1.CH\cos(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CH}) - AB.C_1H_1.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C_1H_1}) = 0.$$

Do đó $BB_1 \perp SN$ (2).

Tương tự $CC_1 \perp SM$ (3).

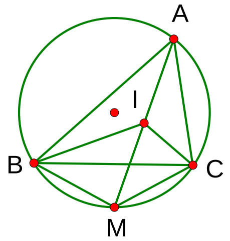
Từ (1), (2) và (3) suy ra BB_1, CC_1, HH_1 hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC không cân tại A, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. AI lại cắt (O) tại M. K là điểm đối xứng của I qua BC. MK lại cắt (O) tại L. Chứng minh rằng $OI \perp AL$.

Lời giải.

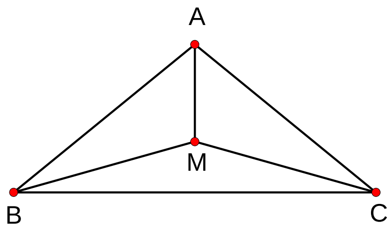
Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Nếu I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AI lại cắt đường tròn (ABC) tại M thì $MB = MC = MI$.



(h.17.1)

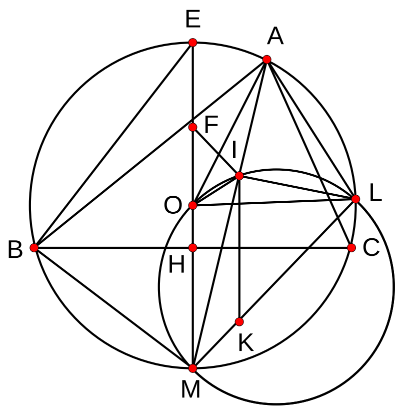
Bổ đề 2. Nếu điểm M nằm trong tam giác ABC cân tại A và $\widehat{AMB}=\widehat{AMC}$ thì $AM\perp BC$ (h.17.2).



(h.17.2)

Không mất tính tổng quát giả sử $AB>AC.$

Gọi H là giao điểm của MO và BC; E là giao điểm thứ hai của MO và (O); F là điểm đối xứng của M qua BC (h.17.3).



(h.17.3)

Theo bổ đề 1, chú ý rằng $\widehat{EBM}=90°; BH\perp EM,$ ta có

$$MO.MF=\frac{1}{2}ME.2MH=ME.MH=MB^2=MI^2.$$

Do đó $\Delta MOI \sim \Delta MIF.$

Từ đó, chú ý rằng MFIK là hình thang cân và $OL=OM,$ suy ra

$$\widehat{OIM}=\widehat{IFM}=\widehat{KMF}=\widehat{LMO}=\widehat{OLM}.$$

Vậy OMLI là tứ giác nội tiếp.

Kết hợp với $OL=OM,$ ta có

$$\widehat{OIA}=\widehat{IOM}+\widehat{IMO}=180°-\widehat{ILM}+\widehat{ILO}=180°-\widehat{OLM}=180°-\widehat{OML}=\widehat{OIL}.$$

Kết hợp với $OA=OL,$ theo bổ đề 2, suy ra $OI\perp AL.$

Bài toán 18. Cho hai tam giác ABC và A’B’C’. Giả sử tồn tại điểm O sao cho OA, OB, OC, OA’, OB’, OC’ theo thứ tự vuông góc với B’C’, C’A’, A’B’, BC, CA, AB. Chứng minh rằng AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

