Phương pháp chứng minh bài toán đồng quy, thẳng hàng

Hạ Vũ Anh - THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Ngày 4 tháng 7 năm 2012

Để giải quyết bài toán chứng minh quan hệ đồng quy - thẳng hàng, ta có các phương pháp cơ bản sau: Phương pháp vectơ, Phương pháp tọa độ, Phương pháp biến hình và Phương pháp quỹ tích. Trong chuyên đề này, chúng ta chỉ bàn đến Phương pháp vectơ, Phương pháp biến hình và Phương pháp quỹ tích.

1 Phương pháp vectơ

Ví dụ 1. Cho tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm hai đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng M, N, O thẳng hàng.

Lời giải 1. Chứng minh $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = 0$

Lời giải 2.

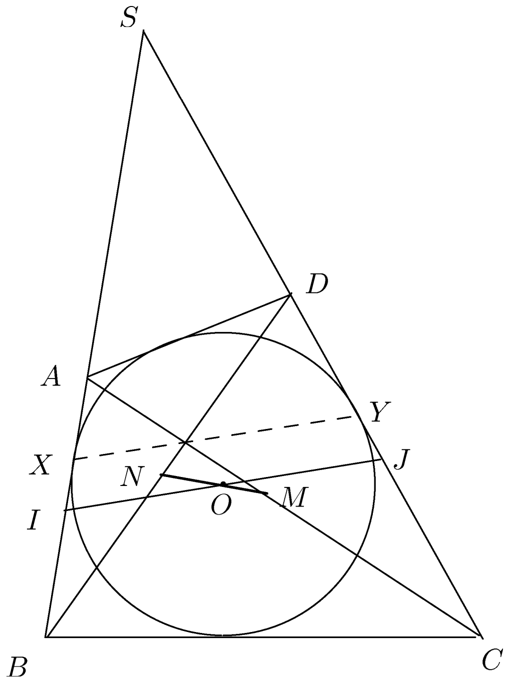
Gọi S là giao điểm của AB, CD, gọi X, Y theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với AB, CD. Qua O kẻ đường thẳng song song với XY, cắt AB, CD tại I, J. Khi đó O là trung điểm IJ, suy ra $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{JC}\right)$ và $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{JD}\right)$.

Hơn nữa, do $\angle BOI = \angle OCJ, \angle OBI = \angle COJ$, nên

$$\triangle IBO \backsim \triangle JOC \backsim \triangle OBC.$$

Suy ra

$$\frac{IB}{IO} = \frac{JO}{JC} \Longrightarrow IB \cdot JC = IO \cdot JO = IO^2 = JO^2$$



Hình 1.

Tương tự, cũng có $IA \cdot JD = JO^2 = IO^2$

Vậy

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{JD}} = k \Longrightarrow \overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{JC} = k\overrightarrow{JD}$$

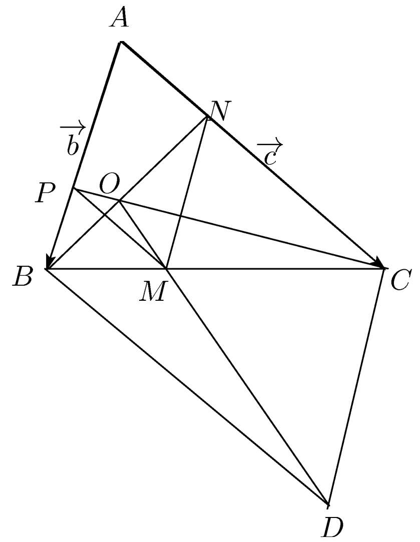
Từ đó, suy ra ... $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{ON}$. Điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Xét các điểm $M \in BC, N \in CA$ và $P \in AB$ sao cho tứ giác $APMN$ là một hình bình hành. Các đường thẳng BN và CP cắt nhau tại O. Chứng minh rằng đường thẳng OM luôn đi qua một điểm cố định.

Với bài toán chứng minh một đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định điều quan trọng trước tiên là cần dự đoán được điểm cố định đí đã. Ở bài toán này bằng việc vẽ một vài trường trường hợp đặc biệt của điểm M, ta dự đoán điểm cố định cần tìm là $D-$đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$, sau đó cần chứng minh O, M, D thẳng hàng.

Lời giải. (Hình 2)
Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$. Do B, M, C thẳng hàng theo thứ tự, nên tồn tại $n, p > 0$ sao cho $\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{c} + p\overrightarrow{b}$ với $n + p = 1$.

Từ đó, do tứ giác $ANMP$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{b}, \overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{c}$.



Hình 2

Do B, O, N thẳng hàng và C, O, P thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{b} + ny\overrightarrow{c} = z\overrightarrow{c} + pt\overrightarrow{b}$$

trong đó $x + y = 1 = z + t$.

Từ đó, do hai vectơ $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ không cùng phương, nên

$$x = \frac{p(1-n)}{1-np} \text{ và } y = \frac{1-p}{1-np}.$$

Do đó $\overrightarrow{AO} = \dfrac{p(1-n)}{1-np} \cdot \overrightarrow{b} + \dfrac{n(1-p)}{1-np} \cdot \overrightarrow{c}$, suy ra

$$(1-np) \cdot \overrightarrow{OM} = (1-np)(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO}) = np(1-p)\overrightarrow{b} + np(1-n)\overrightarrow{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1-np}{np} \cdot \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) - (n\overrightarrow{c} + p\overrightarrow{b})$$

Hay $\overrightarrow{AM} = np\overrightarrow{AD} + (1-np)\overrightarrow{AO}$ trong đó D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Từ đó, đường thẳng OM luôn đi qua D cố định (D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$).

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Xét điểm M trên tia AB, điểm N trên tia AC sao cho $AB = m \cdot AM$ và $AC = (m+1) \cdot AN$ với $m > 0$ nào đó. Chứng minh rằng các đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$. Khi đó, do giả thiết ta có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{m} \cdot \overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{m+1} \cdot \overrightarrow{c}$

Suy ra

$$(m+1)\overrightarrow{AN} - m\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

với D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

Từ đó suy ra MN luôn đi qua điểm D cố định.

Ví dụ 4. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tương ứng lấy các điểm A_1, B_1, C_1. Gọi G_a, G_b, G_c theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $AB_1C_1, C_1A_1B, A_1B_1C$ và G, G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $G_aG_bG_c$ theo thứ tự đó. Chứng minh rằng G, G_1, G_2 thẳng hàng.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra với mọi điểm O đều có

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \text{ và } \overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right).$$

Mà

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG_2} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OG_a} + \overrightarrow{OG_b} + \overrightarrow{OG_c}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1})\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1})\right) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OG} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OG_1}\end{aligned}$$

Suy ra $3\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OG_1}$ với mọi O. Điều này có nghĩa là G, G_1, G_2 thẳng hàng, điều phải chứng minh..

Ví dụ 5. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB của tam giác ABC, A_1, B_1, C_1 là điểm xuyên tâm đối của các đỉnh trên đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 đồng quy, xác định vị trí hình học của điểm đồng quy.

(Điểm X' được gọi là điểm xuyên tâm đối của điểm X nằm trên đường tròn (O) nếu XX' là một đường kính của (O)).

Lời giải. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và đặt

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}.$$

Khi đó $\overrightarrow{OA_1} = -\vec{a}, \overrightarrow{OA_0} = \dfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA_0} - \overrightarrow{OA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Một cách tương tự cũng có

$$2\overrightarrow{OB_0} - \overrightarrow{OB_1} = 2\overrightarrow{OC_0} - \overrightarrow{OC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Từ đó suy ra các đường thẳng A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 đồng quy tại H thoả mãn $\overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ tức trực tâm của tam giác.

