Đáp án các Bài kiểm tra số 1-2

Trường đông 2013

CLB Toán học xin chân thành cám ơn các thầy cô đã đóng góp đề bài và lời giải!

---

1. Ta có $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{13}{12}, a_3 = \frac{57}{60}$. Bằng quy nạp ta chứng minh rằng, với mọi $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}. \tag{1}$$

Thật vậy, dễ thấy với $n = 1, 2, 3$, đẳng thức (1) là đúng. Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là

$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k}.$$

Ta chứng minh (1) cũng đúng với $k+1$. Ta có

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= = a_k - \tfrac{3k+2}{2k(k+1)(2k+1)} = \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k+1} + \cdots + \tfrac{1}{2k} - \tfrac{3k+2}{2k(k+1)(2k+1)} \\ &= \tfrac{1}{k+1} + \tfrac{1}{k+2} + \cdots + \tfrac{1}{2k} + \tfrac{1}{2k+1} + \tfrac{1}{2k+2} + \left(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2k+2} - \tfrac{3k+2}{2k(k+1)(2k+1)}\right) \\ &= \tfrac{1}{k+1} + \tfrac{1}{k+2} + \cdots + \tfrac{1}{2k} + \tfrac{1}{2k+1} + \tfrac{1}{2k+2}. \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì (1) được chứng minh. (2đ.)

Ta nhắc lại bất đẳng thức quen thuộc $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$, hay

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right), \forall n \geq 2.$$

Từ đó suy ra

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right),$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right) < a_n < \ln\left(\frac{n}{n-1}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right).$$

Như vậy,

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) < a_n < \ln\left(\frac{2n-1}{n-1}\right).$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$, do tính liên tục của hàm số ln và định lý giới hạn kẹp ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2.$$

(3đ.)

Nhận xét.

(a) Việc phát hiện công thức tổng quát (1) có thể được suy ra từ các tháo tác đơn giản sau đây. Trước hết,

$$a_n = a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3k+2}{2k(k+1)(2k+1)}.$$

Bây giờ, ta biết rằng

$$\frac{3k+2}{2k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1}.$$

Hơn nữa, các lập luận đơn giản đơn giản cho thấy $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = -1$. Thế các giá trị này vào tổng và bằng các giản ước đơn giản ta thu được (1).

(b) Việc chứng minh $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2$ có thể được suy ra qua kĩ thuật so sánh "tổng rời rạc-tích phân": $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

Ngoài ra, ta cũng có thể qui về "chuỗi điều hoà" như sau:

- $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$. Tổng $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ còn được biết đến dưới tên gọi "số điều hoà".
- Tất nhiên, dãy các số điều hoà tiến tới vô cùng khi $n \to \infty$. Tuy nhiên ta có ước lượng sau: $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$. Cụ thể hơn, $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ tiến tới một giá trị hữu hạn (hằng số Euler) khi $n \to \infty$, và sự kiện này cũng giúp ta kết thúc chứng minh.

(c) Ta có thể chỉ ra rằng: nếu $a_1, a_2, \ldots$ là một dãy các số thực sao cho $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (hữu hạn) thì

$$\lim_{n\to} \left(\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2} \cdots + \frac{a_n}{2n} \right) = a \ln 2.$$

Bạn hãy thử chứng minh xem!

2. Bài toán còn đúng với $n \geq 3$ số $a_1, \ldots, a_n$ bất kì (con số 14 chỉ đơn thuần đến từ việc a_{14}, hay tốt hơn là A 14, là mã của toà nhà chính của Viện Toán học trong Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam!).

Theo bất đẳng thức Trung bình cộng-Trung bình nhân, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} \geq n.$$

(Với qui ước hiển nhiên $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$.) (1đ.)