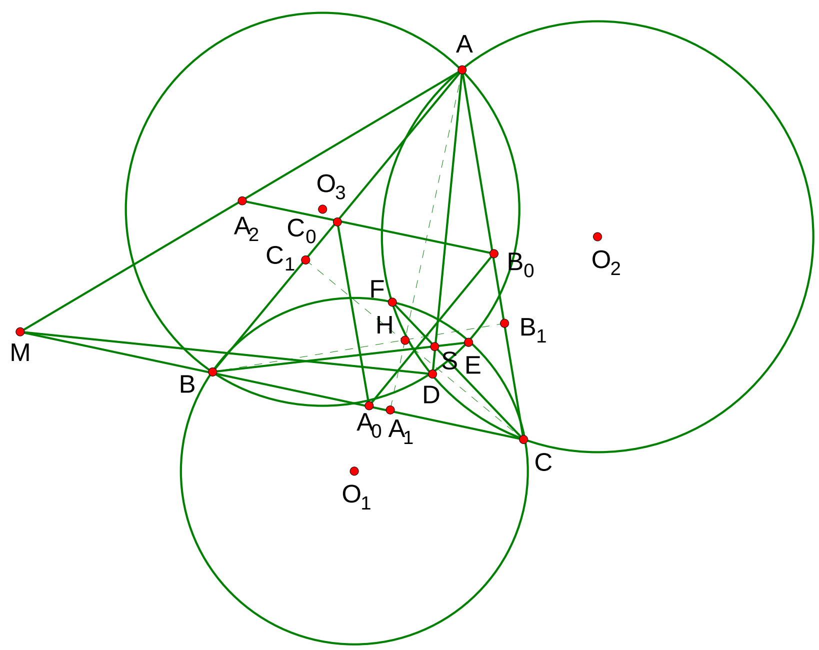
Lời giải.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC. Các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) khác đường tròn (ABC) và theo thứ tự đi qua các cặp điểm B, C; C, A; C, B. D, E, F theo thứ tư là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2). Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho. $\widehat{ADM}=\widehat{BEN}=\widehat{CFP}=90°$. Khi đó M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh.

Gọi S là tâm đẳng phương của (O_1), (O_2), (O_3); A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB; H là trực tâm của ΔABC; A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của AH, BH, CH và BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 theo thứ là trung điểm của AM, BN, CP; (A_2), (B_2), (C_2) theo thứ tự là các đường tròn đường kính AM, BN, CP (h.18.1).



(h.18.1)

Đương nhiên $S = AD \cap BE \cap CF$ và $\overline{SA}.\overline{SD} = \overline{SB}.\overline{SE} = \overline{SC}.\overline{SF}$.

Do đó $P_{S/(A_2)} = P_{S/(B_2)} = P_{S/(C_2)}$.

Dễ thấy $\overline{HA}.\overline{HA_1} = \overline{HB}.\overline{HB_1} = \overline{HC}.\overline{HC_1}$.

Do đó $P_{H/(A_2)} = P_{H/(B_2)} = P_{H/(C_2)}$.

Vậy SH là trục đẳng phương chung của (O_1), (O_2), (O_3).

Điều đó có nghĩa là A_2, B_2, C_2 thẳng hàng (1).

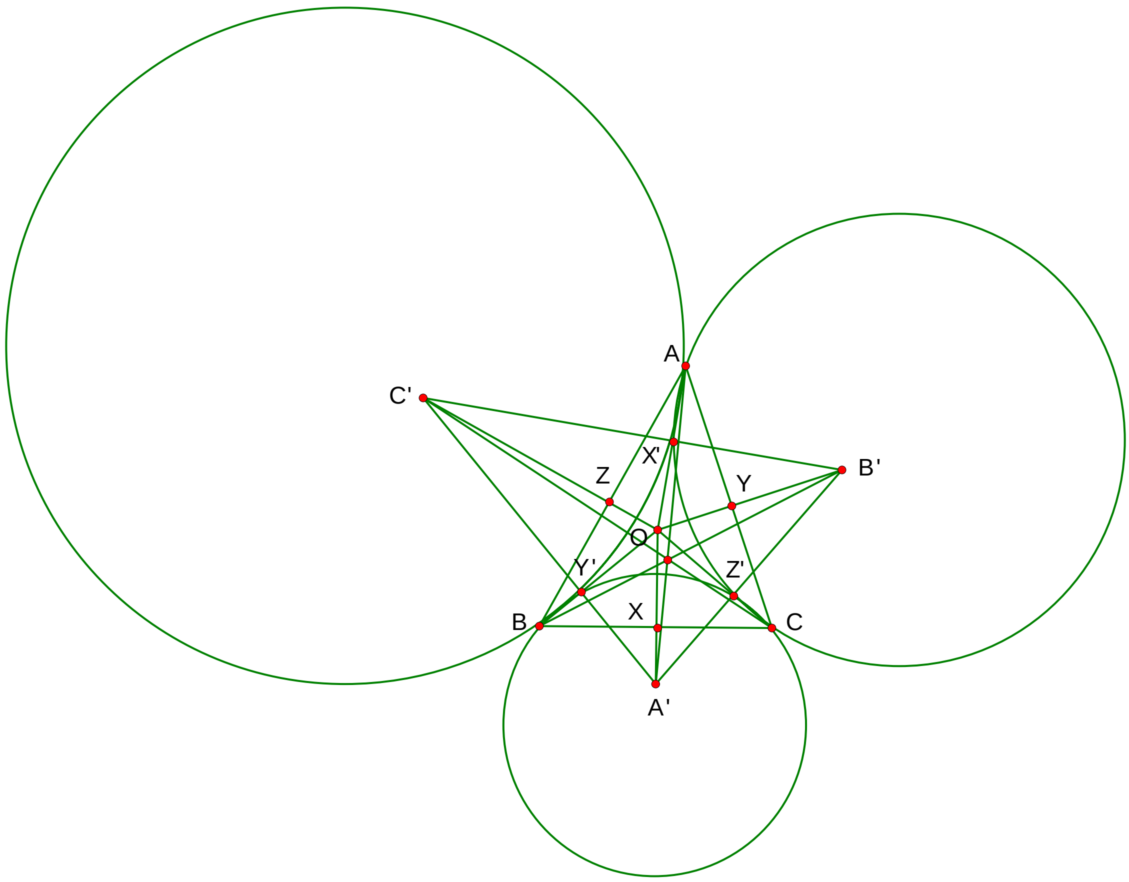
Dễ thấy A_2, B_2, C_2 theo thứ tự thuộc B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 và B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 theo thứ tự song song với BC, CA, AB.

