

Bài kiểm tra số 1
 Trường đông 2016

Thời gian: 180 phút.

1. (5 điểm.) Ký hiệu x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x = n + 2.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ tới một số thực dương. Tìm giới hạn đó.

2. (5 điểm.) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn: với mọi $x \in \mathbb{Q}$, ta có đồng thời các đẳng thức sau:

i) $f(x + 1) = f(x) + 1$;

ii) $f(x^3) = (f(x))^3$.

3. (5 điểm.) Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên đó. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Phân giác trong góc $\angle BAC$ cắt BC và (O) lần lượt tại D và E . Trên đường thẳng BC lấy điểm F sao cho $FD = FE$.

a) Gọi H là hình chiếu của A trên EF . Chứng minh H thuộc một đường tròn cố định.

b) Ký hiệu (I) là đường tròn tiếp xúc với các tia AB, AC và đường thẳng EF lần lượt tại M, N và P (tâm I cùng phía với A đối với đường thẳng EF). Lấy điểm Q trên MN sao cho $PQ \perp EF$. Chứng minh rằng AQ đi qua một điểm cố định.

4. (5 điểm.) Tại Trường Đông toán học 2016, các thầy cô đưa ra tổng cộng 100 bài toán cho học sinh giải, trong đó có một số bài được các thầy cô cho là khó và gọi là các bài "khoai". Bất ngờ là mỗi bài (dù "khoai" hay không "khoai") đều có đúng 20 em giải được. Để tổng kết Trường Đông, ban tổ chức sẽ chọn ra một số em để trao giấy khen. Với một cách chọn như vậy, một bài toán sẽ được gọi là "củ chuối" nếu nó là một bài "khoai" nhưng cả 20 em giải được nó đều không được giấy khen, hoặc nếu nó không phải "khoai" nhưng cả 20 em giải được nó đều được giấy khen. Chứng minh rằng ban tổ chức có thể chọn ra một số học sinh để trao giấy khen sao cho trong số 100 bài toán đưa ra có không quá 4 bài "củ chuối".

(Hết)