Nói cách khác,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i + a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} - 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - a_{i+2}}{a_{i+1} + a_{i+2}} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1} + a_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1} + a_i}.$$

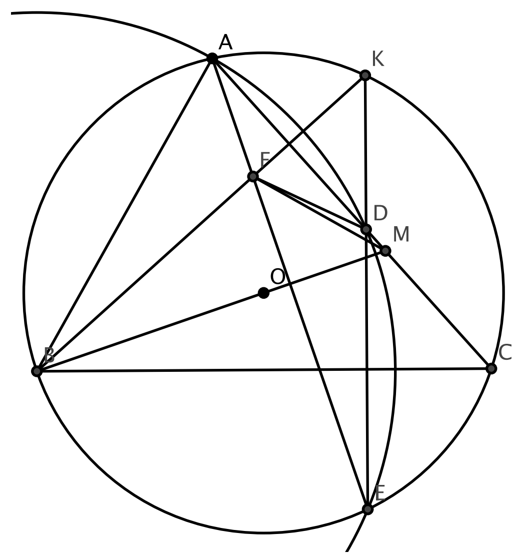
Dễ thấy dấu $' ='' $ xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_3 = \cdots = a_{n-1}, a_2 = a_4 = \cdots = a_n$ nếu n chẵn và $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ nếu n lẻ. (4đ)

Lưu ý: Không chỉ ra hoặc xác định sai dấu "$=$": trừ 1 điểm.

Nhận xét. Bất đẳng thức trên có thể được sử dụng để đưa ra một chứng minh ngắn gọn cho một trường hợp của bất đẳng thức Shapiro: nếu $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ (hoặc $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$) thì

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2}.$$

Bạn hãy thử sức xem!



3. (a) Ta có $\widehat{ABK} = \widehat{AEK}$. Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} \widehat{KBD} &= \widehat{BDE} - \widehat{BKD} \\ &= \widehat{BED} - \widehat{BAE} \\ &= \widehat{BED} - \widehat{BEA} \\ &= \widehat{AEK}. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{ABK} = \widehat{KBD}$. Do $\triangle BAD$ cân tại B nên điều này dẫn đến $BK \perp AD$. (2đ.)

(b) Kéo dài BO cắt AC tại M'. Ta chứng minh $M' \in (DEF)$. Lưu ý rằng từ đây ta suy ra $M \equiv M'$ và như vậy M thuộc đường thẳng BO cố định.

Thật vậy, để ý rằng AE là dây cung chung của hai đường tròn (O) và (B) nên $OB \perp AE$. Theo phần a) thì $BK \perp AD$ nên F chính là trực tâm của $\triangle ABM'$. Do đó

$$\widehat{FM'D} = \widehat{ABK} = \widehat{FED}.$$

Suy ra M', D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Vậy $M' \in (DEF)$ và bài toán được chứng minh. (3đ.)

4. Ta dễ dàng lập được 7 câu lạc bộ thoả mãn các điều kiện đề ra. Điều này cho ta đánh giá $n \geq 7$.

Gọi P là tập hợp gồm tất cả các tập con của $N := \{1, 2, \ldots, n\}$. Ta lần lượt đánh số các câu lạc bộ từ 1 đến n và gọi A_i là tập các học sinh của câu lạc bộ thứ i. Ký hiệu S là tập tất cả các học sinh của trường. Xét ánh xạ $f : S \to P$, xác định bởi $f(x) = \{i \in N | x \notin A_i\}$.

Ta nhận thấy rằng với mọi tập con $I \subset N$ gồm 7 phần tử thì theo ii) luôn tồn tại $u \in \cap_{i\in I} A_i$. Nói cách khác, $f(u) \subset N \setminus I$. Thế nhưng, điều kiện i nói rằng mỗi học sinh không thuộc ít nhất $n-7$ câu lạc bộ. Nói cách khác $|f(u)| \geq = n-7 = |N \setminus I|$. Từ đó suy ra $f(u) = N \setminus I$. Như vậy,

$$800 = |S| \geq |Im(f)| \geq \binom{n}{7}.$$

Từ đây, do hàm số $n \mapsto \binom{n}{7}$ là không giảm và do $\binom{12}{7} = 792 < 800 < \binom{13}{7}$, ta suy ra $n \leq 12$.