Do đó $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{A_2C_0}}{\overline{A_2B_0}}.\dfrac{\overline{B_2A_0}}{\overline{B_2C_0}}.\dfrac{\overline{C_2B_0}}{\overline{C_2A_0}}$ (2).

Từ (1) và (2), theo định lí Menelaus, suy ra $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

Vậy, lại theo định lí Menelaus, M, N, P thẳng hàng.

Trở lại giải bài toán 18.



(h.18.2)

Gọi A'', B'', C'' theo thứ tự là giao điểm của BC, CA, AB và B'C', C'A', A'B'; X, Y, Z, X', Y', Z' theo thứ tự là giao điểm của OA', OB', OC', OA, OB, OC và BC, CA, AB, B'C', C'A', A'B'và (h.18.2).

Vì $OB \perp C'A'; OA' \perp BC'; OC \perp A'B'$ nên $\overline{OB}.\overline{OY'} = \overline{OA'}.\overline{OX} = \overline{OC}.\overline{OZ'}$.

Do đó B, C, Y', Z' đồng viên.

Tương tự C, A, A', X' và A, B, X', Y' cũng đồng viên.

Vậy, chú ý rằng $\widehat{AX'M} = \widehat{BY'N} = \widehat{CZ'N} = 90°$, theo bổ đề trên, ta có M, N, P thẳng hàng.

Do đó, theo định lí Desagues, AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Bài toán 19. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Điểm D chạy trên (O) (khác A, B, C). E, F theo thứ tự là giao điểm của tiếp tuyến với (O) tại D và tiếp tuyến với (O) tại B, C. M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AE, AF và (O). Đường tròn (O_1) đi qua M, tiếp xúc với OA tại A và lại cắt AB tại P. Đường tròn (O_2) đi qua N, tiếp xúc với OA tại A và lại cắt AC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, S là tâm đường tròn ngoại tiếp. Điểm D thuộc BC (khác B, C). M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, CD. Các đường thẳng đi qua M, N vuông góc với BC theo thứ tự cắt AB, AC tại P, Q. Khi đó A, S, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh.

Gọi X, Y theo thứ tự là trung điểm của AB, AC; Z, T theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng đi qua S, song song với BC và MP, NQ (h.19.1).

Dễ thấy MNYX và MNTZ là hình bình hành.

Do đó XYTZ là hình bình hành (1).