Ví dụ 6. Cho lục giác lồi $ABCDEF$. Gọi M, M', N, N', P, P' theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AB, DE, BC, EF, CD, FA.
Chứng minh rằng MM', NN', PP' đồng quy khi và chỉ khi $S_{\triangle AEC} = S_{\triangle BFD}$

Lời giải

Ku hiệu $[XYZ]$ là diện tích đại số của tam giác XYZ. Với mọi điểm O ta thấy

$$\begin{aligned}
&4\left(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'}\right) \\
&= ((\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) + \\
&\quad (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \times (\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) \times (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})) \\
&= \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} \\
&\quad + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OC} \\
&= (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}) - \\
&\quad - (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OB}) \\
&= 2([OAE] + [OEC] + [OCA]) - \\
&\quad - 2([OBF] + [OFD] + [ODB]) \\
&= 2([AEC] - [BFD]).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$2\left(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'}\right) = [AEC] - [BFD] \qquad (1)$$

Nếu gọi O là giao điểm của MM', NN' thì

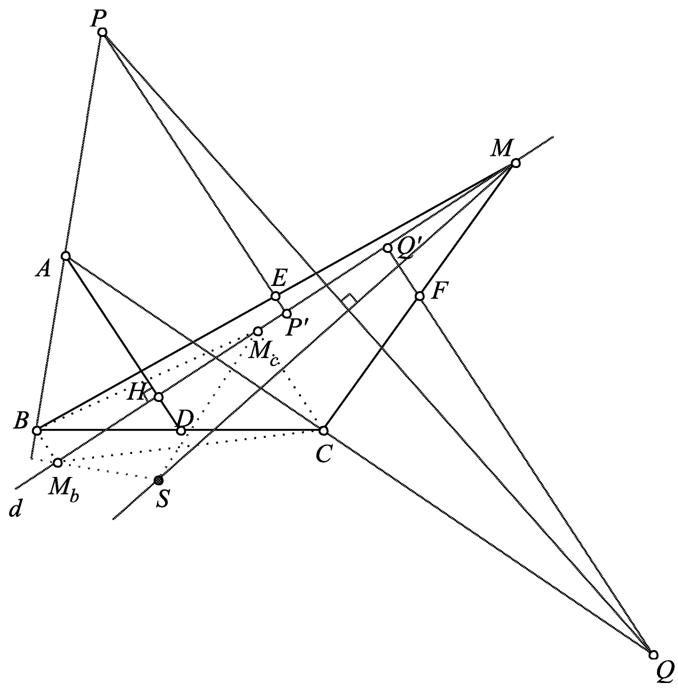
$$\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM'} = 0 = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{ON'} \qquad (2)$$

To (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'} = 0 \Leftrightarrow [AEC] = [BFD]$ điều phải chứng minh.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Một đường thẳng d vuông góc với AD. Xét $M \in d$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MC, MB. Đường thẳng qua E, vuông góc với d cắt AB tại P, đường thẳng qua F, vuông góc với d, cắt AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng qua M, vuông góc với PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi M thay đổi trên d.

(VMO 2008 - Prob. 7)

Lời giải.



Hinh 3

Gọi M_b, M_c theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên d. Nhận xét rằng, khi $M \equiv M_b$ thì $P \equiv B, Q \equiv A$ và khi $M \equiv M_c$ thì $P \equiv A, Q \equiv C$. Vậy, gọi S là giao điểm của đường thẳng qua M_b, vuông góc với AB và đường thẳng qua M_c, vuông góc với AC, thì S cố định. Và do đó, cần chứng minh $SM \perp PQ$.

Từ $\overrightarrow{SM_b} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 = \overrightarrow{SM_c} \cdot \overrightarrow{AQ}$ suy ra

$$\overrightarrow{SM_c} \cdot \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{SM_b} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{MM_b} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{MM_c} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \qquad (1)$$

Gọi H, P', Q' là hình chiếu của H, P, Q trên D. Khi đó P', Q' theo thứ tự là trung điểm MM_b, MM_c (do E, F là trung điểm MB, MC), $\overrightarrow{M_b'H} = \overrightarrow{HM_c} = \overrightarrow{P'Q'}$.

Suy ra $\overrightarrow{HQ'} = \overrightarrow{M_bP'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{M_bM}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{MM_b} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{MM_c} \cdot \overrightarrow{AQ} &= 2 \cdot \overrightarrow{MQ'} \cdot \overrightarrow{HQ'} - \overrightarrow{MM_b} \cdot \overrightarrow{HP'} \\
&= \overrightarrow{MQ'} \cdot \overrightarrow{M_bM} - \overrightarrow{MM_b} \cdot \overrightarrow{HP'} \\
&= \overrightarrow{M_bM} \cdot (\overrightarrow{MQ'} + \overrightarrow{HP'}) \\
&= \overrightarrow{M_bM} \cdot (\overrightarrow{MQ'} + \overrightarrow{P'M} + \overrightarrow{P'M_b} + \overrightarrow{HP'}) \\
&= \overrightarrow{M_bM} \cdot (\overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{HM_b}) = 0
\end{aligned}$$

Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ hay $SM \perp PQ$. Suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2. Rõ ràng chỉ cần xét $d \perp AD$ tại D là đủ. Chọn hệ trục tọa độ Dxy (hình 5) sao cho $A(0; a), C(2m; 2n), M(2x_0; 0)$. Do B, C đối xúng nhau qua gốc D nên $B(-2m; -2n)$. Từ đó

$$(AB) : (2n + a) \cdot x - 2m \cdot y + 2ma = 0$$

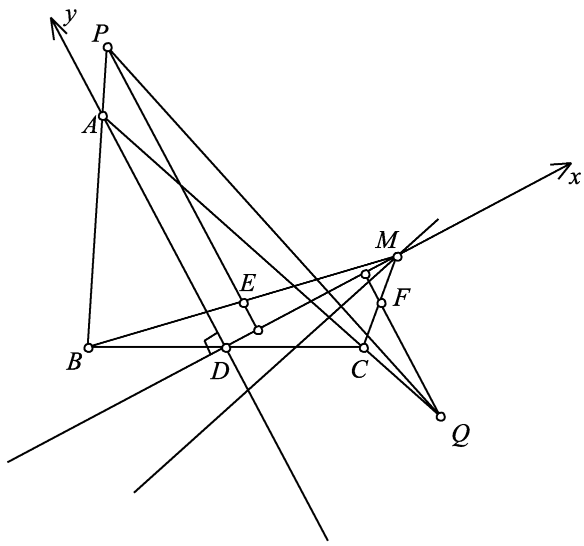
$$(AC) : (2n - a) \cdot x - 2m \cdot y + 2ma = 0$$

Từ đó suy ra $P(x_0 - m; \frac{(2n+a)(x_0-m)}{2m} + a)$ và $Q(x_0 + m; \frac{(2n-a)(x_0+m)}{2m} + a)$. Suy ra

$$\overrightarrow{PQ} = (2m; 2n - \frac{ax_0}{m})$$

Đường thẳng đi qua M, vuông góc với PQ có phương trình

$$2m(x - 2x_0) + (2n - \frac{ax_0}{m})y = 0$$



Hình 4

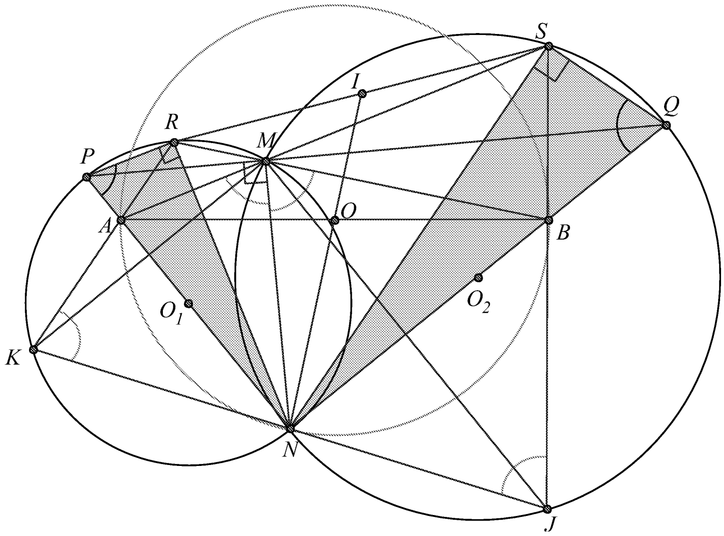
Khử tham số x_0, ta được đường thẳng này luôn đi qua $S(\frac{4mn}{a}; -\frac{4m^2}{a})$ với mọi x_0. Và do đó có đpcm

Nhận xét. Đây là bài toán tương đối khó. Tất nhiên, giải pháp tốt, nhiều học sinh nghĩ đến là sử dụng phương pháp tọa độ. Tuy nhiên, việc chọn hệ trục tọa độ không tốt, sẽ dẫn đến việc tính toán khá cồng kềnh, vất vả. Ý tưởng chọn D làm gốc, A, D nằm trên trục tung là một ý tưởng tốt, sẽ lợi dụng được B, C đối xúng qua gốc, đường thẳng d cùng phương với trục hoành. Để ý rằng, bằng một phép vị tự, tâm A chẳng hạn, đường thẳng d biến thành đường thẳng vuông góc AD tại D, cho nên một ý tưởng rất tốt là coi ngay đường thẳng d vuông góc với AD tại D. Việc làm này rút gọn quá trình tính toán đi rất nhiều. Việc tìm ra lời giải không dùng đến phương pháp tọa độ như ở lời giải 1 là hoàn toàn tự nhiên. Bằng việc xét các vị trí đặc biệt của M, dễ dàng chỉ ra điểm S cố định cần tìm, và do đó chỉ cần chứng minh $SM \perp PQ$. Lời giải 1 trình bày ở trên chỉ là một cách tiếp cận bài toán, ngoài ra có thể chú ý đến $SM \perp PQ \Leftrightarrow SQ^2 - SP^2 = MQ^2 - MP^2$ ta cũng thu được kết quả của bài toán.