(2đ.)

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh trường hợp $n = 12$ có thể xảy ra. Trước hết, ta chỉ ra một tập có không quá 800 phần tử mà từ đó có thể chọn ra 12 tập con thỏa mãn đầu bài. Điều này được gợi ý từ ánh xạ f ở trên. Ta đặt $S_i, 1 \leq i \leq 12$, là tập gồm tất cả các tập con gồm 5 phần tử của $\{1, 2, \ldots, 12\}$ mà không chứa số i. Như vậy $|\cup_{i=1}^{12} S_i| = \binom{12}{5} = 792$ và 12 tập con S_i thỏa mãn điều kiện đầu bài. Xây dựng này cho ta một "trường" có 792 học sinh, được đánh "số" bởi 792 tập con 5 phần tử của $1, 2, \ldots, 12$ và sao cho học sinh "số" $\{a, b, c, d, e\}$ không thuộc các câu lạc bộ a, b, c, d, e nhưng thuộc tất cả các câu lạc bộ còn lại. Cuối cùng, ta bổ sung 8 học sinh và các học sinh mới này không tham gia bất kì câu lạc bộ nào. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng $800 = 792 + 8$ học sinh của trường cùng với 12 câu lạc bộ như trên thoả mãn các điều kiện đề ra. (3đ.)

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Cách khác. Lời giải bằng ngôn ngữ đồ thị dưới đây, có thể giúp các bạn dễ hình dung hơn. Xây dựng đồ thị 2 phần trên tập đỉnh $X \cup S$ trong đó X là tập hợp các học sinh của trường và S là tập hợp các câu lạc bộ. Các cạnh được xây dựng một cách hiển nhiên: $x \longleftrightarrow s$ nếu $x \in s$, nói cách khác, khi học sinh x thuộc câu lạc bộ s. Kí hiệu $\mathscr{A}$ là tập hợp các tập con 7 phần tử của S. Các giả thiết bài toán nói rằng:

- $|X| = 800$;
- $\forall\ x \in X$, $|s \in S; x \longleftrightarrow s| \leq 7$;
- $\forall A \in \mathscr{A}$, $\exists x$ sao cho $x \longleftrightarrow s$ với mọi $s \in A$.

Dễ thấy rằng, dưới điều kiện thứ 2 thì điều kiện cuối có thể được thay thế bởi:

- $\forall A \in \mathscr{A}$ phân biệt, $\exists!\ x$ sao cho $x \longleftrightarrow s$ với mọi $s \in S$.

Từ đó suy ra ánh xạ $\mathscr{A} \to X$, gửi một tập con 7 đỉnh của S đến đỉnh duy nhất cùng kề với 7 đỉnh đó là đơn ánh. Ta suy ra

$$\binom{n}{7} \leq |X| = 800.$$

Do hàm số $n \mapsto \binom{n}{7}$ là không giảm và do $\binom{12}{7} = 792 < 800 < \binom{13}{7}$ nên ta phải có $n \leq 12$.

Để kết thúc, ta chỉ ra rằng $n = 12$ là giá trị cần tìm bằng cách xây dưng 12 câu lạc bộ trên trường học 800 học sinh thoả mãn các điều kiện đề ra. Kí hiệu tập các câu lạc bộ bởi S. Ta "đánh số báo danh" $792 = \binom{12}{7}$ học sinh bởi các tập con 7 phần tử của S và ta tuyên bố rằng học sinh $(s_1, \ldots, s_7)$ thuộc mỗi một trong các câu lạc bộ $s_1, \ldots, s_7$ (và chỉ 7 câu lạc bộ đó). Cuối cùng, $800 - 792 = 8$ học sinh còn lại không tham gia bất kì câu lạc bộ nào. Dễ thấy xây dựng này thoả mãn các điều kiện đề ra.