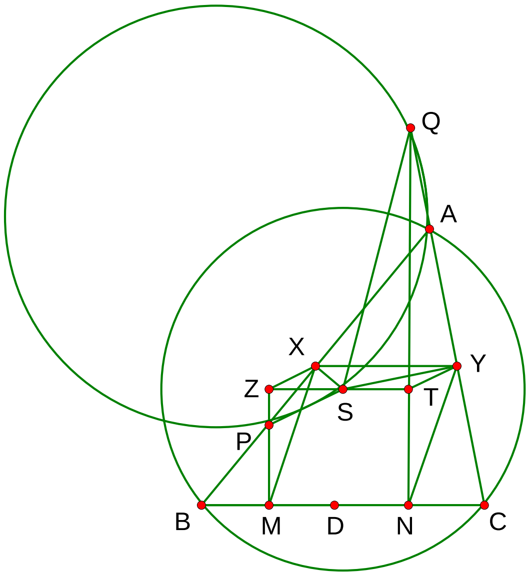
Dễ thấy các bộ bốn điểm A, S, X, Y; P, S, X, Z; Q, S, Y, T cùng thuộc một đường tròn (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$(SP, SQ) \equiv (SP, SZ) + (ST, SQ) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (XP, XZ) + (YT, YQ) \equiv (XP, YQ) \equiv (AP, AQ) \pmod{\pi}.$$

Do đó A, S, P, Q cùng thuộc một đường tròn.



(h.19.1)

Trở lại giải bài toán 19 (h.19.2, h.19.3).

Gọi H là hình chiếu của A trên BC; S là điểm đối xứng với A qua BC (h.19.2).

Qua phép nghịch đảo $N_A^{AH^2}$, B, C, D, E, F, M, N, P, Q, S theo thứ tự biến thành B*, C*, D*, E*, F*, M*, N*, P*, Q*, S*; các đường tròn (O), (O_1), (O_2) theo thứ tự biến thành các đường thẳng B*C*, M*P*, N*Q*; các đường thẳng BC, BE, CF, EF biến thành các đườn tròn (S*), (K_1), (K_2), (K_3) (cùng đi qua A); các đường thẳng ME, NF biến thành các đường thẳng M*E*, N*F* (cùng đi qua A) (h.19.3).

Vì BE, CF, EF theo thứ tự tiếp xúc với (O) tại B, C, D nên (K_1), (K_2), (K_3) theo thứ tự tiếp xúc với B*C* tại B*, C*, D*.

Do đó $M^*B^* = \sqrt{M^*E^*.M^*A} = M^*D^*; N^*C^* = \sqrt{N^*F^*.N^*A} = N^*D^*$.

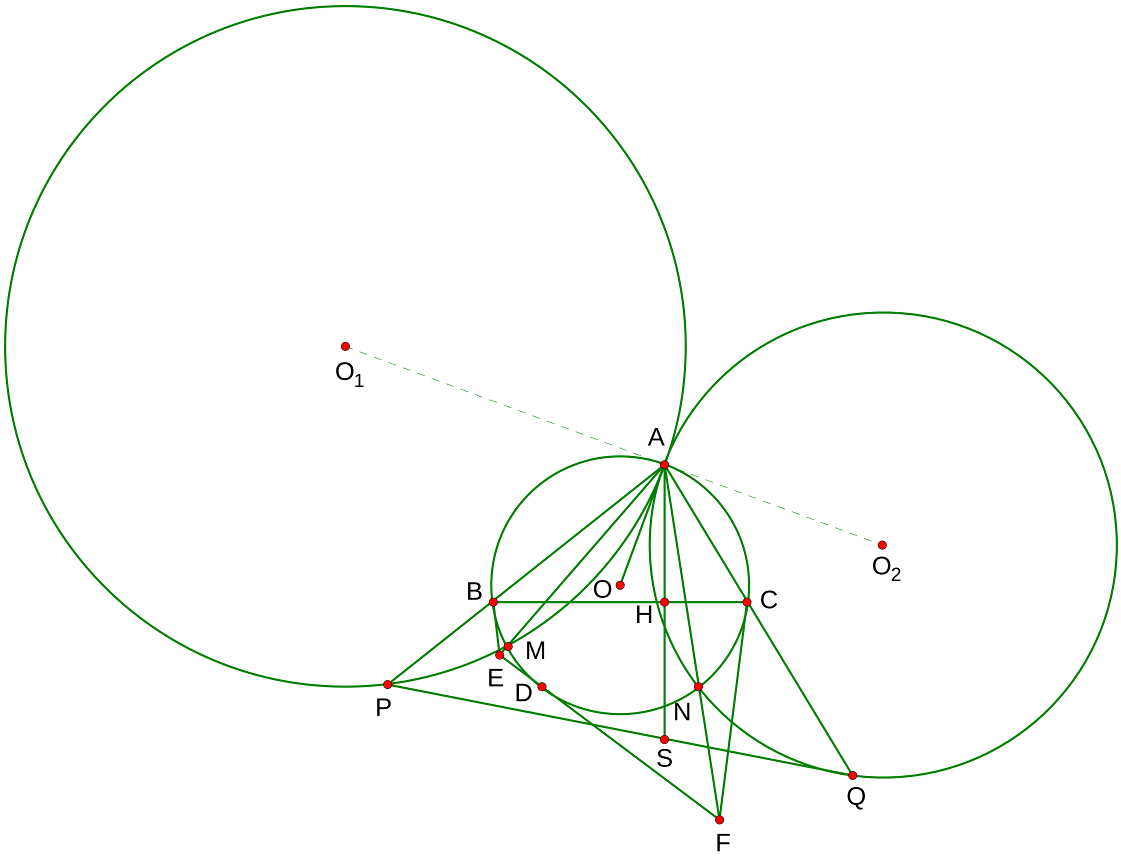
Nói cách khác M*, N* theo thứ tự là trung điểm của B*D*, C*D* (1).