Ví dụ 8. Cho đường tròn (O) với đường kính AB. Một điểm M thay đổi ở trong đường tròn, không nằm trên AB. Phân giác trong của góc $\angle AMB$ cắt đường tròn tại N, phân giác ngoài của góc $\angle AMB$ cắt NA, NB tại P, Q. Đường thẳng MA cắt lại đường tròn đường kính NQ tại S, đường thẳng MB cắt lại đường tròn đường kính NP tại R. Chứng minh rằng trung tuyến kẻ từ đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

(Vietnam TST 2009)

Lời giải. Ký hiệu $(a; b)$ để chỉ góc định hướng giữa hai đường thẳng a, b. Gọi I là trung điểm RS, gọi J, K theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua NB, NA. Khi đó N là trung điểm KJ. Ta sẽ chứng minh NI đi qua O (Hình 5).



Hình 5

Thật vậy, ta có

$$(MR; MA) + (MA; MN) \equiv (KR; KN) \equiv (KR; KA) + (KA; KN) \pmod{\pi}$$
$$\equiv (KR; KA) + (MN; MA) \pmod{\pi}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(MR;MA) &\equiv (KR;KA)+2(MN;MA) \pmod{\pi}\\ &\equiv (KR;KA)+(MB;MA)\equiv (KR;KA)+(MR;MA) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra $(KR;KA)\equiv 0 \pmod{\pi}$ hay A,R,K thẳng hàng. Tương tự, cũng có B,S,J thẳng hàng.

Ta có $\dfrac{\overline{BS}}{\overline{BJ}}=-\dfrac{S_{NSQ}}{S_{NJQ}}$ và $\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AK}}=-\dfrac{S_{NRP}}{S_{NKP}}$

Suy ra $\dfrac{\overline{BS}}{\overline{BJ}}:\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AK}}=\dfrac{S_{NSQ}}{S_{NJQ}}:\dfrac{S_{NRP}}{S_{NKP}}$

Mặt khác, do tính đối xứng

$$\begin{aligned}(PR;PN) &\equiv (KR;KN)\equiv (KA;KN)\equiv (MN;MA) \pmod{\pi}\\ &\equiv (MB;MN)\equiv (JN;JB)\equiv (JN;JS)\equiv (QN;QS) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Do đa hai tam giác NRP, NSQ đồng dạng. Suy ra $\dfrac{S_{NSQ}}{S_{NRP}}=\dfrac{NQ^2}{NP^2}$ và do tính đối xứng, nên

$$\frac{S_{NKP}}{S_{NJQ}}=\frac{S_{NMP}}{S_{NMQ}}=\frac{MP}{MQ}$$

Ngoài ra, do $NP\perp NQ$ nên

$$\frac{MQ}{NQ}\cdot\frac{NP}{MP}=\frac{NQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{NP}=\frac{NQ}{NP}\Rightarrow\frac{MQ}{MP}=\frac{NQ^2}{NP^2}$$

Vậy $\dfrac{\overline{BS}}{\overline{BJ}}:\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AK}}=1$ hay $\dfrac{\overline{BS}}{\overline{BJ}}=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AK}}=k$

Khi đó $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{BS}=k(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BJ})=2k\overrightarrow{ON}$ suy ra O,I,N thẳng hàng.

2 Phương pháp quỹ tích

Ví dụ 9. Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại A,B. Xét $M\in(O_1), N\in(O_2)$ thỏa mãn

$$(\overrightarrow{O_1A};\overrightarrow{O_1M})\equiv(\overrightarrow{O_2A};\overrightarrow{O_2N}) \pmod{2\pi} \qquad (\star)$$

Chứng minh rằng M,B,N thẳng hàng và trung trực MNluôn đi qua một điểm cố định, khi M,N thay đổi trên hai đường tròn, nhưng luôn thỏa mãn $(\star)$

(IMO 1978)

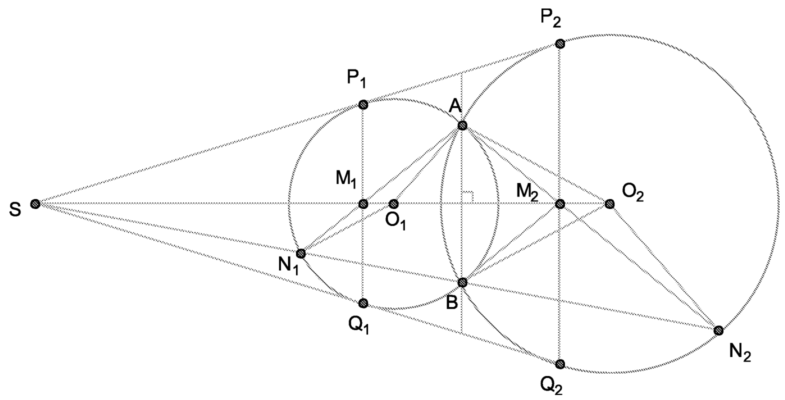
Nhận xét. Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại A, B. Với $M_i \in (O_i)$, ta luôn có

$$\begin{aligned} M, B, N \text{ thẳng hàng } &\Leftrightarrow (\overrightarrow{O_1A};\overrightarrow{O_1M}) \equiv (\overrightarrow{O_2A};\overrightarrow{O_2N}) \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow \angle(AM_1;AM_2) \equiv (AO_1;AO_2) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow (AO_1;AM_1) \equiv (AM_2;AO_2) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \triangle M_1AM_2 \backsim \triangle O_1AO_2 \quad \text{(tam giác } M_1AM_2 \text{ luôn tự đồng dạng.)} \end{aligned}$$

Ví dụ 10. Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Lấy $P_i, Q_i \in (O_i)$ sao cho P_1P_2, Q_1Q_2 là các tiếp tuyến chung của chúng. Gọi M_i là trung điểm P_iQ_i, đường thẳng AM_i cắt lại đường tròn (O_i) tại N_i. Chứng minh rằng N_1, B, N_2 thẳng hàng.

(VMO 2001)

Lời giải. Theo nhận xét trên, ta cần chứng minh $\angle O_1AN_1 = \angle O_2AN_2$



Hình 6

Dễ dàng chỉ ra được AB đi qua điểm chính giữa P_1P_2, Q_1Q_2 và do đó AB là trung trực của M_1M_2 (do $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$). Suy ra AM_1BM_2 là một hình thoi, do đó $AM_1 \parallel BM_2$.

Gọi S là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn, khi đó

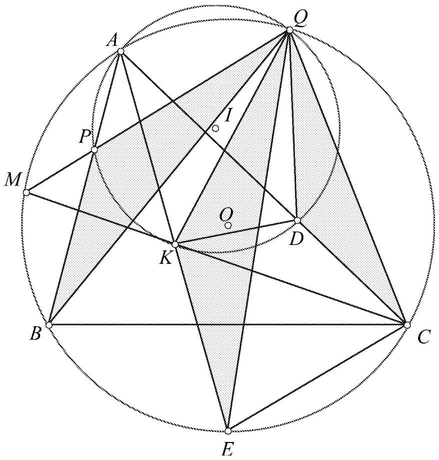
$$\begin{aligned} V_S^{\frac{R_2}{R_1}} : (O_1) &\longrightarrow (O_2) \\ N_1 &\longmapsto B \\ P_1 &\longmapsto P_2 \\ Q_1 &\longmapsto Q_2 \\ \Rightarrow M_1 &\longmapsto M_2 \end{aligned}$$

Suy ra $\angle M_1AO_1 = \angle M_1N_1O_1 = \angle M_2BO_2 = \angle M_2AO_2 \Longrightarrow \angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$ hay $\angle O_1AN_1 = \angle O_2AN_2$ và do đó N_1, B, N_2 thẳng hàng.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). K là một điểm trên phân giác ℓ_a, CK cắt lại (O) tại M. Đường tròn ω đi qua A và tiếp xúc với CM tại K cắt lại AB và (O) tại P, Q. Chứng minh rằng P, Q, M thẳng hàng.

(Russia 2010 - Grade 10)

Lời giải. Do tứ giác $APKQ$ nội tiếp nên $\angle PQK = \angle PAK = \frac{\angle BAC}{2}$



Hình 7

Đường tròn ω cắt lại (O) và AC tại E, D. Để ý rằng các tam giác QKE, QDC đồng dạng (xem nhận xét sau ví dụ 9), nên $\triangle QKD \backsim \triangle QEC$. Do đó

$$\begin{aligned} \angle MQK &= \pi - \angle MKQ - \angle KMQ = \pi - \angle KDQ - \angle CMQ \\ &= \pi - \angle QCE - \angle CMQ = \angle\angle EAC = \frac{BAC}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $\angle MQK = \angle PKQ$. Từ đó, do M, P nằm về cùng một phía của QK nên M, P, Q thẳng hàng.