5. Thế $y = -2x$ vào đẳng thức ban đầu ta có

$$g(f(-x)) = f(x) \tag{1}$$

Từ đó

$$f(-x-y) = f(x) + (2x+y)g(y). \tag{2}$$

Và do đó, thế $x = 0$ vào biểu thức trên ta có

$$f(-y) = f(0) + yg(y). \tag{3}$$

Thế (3) và (2) vào (1) ta thu được

$$(x+y)g(x+y) = (2x+y)g(y) - xg(-x). \tag{4}$$

Biểu thức này, với $y = 0$, cho ta

$$xg(x) = 2xg(0) - xg(-x). \tag{5}$$

(2đ.)

Như vậy, với $x \neq 0$ thì

$$g(x) + g(-x) = 2g(0) \tag{6}$$

Chú ý rằng đẳng thức này tất nhiên cũng đúng với $x = 0$.

Đặt $h(x) = g(x) - g(0)$. Khi đó $h(0) = 0$ và theo (6),

$$h(-x) = -h(x). \tag{7}$$

Theo (4) và (7) ta có

$$(x+y)h(x+y) = (2x+y)h(y) + xh(x) \tag{8}$$

Đối chỗ của x và y trong (8) và so sánh ta suy ra

$$xh(y) = yh(x) \tag{9}$$

Ta suy ra $h(x)/x = h(y)/y$, với mọi $x, y \neq 0$, và do đó $h(x)/x = c$ $(x \neq 0)$ với c là một hằng số nào đó. Như vậy,

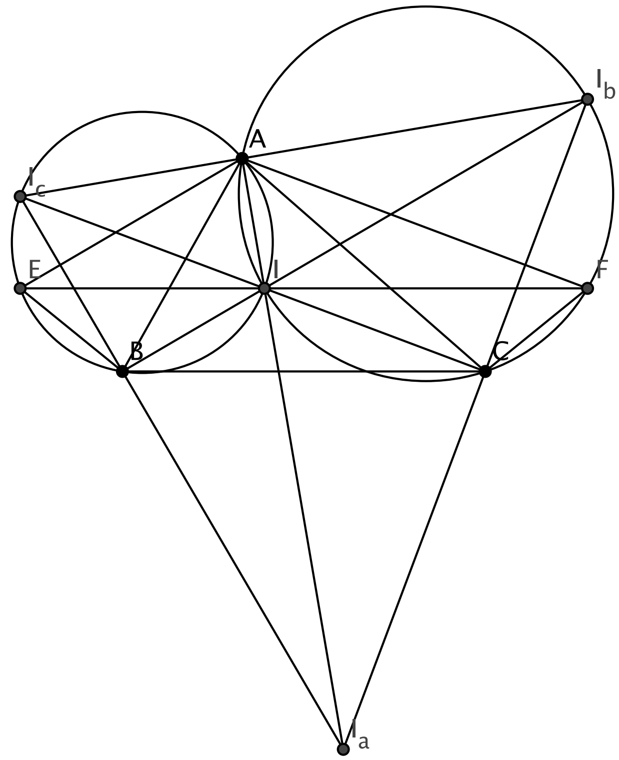
$$h(x) = c \cdot x \ \forall x.$$

(Đẳng thức với $x = 0$ cũng đúng vì $h(0) = 0$.) Ta suy ra $g(x) = cx + b$. (2đ.)

Đặt $f(0) = a$, theo (3), ta có $f(x) = a - bx + cx^2$. Từ đây ta kiểm tra được $b = 0$, rồi hoặc $c = a = 0$ hoặc $c = 1$. Nói cách khác, $f(x) \equiv g(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = x^2 + a, g(x) = x$. (1đ.)

Thử lại, ta thấy các bộ $(f(x), g(x)) = (0, 0)$ và $(f(x), g(x)) = (x^2 + a, x)$ với a là hằng số, thoả mãn điều kiện yêu cầu. (1đ.)

Lưu ý: Không đề cập đến việc thử lại các nghiệm: trừ 1 điểm.