Vì $(O_1)//AO; (O_2)//AO; (O) \perp AO$ nên $M^*P^*//AO; N^*Q^*//AO; B^*C^* \perp AO$.

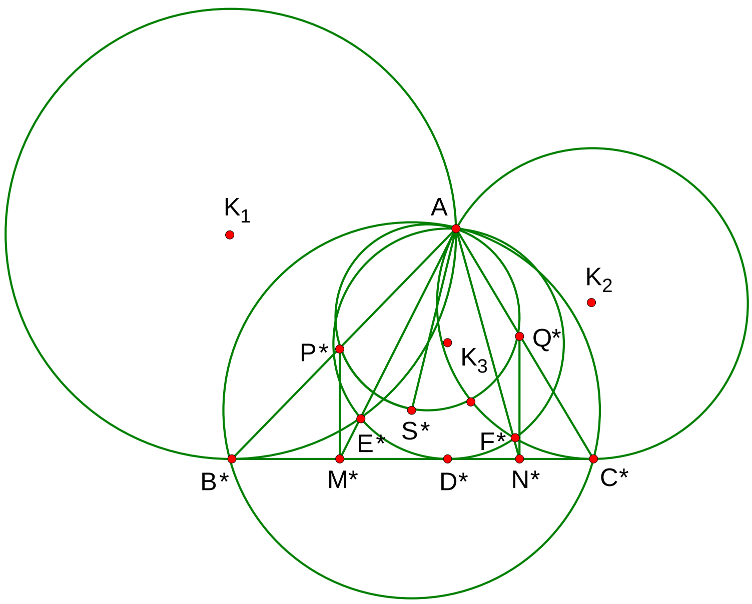
Do đó $M^*P^* \perp B^*C^*; N^*Q^* \perp B^*C^*$ (2).

Từ (1) và (2), theo bổ đề trên, A, S*, P*, Q* luôn cùng thuộc một đường tròn (h.19.3).

Điều đó có nghĩa là PQ luôn đi qua một điểm cố định, điểm S.



(h.19.2).