Ví dụ 12. Cho tứ giác $ABCD$. Các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại E, các đường thẳng BC, DA cắt nhau tại F. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng AC, BD, EF. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Lời giải.
Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:
Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$. Các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại E. Gọi F, G theo thứ tự là trung điểm các đường chéo AC, BD của tứ giác. Khi đó

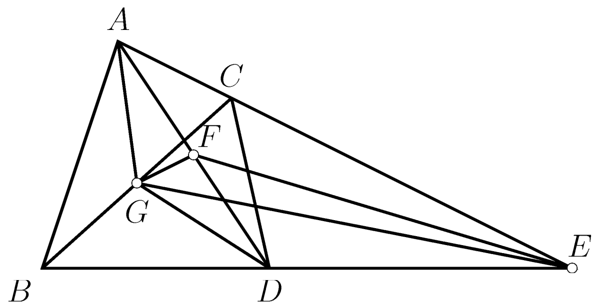
$$[EFG] = \frac{1}{4} \cdot [ABCD].$$

Ở đây hiệu $[A_1A_2 \ldots A_n]$ để chỉ diện tích đại số của đa giác định hướng $A_1A_2 \ldots A_n$, tức là

$$[A_1A_2 \ldots A_n] = \begin{cases} S_{A_1A_2 \ldots A_n} & \text{nếu đa giác } A_1A_2 \ldots A_n \text{ định hướng dương} \\ -S_{A_1A_2 \ldots A_n} & \text{nếu đa giác } A_1A_2 \ldots A_n \text{ định hướng âm} \end{cases}$$

Chứng minh bổ đề. Nối AG, CG. Ta có

$$\begin{aligned} [EFG] &= [AEG] - [AFG] - [AEF] = [ABG] + [EGB] - [AFG] - [AEF] \\ &= \frac{1}{2} \cdot ([ABD] + [BDE] - [ACG] - [ACE]) = \frac{1}{2} \cdot ([ADE] - [AGCE]) \\ &= \frac{1}{2} \cdot ([ABCD] - [ABCG]) \end{aligned}$$

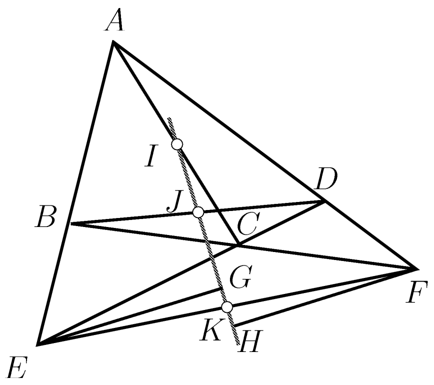


Hình 8

Mặt khác

$$[ABCG] = \frac{1}{2} \cdot [ABG] + [BCG], [ABG] = \frac{1}{2} \cdot [ABD]$$
$$\text{và } [BCG] = \frac{1}{2} \cdot [BCD]$$

Từ đó suy ra bổ đề được chứng minh.



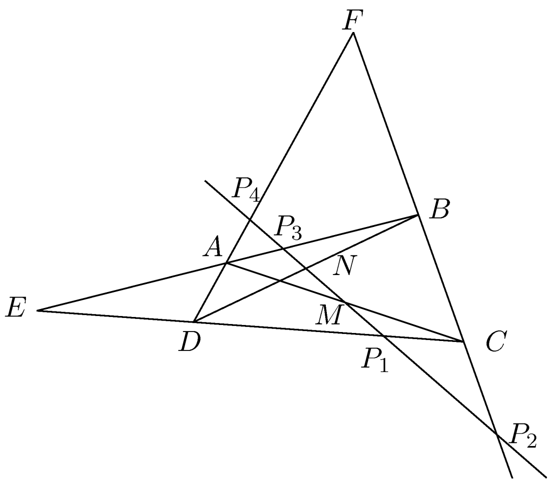
Hình 9

Áp dụng bổ đề, ta có $[EIJ] = [IJF] \ \left(= \frac{1}{2} \cdot [ABCD]\right)$.

Kẻ $EG, FH \perp IJ$. Khi đó $\dfrac{1}{2} \cdot IJ \cdot EG = \dfrac{1}{2} \cdot IJ \cdot FH$ Suy ra $EG = FH$, và do đa $EGFH$ là hình bình hành. Suy ra GH, EF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, tức là GH đi qua K. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 13. Tứ giác lồi $ABCD$ diện tích S, không có hai cạnh nào song song. Lấy điểm $P_1 \in (CD)$ sao cho P_1, C cùng phía đối với (AB) và $S_{\triangle ABP_1} = \frac{S}{2}$. Tương tự, cũng có $P_2 \in (BC), P_3 \in (AB), P_4 \in (DA)$. Chứng minh rằng P_1, P_2, P_3, P_4 thẳng hàng.

Lời giải.



Hình 10

Bổ đề. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm hai đường chéo AC, BD của tứ giác lồi $ABCD$. Khi đó $P \in (MN) \Leftrightarrow [PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA]$

Chứng minh bổ đề. Ta có

$$\begin{aligned}[MNP] &= \frac{1}{2}\left([ANP]+[CNP]\right)\\ &= \frac{1}{4}\left([ABP]+[ADP]+[CDP]+[CBP]\right)\\ &= \frac{1}{4}\left([PAB]+[PCD]-[PBC]-[PDA]\right)\end{aligned}$$

Vậy

$$P \in (MN) \Leftrightarrow [MNP]=0 \Leftrightarrow [PAB]+[PCD]=[PBC]+[PDA]$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, W.L.O.G, có thể coi tứ giác $ABCD$ định hướng âm. Khi đó

$$[P_1AB] = -\frac{S}{2}\,;\ [P_1CD]=0$$

Và

$$-S = [ABCD] = [P_1AB]+[P_1CD]+[P_1BC]+[P_1DA]$$

Suy ra

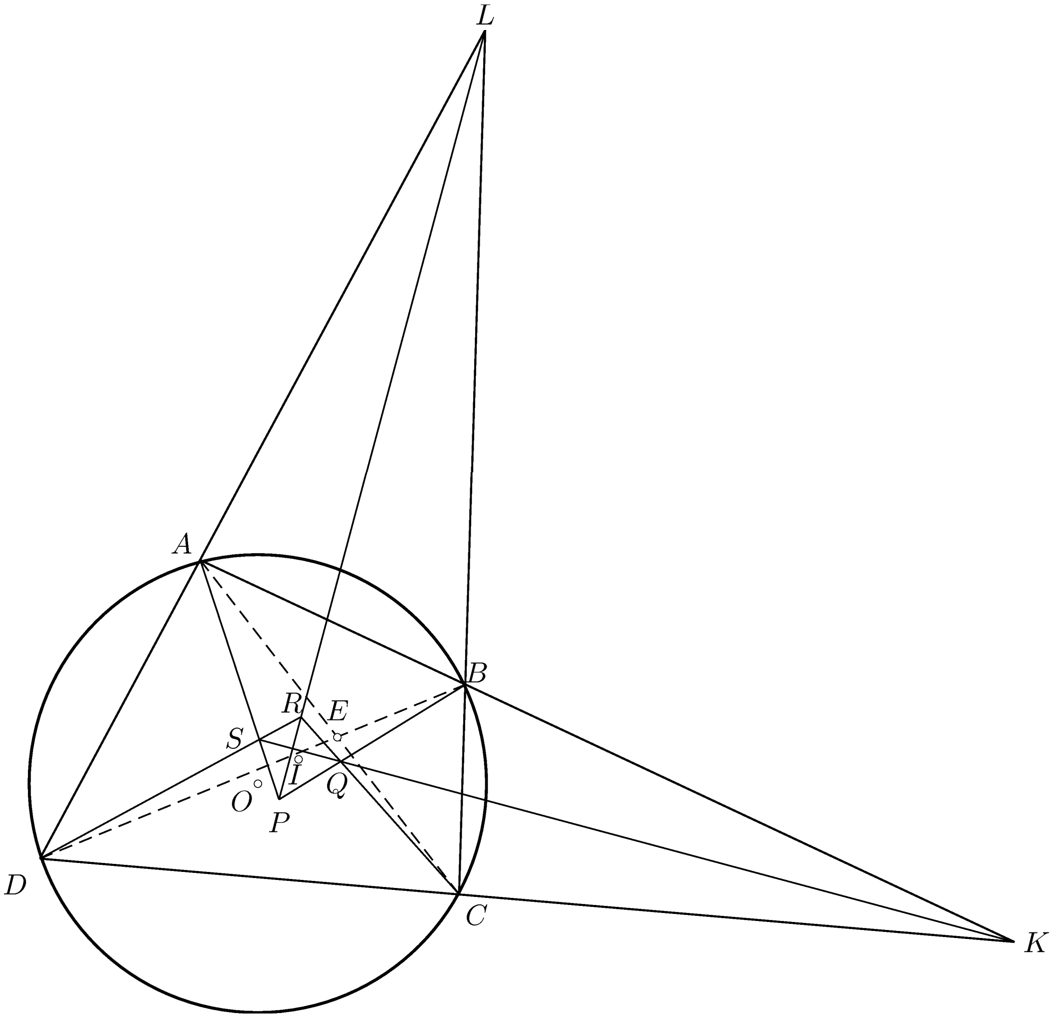
$$[P_1BC]+[P_1DA] = -\frac{S}{2} = [P_1AB]+[P_1CD]$$

Do đó $P_1 \in (MN)$. Hoàn toàn tương tự, cũng được $P_2, P_3, P_4 \in (MN)$. Vậy P_1, P_2, P_3 và P_4 cùng cùng nằm trên một đường thẳng.