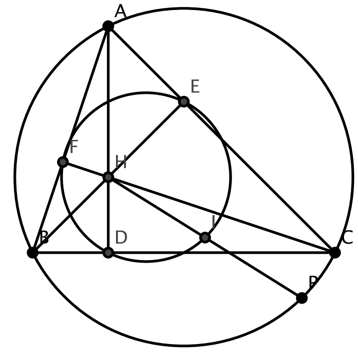
6. Kí hiệu I_a, I_b, I_c tương ứng là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. Thế thì II_c, II_b chính là đường kính các đường tròn $(IAB), (IAC)$. Do $BE = CF = AI$ nên

$$\begin{aligned} \widehat{EIB} &= \widehat{II_cA} = 90^\circ - \widehat{I_cIA} = 90^\circ - \widehat{CII_a}. \\ \widehat{FIC} &= \widehat{II_bA} = 90^\circ - \widehat{I_bIA} = 90^\circ - \widehat{BII_a}. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{EIB} + \widehat{BII_a} + \widehat{CII_a} + \widehat{FIC} = 180^\circ$. Vậy E, I, F thẳng hàng. (2đ.)

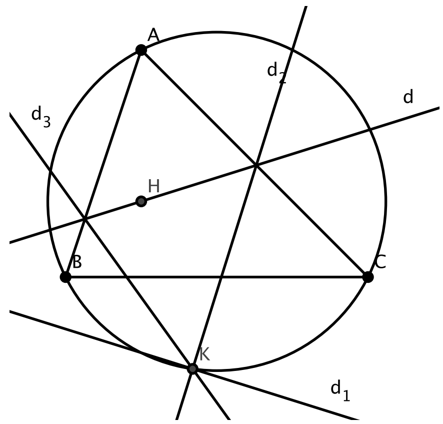
Để ý rằng I chính là trực tâm của $\triangle I_aI_bI_c$ nên áp dụng "Bổ đề các đường thẳng đối xứng" ta suy ra giao điểm D của d_1 và d_2 phải thuộc đường tròn $(I_aI_bI_c)$. (2đ.)

Mà đường tròn (ABD) chính là đường tròn Euler của $\triangle I_aI_bI_c$. Theo tính chất quen biết về đường tròn Euler: "với mọi điểm P thuộc đường tròn ngoại tiếp, trung điểm I của đoạn HP nối P với trực tâm của tam giác ABC thuộc đường tròn Euler". Ta suy ra trung điểm của ID phải thuộc đường tròn (ABC). (3đ.)



Học sinh tự chứng minh kết quả sau.

Bổ đề về các đường thẳng đối xứng. Cho tam giác ABC và d là một đường thẳng đi qua trực tâm H. Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng với d qua BC, CA, AB. Khi đó, d_1, d_2, d_3 đồng qui tại một điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



Lưu ý:

- Không chứng minh Bổ đề các đường thẳng đối xứng: trừ 2 điểm.
- Nêu rõ tính chất của đường tròn Euler nhưng không chứng minh: trừ 0 điểm.

Nhận xét. Có thể chỉ ra rằng $K \equiv A$. Và quan sát này cũng dẫn đến một trong các cách giải quyết bài toán một cách nhanh gọn.

7. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại các số nguyên $a_0, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) thoả mãn các tính chất đã nêu. Vế phải của đẳng thức trong đề bài chia 5 dư 1, do đó ta phải có $a_0 = 1$. Mặt khác, bằng cách thay vế phải bởi $(5+1)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i 5^i$ rồi trừ hai vế cho 1 ta có đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{k} a_i C_k^i 5^{i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i 5^{i-1}. \tag{1}$$

Xét đồng dư modulo 5 đẳng thức (1) ta suy ra $ka_1 \equiv k - 1 \pmod 5$. Do $a_1 = 0$ hoặc 1, đồng dư này chỉ xảy ra khi $a_1 = 0$ và $k \equiv 1 \pmod 5$. (1đ.)