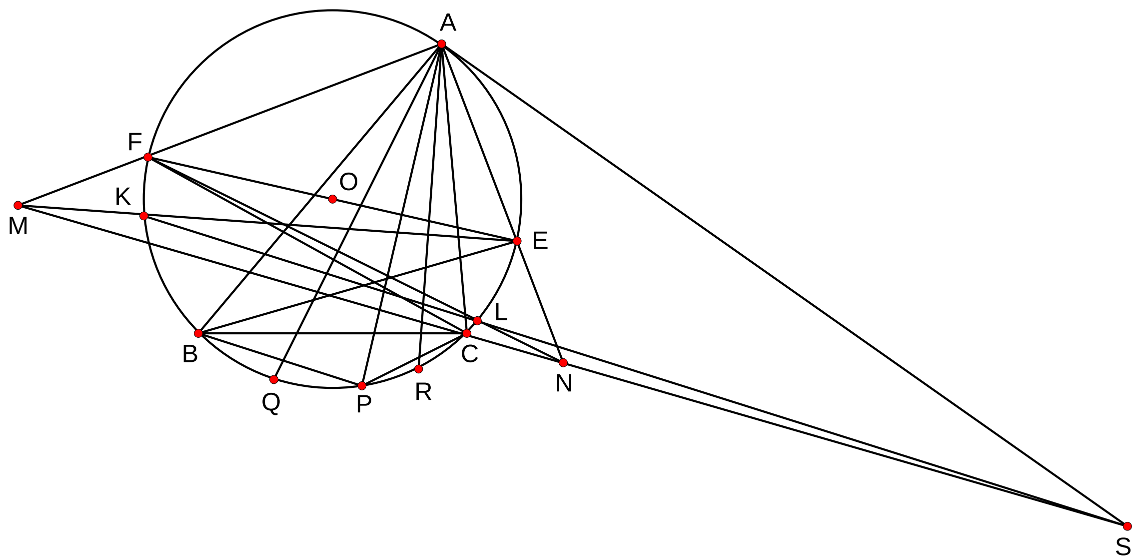


(h.19.3)

Bài toán 20. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Điểm P chạy trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Phân giác của các góc $\widehat{APB}, \widehat{ACP}$ theo thứ tự lại cắt (O) tại E, F. Các đường thẳng đi qua E, F theo thứ tự vuông góc phân giác của các góc $\widehat{PAC}, \widehat{PAB}$ cắt AF, AE tại M, N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Gọi Q, R theo thứ tự là trung điểm các cung $\overset{\frown}{PB}, \overset{\frown}{PC};$ K, L theo thứ tự là giao điểm thứ hai của EM, FL và (O); S là giao điểm của KL và tiếp tuyến với (O) tại A (h.20).



(h.20)

Dễ thấy E, F theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{AEP}, \overset{\frown}{AFP}.$

Do đó $EF \perp AP.$

Kết hợp với $EK \perp AR$ và P là trung điểm cung $\overset{\frown}{PC},$ suy ra $sđ\overset{\frown}{FK} = sđ\overset{\frown}{PR} = sđ\overset{\frown}{RC}.$

Từ đó, chú ý rằng $sđ\overset{\frown}{FA} = sđ\overset{\frown}{FBP},$ suy ra

$$sđ\overset{\frown}{KA} = sđ\overset{\frown}{KF} + sđ\overset{\frown}{FA} = sđ\overset{\frown}{KF} + sđ\overset{\frown}{FBP} = sđ\overset{\frown}{KF} + sđ\overset{\frown}{KF} + sđ\overset{\frown}{KBP}$$

$$= sđ\overset{\frown}{KBP} + sđ\overset{\frown}{PR} + sđ\overset{\frown}{RC} = sđ\overset{\frown}{KBC}.$$

Do đó K cố định.

Tương tự L cố định.

Áp dụng định lí Paxcan cho sáu điểm $\begin{matrix} AEL \\ KFA \end{matrix}$, chú ý rằng $AF \cap KE = M; AA \cap KL = S; EA \cap LF = N,$ suy ra M, S, N thẳng hàng.

Điều đó có nghĩa là MN luôn đi qua một điểm cố định, điểm $S = AA \cap KL.$

Chú ý.

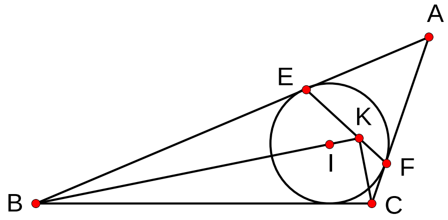
Tác giả của bài toán trên là ThS Trần Quang Hùng, GV Trường THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Bài toán 21. Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn Euler N, điểm Lemoine L. AH, BH, CH theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F. X, Y, Z theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy tại một điểm thuộc NL.

Lời giải. (h.21.1, h.21.2).

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Nếu đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với AB, AC tại E, F và K là giao điểm của BI và EF thì $\widehat{BKC}=90^\circ$ (h.21.1).