Ví dụ 14. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), có hai đường chéo cắt nhau tại E. Phân giác của các góc $\angle DAB, \angle ABC$ cắt nhau tại P, của các góc $\angle ABC, \angle BCD$ cắt nhau tại Q, của các góc $\angle BCD, \angle CDA$ cắt nhau tại R, của các góc $\angle CDA, \angle DAB$ cắt nhau tại S.

1. Chứng minh rằng tứ giác $PQRS$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng O, E, I thẳng hàng (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQRS$)
3. Chứng minh rằng $PR \perp QS$

Lời giải.



Hình 11

1. Ký hiệu ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c và ℓ_d theo thứ tự là đường phân giác của các góc $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ và $\angle CDA$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\angle(PS;PQ) &\equiv \angle(\ell_a;\ell_b) \pmod{\pi} \\
&\equiv (\ell_a;AB) + (AB;\ell_b) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2}\cdot\Big(\pi + \angle(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})\Big) + \frac{1}{2}\cdot\Big(\angle(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) \pmod{\pi}\Big) \\
&\equiv (CD;\ell_c) + (\ell_d;CD) \pmod{\pi} \\
&\equiv (\ell_d;\ell_c) \equiv (RS;RQ) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Do đó bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

2. Khi tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh (đối diện) song song, thì kết luận của bài

toán là hiển nhiên. Vậy, ta chỉ cần xét trường hợp tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh nào song song. Gọi $K = (AB) \cap (CD), L = (AD) \cap (BC)$.

Bổ đề. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và có $AC \cap BD = E, (AB) \cap (CD) = F, (DA) \cap (BC) = G$. Khi đó O là trực tâm tam giác PQR

(Đây là một kết quả cơ bản, các em học sinh hãy tự chứng minh (bằng ít nhất ba cách khác nhau))

Áp dụng bổ đề, ta được $OE \perp KL$ (1)

Từ giả thiết suy ra Q là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\angle BKC$ của $\triangle BKC$ và S là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADK. Do đó Q, S nằm trên phân giác của góc $\angle BKC$ hay Q, S, K thẳng hàng. Tương tự, cũng được P, R, L thẳng hàng.

Ta có

$$\begin{aligned}
(CR; CB) \equiv (CR; CL) &\equiv \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CL}) \pmod \pi \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{LD}) + (\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{CL}) \right] \pmod \pi \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DL}) + (\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{CL}) \right] \pmod \pi \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[\pi + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + \pi + (\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{LC}) \right] \pmod \pi \\
&\equiv (BL; BP) + (LP; LC) \equiv (PR; PB) \pmod \pi
\end{aligned}$$

Suy ra B, C, P, R cùng nằm trên một đường tròn tròn, do đó $\overline{LB} \cdot \overline{LC} = \overline{LP} \cdot \overline{LR} \Rightarrow L$ nằm trên trục đẳng phương của (O) và $(PQRS)$. Tương tự, cũng có Knằm trên trục đẳng phương của hai đườngg tròn này. Vậy (KL) là ttrục đẳng phương của (O) và đường tròn $(PQRS)$ suy ra $KL \perp OI$ (2)

Từ (1), (2) suy ra O, I, E thẳng hàng.

3. Theo chứng minh ở phần 2 thì

$$(RP; RC) = (BP; BQ) = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \pmod \pi \tag{3}$$

Tương tự, cũng được

$$(PR; PA) = (DR; DA) = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) \pmod \pi \tag{4}$$

Để ý rằng $(RP; RC) = (SP; SQ) \pmod \pi), (PR; PA) = (PR; PS) \pmod \pi$ (5)
và $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = \pi \pmod{2\pi}$ (6)

Từ (3),(4),(5),(6) suy ra $(PR;PS)+(SP;SQ)=\dfrac{\pi}{2}\pmod{\pi}$ suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Khi thay giả thiết "tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)" bằng giả thiết "bốn điểm A,B,C,D cùng nằm trên đường tròn (O)" thì kết luận của bài toán vẫn đúng.

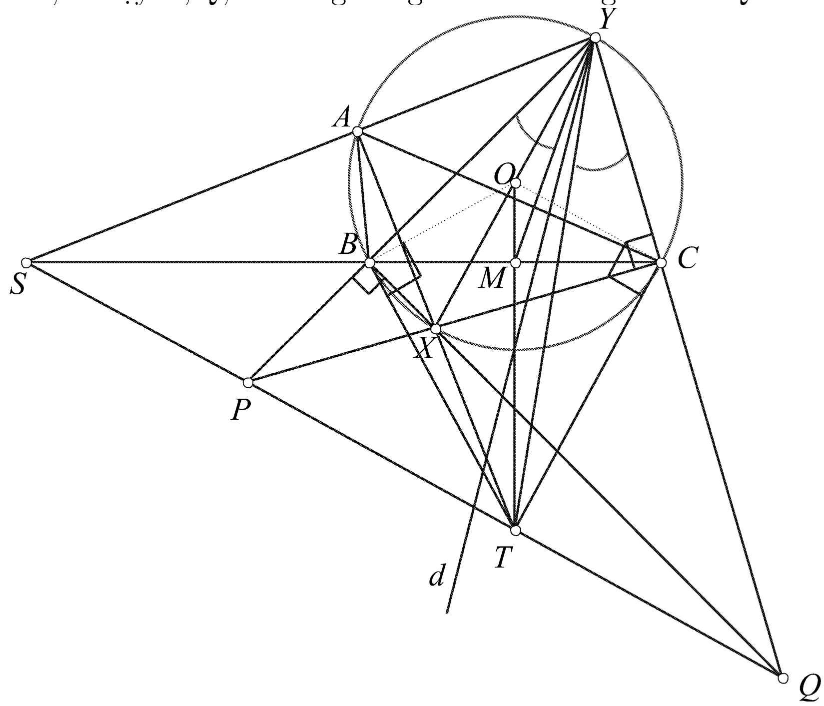
Ví dụ 15. Cho tam giác ABC có $AB\neq AC$ nội tiếp trong đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt lại đường tròn tại X. Gọi Y là điểm xuyên tâm đối với X trên (O). Các đường thẳng YB,XC cắt nhau tại P, các đường thẳng XB,YC cắt nhau tại Q.

1. Chứng minh rằng P,Q,T thẳng hàng.

2. Chứng minh rằng các đường thẳng PQ,BC và AY đồng quy.

Lời giải.

1. Do XY là đường kính của (O) nên $\angle QBY=\angle XBY=90^\circ$ và $\angle PCY=\angle XCY=90^\circ$. Suy ra $\angle PBQ=\angle PCQ=90^\circ$ do đó, tứ giác $BCQP$ nội tiếp đường tròn đường kính PQ. Từ giả thiết, suy ra YT là đường đối trung kẻ từ Y của tam giác YBC, vì vậy P,Q,T thẳng hàng và T là trung điểm PQ.



Hình 12

2. Do tứ giác $ABXC$ điều hòa, nên $AB \cdot XC = AC \cdot XB$ hay $\frac{AB}{AC} = \frac{XB}{XC}$ (1)

Do tứ giác $BCQP$ nội tiếp, nên $XB \cdot XQ = XC \cdot XP$ suy ra $\frac{XB}{XC} = \frac{XP}{XQ}$ (2)

Do tứ giác $ABCY$ nội tiếp, nên $\angle ABY = \angle ACY \Rightarrow \angle ABP = \angle ACQ$ (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra $\triangle ABP \backsim \triangle ACQ$. Do đó $\angle APY = \angle APB = \angle AQC\angle AQY$ suy ra tứ giác $AYQP$ nội tiếp trong một đường tròn ω

Gọi S là giao điểm của AY, PQ. Xét phương tích của S đối với các đường tròn $(O), \omega$ và (T) ngoại tiếp tứ giác $BCQP$, ta có

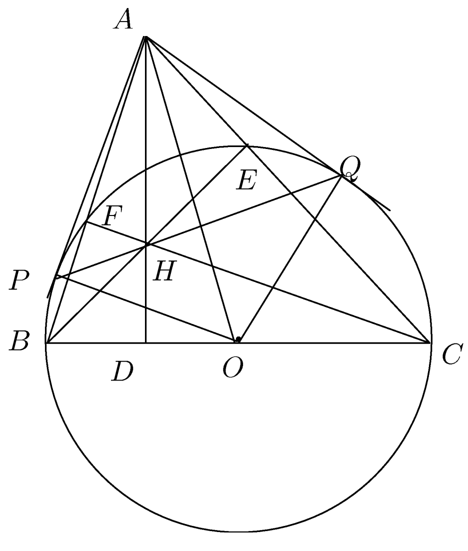
$$P_{S/(O)} = \overline{SA} \cdot \overline{SY} = P_{S/\omega} = \overline{SP} \cdot \overline{SQ} = P_{S/(T)}$$

Suy ra S nằm trên trục đẳng phương của (O) và (T) tức $S \in (BC)$. Điều phải chứng minh.