Như vậy, (1) trở thành

$$\sum_{i=2}^{k} a_i C_k^i 5^{i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i 5^i. \tag{2}$$

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $k \equiv 1 \pmod{5^n}$ với mọi $n \geq 1$. Điều này hiển nhiên kéo theo $k = 1$ và do đó mâu thuẫn với giả thiết bài ra.

Như đã chỉ ra ở trên $k \equiv 1 \pmod 5$, nghĩa là khẳng định đúng cho $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng tới n. Viết $k = 5^n m + 1$ (m nguyên dương). Nhận xét rằng

$$C_{5^n m+1}^i \;\vdots\; 5^{n+2-i} \text{ và } C_{5^n m}^i \;\vdots\; 5^{n+2-i}, \quad \forall\ 2 \leq i \leq n+2. \tag{3}$$

Thật vậy, khẳng định là hiển nhiên khi $2 \leq i \leq 4$. Ta giả sử $i \geq 5$. Ta biết rằng lũy thừa của 5 trong $i!$ bằng

$$\sum_{j\ge 1}\left[\frac{i}{5^j}\right] \le \left[\sum_{j\ge 1}\frac{i}{5^j}\right] = \left[\frac{i}{4}\right].$$

Mặt khác, với mọi $n \ge 2$ thì $5^n \mid (5^n m+1)\cdot 5^n \cdots (5^n m - i + 2)$. Ta suy ra luỹ thừa của 5 trong $C^i_{5^n m+1} = \frac{(5^n m+1)\cdot 5^n m \cdots (5^n m - i+2)}{i!}$ không ít hơn $n - \left[\frac{i}{4}\right]$. Tương tự, luỹ thừa của 5 trong $C^i_{5^n m+1} = \frac{5^n m \cdots (5^n m - i+1)}{i!}$ không ít hơn $n - \left[\frac{i}{4}\right]$. Nhưng dễ thấy nếu $i \ge 5$ thì

$$n - \left[\frac{i}{4}\right] > n + 2 - i.$$

Và (3) được chứng minh. (3đ.)

Trong (2) xét đồng dư modulo 5^{n+1} ta có ngay, theo (3), vế trái chia hết cho 5^{n+1} và do đó

$$k - 1 \,\vdots\, 5^{n+1}.$$

Nói cách khác, $k \equiv 1 \pmod{5^{n+1}}$ và khẳng định là đúng cho $n+1$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn. (3đ.)

Lưu ý: Nếu chỉ chứng minh được $a_0 \equiv 1 \pmod 5$ mà không thiết lập được $a_0 \equiv 1 \pmod 5, a_1 \equiv 0 \pmod 5, k \equiv 1 \pmod 5$: cho 0 điểm.

Cách khác. Ta trình bày tóm tắt các bước của một cách giải khác.

- Dễ thấy $a_0 = 1$. Viết lại đẳng thức thành: $\sum_{i=1}^{k} a_i C^i_k 5^i = 6^{k-1} - 1$. Do $\frac{6^{k-1}-1}{5} \equiv k - 1 \pmod 5$ nên $a_1 = 1$ và $5 \mid k-1$;
- Theo một đẳng thức quen biết, "bổ đề nâng luỹ thừa", $v_5(6^{k-1}-1) = n+1$, trong đó $n = v_5(k-1) \ge 1$.
- Trong vế trái ở trên, mọi hạng tử $a_i C^i_k 5^i$ với $i \ge n+2$ hiển nhiên chia hết cho 5^{n+2}. Mặt khác, bằng một kết quả đáng chú ý, "Định lý Kummer", ta có $v_5(C^i_k) = n$ với mọi $2 \le i \le n+2$. Từ đó suy ra mỗi hạng tử của vế trái, kể từ $i = 2$, đều chia hết cho 5^{n+2}. Như vậy, đẳng thức trên có dạng $5k + 5^{n+2}B = 5^{n+1}C$, với k không chia hết cho 5. Nhưng đẳng thức này hiển nhiên không xảy ra vì $n \ge 1$.

Nhận xét. Lẽ dĩ nhiên, bài toán còn đúng cho mọi số nguyên tố lẻ thay vì 5.