(h.21.1)

Trở lại giải bài toán 21.

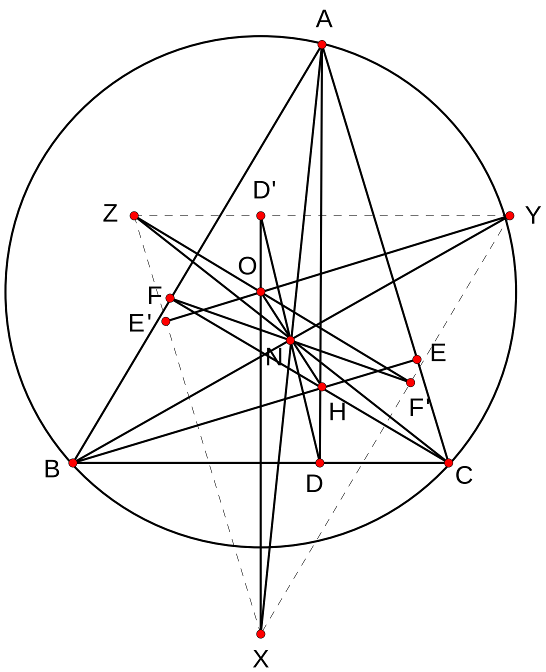
Gọi N là tâm đường tròn Euler của ΔABC; D’, E’, F’ theo thứ tự là giao điểm của OX, OY, OZ và YZ, ZX, ZY (h.21.2, h.21.3)).

Dễ thấy O, X, Y, Z theo thứ tự là ảnh của H, A, B, C qua $Đ_N$.

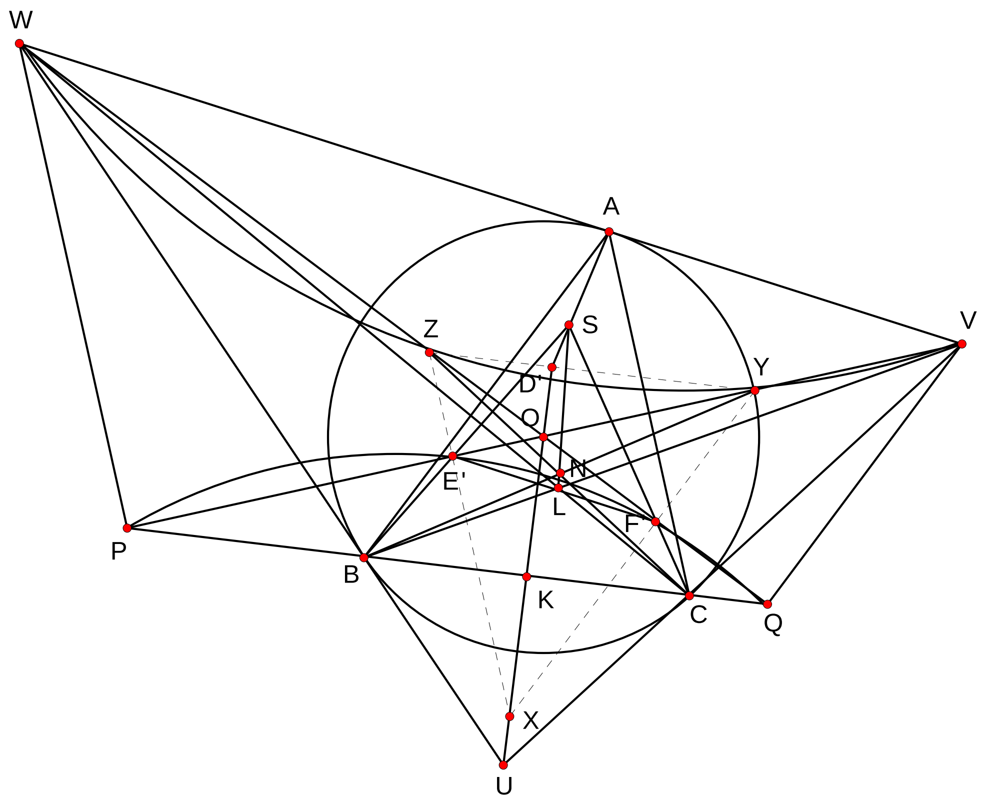
Từ đó, chú ý rằng BC, CA, AB, YZ, ZX, XY theo thứ tự là trung trực của OX, OY, OZ, HA, HB, HC, suy ra