Ví dụ 16. Gọi H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ đến đường tròn đường kính BC (P, Q là các tiếp điểm). Chứng minh rằng P, Q, H thẳng hàng.

(Chinese 1996)

Lời giải.



Hình 13

Từ giả thiết, suy ra ngũ giác $APDOQ$ nội tiếp đường tròn đường kính AO (O là trung điểm BC). DO đó $\angle AQP = \angle AOP$

Mặt khác, xét phương tích của A đối với các đường tròn (O) và $(CEHD)$ ta có

$$AP^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD \Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{AH}{AP} \Rightarrow \triangle APH \backsim \triangle ADP$$

Do đó

$$\angle APH = \angle ADP = \angle AOP \Longrightarrow \angle APH = \angle AOP$$

Suy ra $\angle APH = \angle APQ$, do đó P, Q, H thẳng hàng.

3 Phương pháp biến hình

Ví dụ 17. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Từ một điểm M trên (O_2) nhưng không nằm trên đường thẳng O_1O_2 kẻ hai tiếp tuyến MB, MC tới (O_1) $(B, C \in (O_1))$. Các đường thẳng AB, AC cắt lại đường tròn (O_2) tại D, E, đường thẳng DE và và tiếp tuyến tại M của (O_2) cắt nhau ở N. Chứng minh rằng N luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

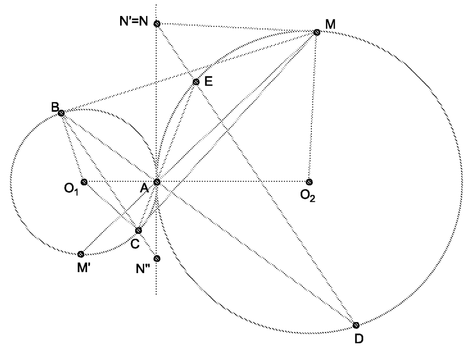
(VMO 2003)

Lời giải 1. (Vị tự)

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A, C của (O) cắt nhau tại E. Khi đó B, D, E thẳng hàng khi và chỉ khi $AB \cdot CD = BC \cdot DA$

Trở lại bài toán. Đường thẳng AM cắt lại (O_1) tại M'. Khi đó, tứ giác $ABM'C$ có tính chất $AB \cdot CM' = BM' \cdot CA$ (1)

Đặt $k = \frac{\overline{AO_2}}{\overline{AO_1}}$ ta có



Hình 14

$$\begin{aligned} V_A^k : (O_1) &\longrightarrow (O_2) \\ B &\longmapsto D \\ C &\longmapsto E \\ M' &\longmapsto M \end{aligned}$$

Suy ra $MD = |k|M'B, ME = |k|M'C, AM = |k|AM', AD = |k|AB, AE = |k|AC$. Kết hợp với (1), ta được

$$AD \cdot ME = AE \cdot MD$$

Điều này tương đương với giao hai tiếp tuyến tại A, M của (O_2) nằm trên DE hay N luôn chạy trên tiếp tuyến chung của $(O_1), (O_2)$ tại A (trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$).

Lời giải 2. (Cực và đối cực) Giả sử trục đẳng phương của hai đường tròn cắt MN tại N' và AN cắt BC tại N''.

Ta có $N'' \in BC$ là đường đối cực của M đối với (O_1) suy ra M nằm trên đường đối cực của N'' đối với (O_1). Mà qua phép vị tự V_A^k, đường thẳng BC biến thành đường thẳng DE, đường thẳng $M'N''$ biến thành đường thẳng MN, nên $M'N''$ tiếp xúc với (O_1). Suy ra M' nằm trên đường đối cực N'' đối với (O_1). Vì vậy $N''A$ tiếp xúc với (O_1). Suy ra NA tiếp xúc với (O_i).

Lời giải 3. (Nghịch đảo) Xét phép nghịch đảo f cực A phương tích 1.

$$\begin{aligned} f : (O_i) &\longmapsto d_i \ : \ \ d_1 \parallel d_2 \\ X &\longmapsto X^\star \\ (MB) &\longmapsto (M^\star B^\star A) \text{ tiếp xúc với } d_1 \\ (MC) &\longmapsto (M^\star C^\star A) \text{ tiếp xúc với } d_1 \\ \text{tiếp tuyến tại } A \text{ của } (O_2) &\longmapsto \text{ đường tròn } \omega \text{ qua } A \text{ tiếp xúc với } d_2 \text{ tại } M^\star \\ N &\longmapsto N^\star \end{aligned}$$

Cần chứng minh $AN^\star \parallel d_i$ hay $AN^\star \parallel E^\star D^\star$

Gọi X là tâm của đường tròn $(D^\star E^\star A), AM^\star \cap d_1 = I$. Ta có

$$\overline{IB^\star}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IM^\star} = \overline{IC^\star}^2 \Rightarrow \overline{IB^\star} = -\overline{IC^\star} \Rightarrow \overline{M^\star E^\star} = -\overline{M^\star D^\star}$$

suy ra $X, M^\star,$ tâm ω thẳng hàng hay $\omega X \perp d_2$ Mà $N^\star \in (\omega) \cap (AD^\star E^\star)$ nên $\omega X \perp AN^\star$. Suy ra $AN^\star \parallel d_2$. ĐPCM

Ví dụ 18. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F tương ứng. Gọi $\omega, \omega_a, \omega_b, \omega_c$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE. Đường tròn ω cắt lại các đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng

1. Các đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ đồng quy.

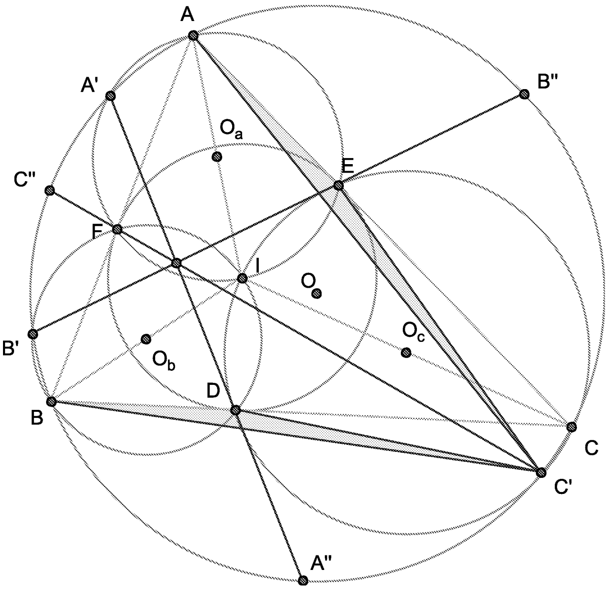
2. Các đường thẳng DA', EB', FC' đồng quy.

(Canada 2007)

Lời giải.

1. Dễ thấy $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ cùng đi qua I.

2. Gọi O, O_a, O_b, O_c theo thứ tự là tâm của các đường tròn $\omega, \omega_a, \omega_b, \omega_c$.



Hình 15

Ta có $\angle CAC' = \angle CBC'$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CC'}$ của (O)) và $\angle CDC' = \angle CEC'$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CC'}$ của (O_c)) suy ra $\angle BDC' = \angle AEC'$. Vậy $\triangle AEC' \backsim \triangle BDC'$. Suy ra $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AE}{BD} = \frac{AF}{BF} \Rightarrow C'F$ là phân giác cụa góc $\angle AC'B$. Do đó, $C'F$ đi qua điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ của (O). Tương tự, $A'D, B'E$ theo thứ tự đi qua điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ của (O).