$$\begin{cases} Đ_N(D)=Đ_N(AH\cap BC)=Đ_N(AH)\cap Đ_N(BC)=XO\cap YZ=D' \\ Đ_N(E)=Đ_N(BH\cap CA)=Đ_N(BH)\cap Đ_N(CA)=YO\cap ZX=E' \\ Đ_N(F)=Đ_N(CH\cap AB)=Đ_N(CH)\cap Đ_N(AB)=ZO\cap XY=F' \end{cases}.$$

Vậy AD’, BE’, CF’ theo thứ tự là ảnh của XD, YE, FZ qua $Đ_N$ (1).



(h.21.2)



(h.21.3)

Dựng ΔUVW ngoại tiếp (O) sao cho VW, WU, UV theo thứ tự tiếp xúc với (O) tại A, B, C; $S = BE' \cap CF'; P = YO \cap BC; Q = ZO \cap CB; K = OU \cap BC$.

Dễ thấy $N = AX \cap BY \cap CZ; L = AU \cap BV \cap CW$.

Dễ thấy $\overline{OP}.\overline{OE'} = \overline{OU}.\overline{OK} = \overline{OC}.\overline{OQ}$.

Do đó P, Q, E', F' cùng thuộc một đường tròn (2).

Dễ thấy $(WZ, WV) \equiv (AB, AO) \equiv (AH, AC) \equiv (BC, OV) \equiv (YZ, YV) (\mathrm{mod}\pi)$.

Do đó Y, Z, V, W cùng thuộc một đường tròn (3).

Từ (2) và (3), chú ý rằng $E'P \equiv YV; PQ // YZ$, suy ra

$(E'F', WV) \equiv (E'F', E'P) + (YV, WV) \equiv (QF', QP) + (YZ, WZ) \equiv 0 (\mathrm{mod}\pi)$.

Điều đó có nghĩa là $E'F' // VW$.

Theo bổ đề trên, $WP \perp VO; VQ \perp WO$.

Kết hợp với $ZE' \perp VO; YF' \perp WO$, suy ra $WP // ZE'; VQ // YF'$.

Vậy các điều kiện sau tương đương.

1) N, L, S thẳng hàng.
2) $B(CNLS) = C(BNLS)$.
3) $B(PYVE') = C(QZWF')$.
4) $B(VPE'Y) = C(WQF'Z)$.
5) $\dfrac{\overline{E'V}}{\overline{E'P}} : \dfrac{\overline{YV}}{\overline{YP}} = \dfrac{\overline{F'W}}{\overline{F'Q}} : \dfrac{\overline{ZW}}{\overline{ZQ}}$.
6) $\dfrac{\overline{E'V}}{\overline{F'W}} . \dfrac{\overline{ZW}}{\overline{YV}} = \dfrac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}} . \dfrac{\overline{ZQ}}{\overline{YP}}$.

7) $\frac{\overline{E'O}}{\overline{F'O}}.\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}.\frac{\overline{ZO}}{\overline{YO}}$ (vì $E'F' \,//\, VW; PQ \,//\, YZ$).

8) $\frac{\overline{E'O}.\overline{YO}}{\overline{F'O}.\overline{ZO}}.\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}$.

9) $\frac{\overline{ZW}}{\overline{E'P}}=\frac{\overline{YV}}{\overline{F'Q}}$ (vì Y, Z, E', F' cùng thuộc một đường tròn).

10) $\frac{\overline{ZO}}{\overline{E'O}}=\frac{\overline{YO}}{\overline{F'O}}$ (vì $ZE' \,//\, WP$).

11) $\overline{ZO}.\overline{F'O}=\overline{YO}.\overline{E'O}$ (đúng vì Y, Z, E’, F’ cùng thuộc một đường tròn)
Vậy BE’, CF’ và NL đồng quy.
Tương tự BE’, AD’ và NL đồng quy.
Tóm lại AD’, BE’, CF’ đồng quy tại một điểm thuộc NL (4).
Từ (1) và (4) suy ra đpcm.