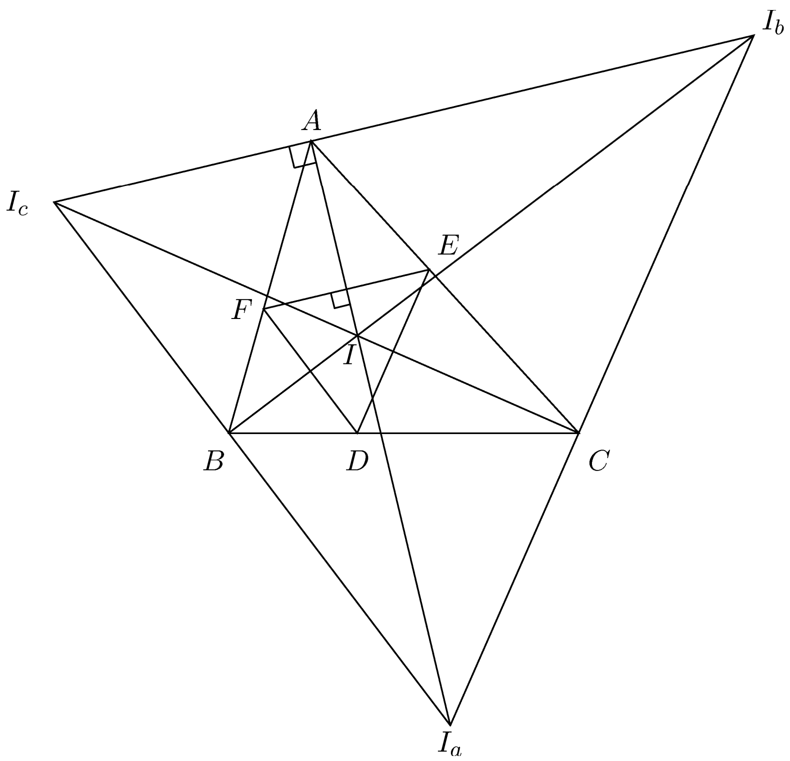
Gọi A'', B'', C'' lần lượt là điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{BC}$. $\overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ của (O). Cần chứng minh $A''D, B''E, C''F$ đồng quy.

Để ý rằng $DE \parallel A''B''$ (cùng vuông góc với IC), $EF \parallel B''C''$ (cùng vuông góc với AI), $FD \parallel A''B''$ (cùng vuông góc với BI), tồn tại một phép vị tự biến tam giác DEF thành tam giác $A''B''C''$. Suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2. Xét phép nghịch đảo cực I, phương tích r^2, biến X thành $X^\star$. Chứng minh các đường tròn $(A'^\star D^\star I), (B'^\star E^\star I), (C'^\star F^\star I)$ cùng đi qua một điểm $J \neq I$ $(J \in OI)$

Ví dụ 19. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F theo thứ tự đó. Khi đó OI là đường thẳng Ơ-le của tam giác DEF (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Lời giải.



Hình 16

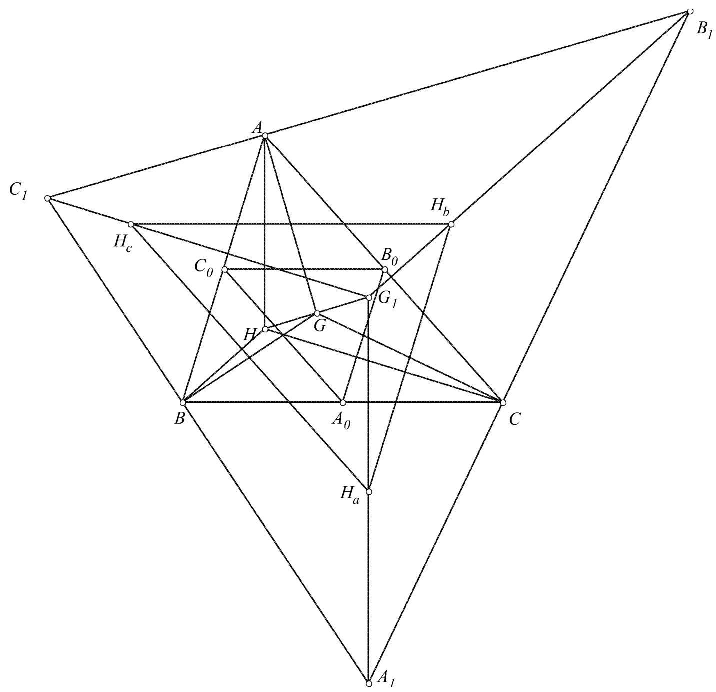
Gọi I_a, I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A, B, C của tam giác ABC. Dễ dàng chứng minh được $I_bI_c \parallel EF, I_cI_c \parallel FD, I_aI_b \parallel DE$. Do đó, có phép vị tự f mà $f(I_a) = D, f(I_b) = E, f(I_c) = F$. Suy ra f biến đường thẳng Ơ-le của tam giác $I_aI_bI_c$ thành đường thẳng Ơ-le của tam giác DEF.

Nhưng OI là đường thẳng Ơ-le của tam giác $I_aI_bI_c$ và I nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác DEF. Vậy, OI là đường thẳng Ơ-le của tam giác DEF

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H. Các đường thẳng qua A, B và C theo thứ tự vuông góc với GA, GB và GC tạo thành tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường thẳng GH.

(Russia 2008 - Grade 9)

Lời giải.



Hình 17

Các đường thẳng đi qua A, B, C theo thứ tự vuông góc với các đường thẳng AG, BG, CG tạo thành tam giác $A_1B_1C_1$ (Hình vẽ). Gọi G_1 là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$, gọi H_a, H_b, H_c theo thứ tự là trực tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1.

Do $GA \perp AC_1, GB \perp BC_1$ nên tứ giác AC_1BG nội tiếp đường tròn đường kính C_1G (và do đó $H_c = Đ_{C_0}(G)$ (với C_0 là trung điểm AB)). Khi đó C_1H_c và C_1G đối xứng với nhau qua phân giác của góc $\angle AC_1B$. Từ đó, để ý rằng G là điểm Lemoine của tam giác $A'B'C'$ nên C_1, H_c, G_1 thẳng hàng. Tương tự, A_1, G_1, H_a thẳng hàng và B_1, G_1, H_b thẳng hàng.

Do

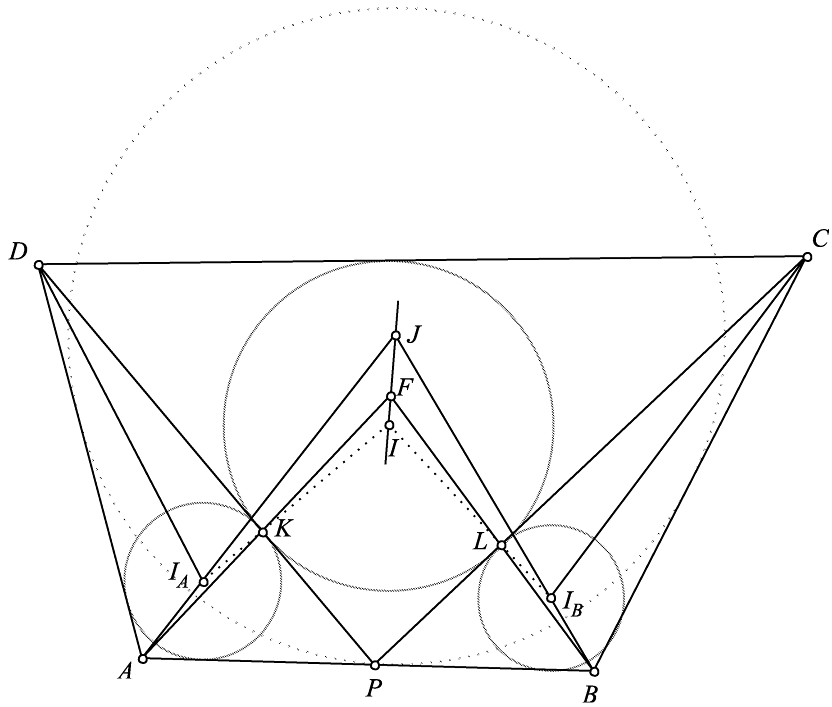
$$Đ_G : A \mapsto H_a, B \mapsto H_b, C \mapsto H_c$$

nên $Đ_G : H \mapsto G_1$, điều phải chứng minh.

Ví dụ 21. Cho điểm P nằm trên cạnh AB của tứ giác lồi $ABCD$ và đường tròn ω tâm I, nội tiếp trong tam giác CDP. Giả sử rằng ω tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của các tam giác APD, BPC tại K, L theo thứ tự đó. $AC \cap BD = E, AK \cap BL = F$. Chứng minh rằng E, I, F thẳng hàng

(Shortlisted 2007)

Lời giải.



Hình 18

Gọi $(J;R)$ là đường tròn tiếp xúc với AB, AD, BC và $(I_A;r_A), (I_B;r_B)$ là đường tròn nội tiếp các tam giác ADP, BCP.

Ta có $V_A^{\frac{R}{r_A}} \circ V_K^{-\frac{r_A}{r}} : (I;r) \mapsto (J;R)$

Suy ra tâm vị tự của $(I), (J)$ là giao điểm của AK, IJ (1)

Mặt khác $V_B^{\frac{R}{r_B}} \circ V_L^{-\frac{r_B}{r}} : (I;r) \mapsto (J;R)$

Suy ra tâm vị tự của $(I), (J)$ là giao điểm của BL, IJ (2)

Từ (1),(2) suy ra $F \in IJ$ (3)

(Nếu $I \equiv J$ thì $F \equiv I \equiv J$)

Tứ giác $APCD$ có đường tròn nội tiếp của hai tam giác APD, PCD tiếp xúc với đường chéo PD tại cùng một điểm, nên $APCD$ ngoại tiếp được một đường tròn. Tương tự, tứ giác $BCDP$ ngoại tiếp được một đường tròn. Gọi $(J_A;\rho_A), (J_B;\rho_B)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tứ giác $DAPC, BCDP$.

Ta có
$$V_A^{\frac{R}{\rho_A}} \circ V_C^{\frac{\rho_A}{r}} : (I;r) \mapsto (J;R)$$
Suy ra tâm vị tự ngoài của $(I),(J)$ là giao điểm của AC, IJ (4)
$V_B^{\frac{R}{\rho_B}} \circ V_D^{\frac{\rho_B}{r}} : (I;r) \mapsto (J;R)$
Suy ra tâm vị tự ngoài của $(I),(J)$ là giao điểm của BD, IJ (5)
Từ (4),(5) suy ra $E \in IJ$ (6)
Từ (5),(6) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét.

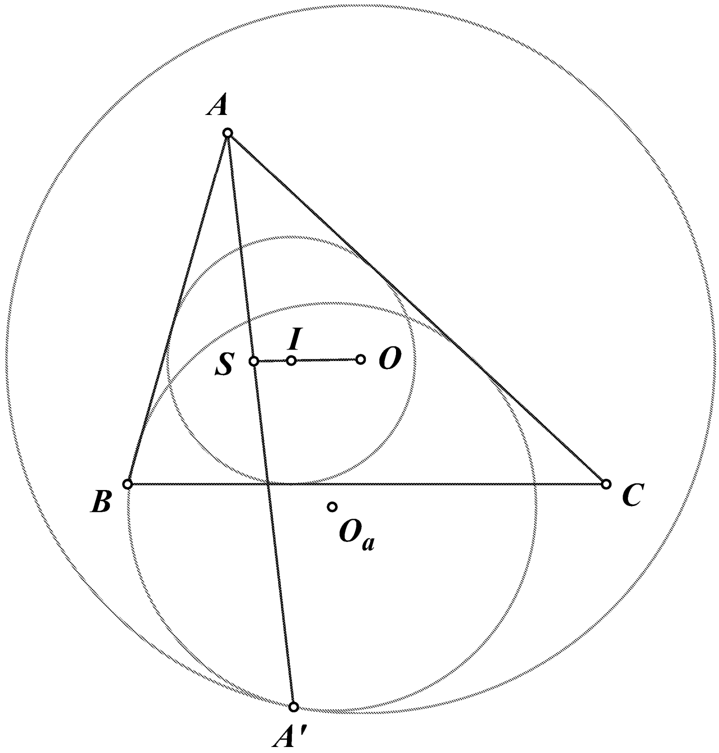
1. Nhận thấy rằng AB, KL, I_AI_B đồng quy. Do đó, áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác AI_AK, BI_BL, ta được $J = AI_A \cap BI_B, I = I_AK \cap I_BL, F = KA \cap LB$ thẳng hàng.

2. Cũng vậy, J_AJ_B, AB, CD đồng quy. Do đó, áp dụng định lý Desargues cho các tam giác J_AAC, J_BBD cũng được $I = J_AC \cap J_BD, J = AJ_A \cap BJ_B, E = AC \cap BD$ thẳng hàng

Ví dụ 22. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một đường tròn (C).Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ là đường tròn tiếp xúc trong với (C) tại A', B', C' và theo thứ tự tiếp xúc với các cặp tia AB và AC,BC và BA,CA và CB. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải.

Gọi O_a là tâm đường tròn ω_a và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Khi đó
$$(O) \xrightarrow{V\left(A';\frac{R_a}{R}\right)} (O_a) \xrightarrow{V\left(A;\frac{r}{R_a}\right)} (I)$$
Suy ra $V(S;\frac{r}{R}) = V(A;\frac{r}{R_a}) \circ V(A';\frac{R_a}{R}) : (O) \mapsto (I)$.
Do đó, đường thẳng AA' đi qua S là tâm vị tự ngoài của (O) và (I). Hoàn toàn tương tự, cũng được BB', CC' cũng đi qua S. Vậy, AA', BB' và CC' đồng quy tại S là tâm vị tự ngoài của (O) và (I).



Hình 19

Nhận xét. Nếu $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ tiếp xúc ngoài với (O) thì điểm đồng quy là tâm vị tự trong của $(O), (I)$.

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F theo thứ tự đó. Gọi O, O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE và H, H_a, H_b, H_c là trực tâm các tam giác này theo thứ tự đó. Chứng minh rằng

1. $\triangle O_aO_bO_c \backsim \triangle ABC$
2. Trung trực các đoạn thẳng $OH, O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c$ đồng quy.

Lời giải.

1. Theo bổ đề Mi-ken, các đường tròn $(O_a), (O_b), (O_c), (O)$ đồng quy tại một điểm M. Ta có

$$\begin{aligned}(O_aO_b; O_aO_c) &\equiv (O_aO_b; MF) + (MF; ME) + (ME; O_aO_c) \pmod{\pi}\\ &\equiv \frac{\pi}{2} + (AF; AE) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\\ &\equiv (AB; AC) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Tương tự $(O_bO_c; O_bO_a) \equiv (BC; BA) \pmod{\pi}$

Vậy $\triangle O_aO_bO_c \backsim \triangle ABC$

C2. Dễ thấy các tam giác MAO_a, MBO_b, MCO_c đồng dạng (cùng hướng). Do đó có phép đồng dạng $Z(M; \frac{MO_b}{MB}; (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MO_b}))$ mà qua đó $O_a \mapsto A, O_b \mapsto B, O_c \mapsto C$.

2. Gọi O', H' ttheo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác $O_aO_bO_c$. Ta có

$$\frac{O'H'}{OH} = \frac{MO_b}{MB} \text{ và } (\overrightarrow{O'H'}; \overrightarrow{OH}) \equiv (\overrightarrow{MO_b}; \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$$

Lấy $K : \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{O'H'}$. Khi đó

$$\frac{OK}{OH} = \frac{O'H'}{OH} = \frac{MO_b}{MB} \text{ và } (\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{OH}) \equiv (\overrightarrow{O'H'}; \overrightarrow{OH}) \equiv (\overrightarrow{MO_b}; \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$$

Suy ra $\triangle KOH \backsim \triangle O_bMB$ mà tam giác O_bMB cân (tại O_b) nên $KO = KH$ hay $K \in t[OH]$. Hoàn toàn tương tự $K \in t[O_aH_a], t[O_bH_b], t[O_cH_c]$

4 Bài tập tổng hợp

Ví dụ 24. Trong mặt phẳngg cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O)$ mà $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại I và tiếp xúc trong với (O) tại M_1, M_2. Tiếp tuyến chung trong của $(O_1), (O_2)$ cắt (O) tại A, A'.

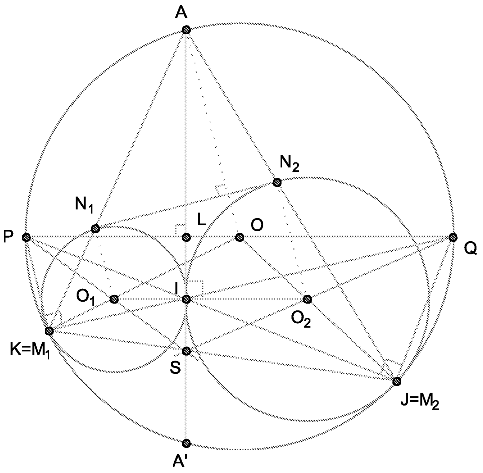
1. Đường thẳng AM_i cắt lại đường tròn (O_i) tại N_i. Chứng minh rằng $N_1N_2 \perp OA$
2. Dựng đường kính PQ của (O) vuông góc với IA. Chứng minh rằng PO_1, QO_2, IA đồng quy

Lời giải.

1. Từ giả thiết suy ra $V_{M_1}^{\frac{R}{R_1}} : (O_1) \longrightarrow (O)$ suy ra $O_1N_1 \parallel OA \Rightarrow \angle AOM_1 = \angle N_1O_1M_1$

Mặt khác, do $\overline{AN_1} \cdot \overline{AM_1} = \overline{AI}^2 = \overline{AN_2} \cdot \overline{AM_2}$ suy ra $M_1M_2N_2N_1$ nội tiếp. Từ đó

$$\angle AN_1N_2 = \angle AM_2M_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle AOM_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle N_1O_1M_1$$



Hình 20

Vậy $\angle AN_1N_2 + \angle M_1N_1O_1 = 90°$, suy ra $OA \perp N_1N_2$.

2. Giả sử PI, QI cắt lại (O) tại J, K. Khi đó $\angle PJO = \angle OPJ = \angle O_2IJ = \angle O_2JI = \angle O_2JP \Longrightarrow O, O_2, J$ thẳng hàng. Do đó $J \equiv N_2$. Tương tự, cũng được $K \equiv N_1$.

Trong tam giác PQI, có IL, PM_1, QM_2 là ba đường cao, nên chúng đồng quy. Theo định lý Seva

$$\frac{LP}{LQ} \cdot \frac{M_1Q}{M_1I} \cdot \frac{M_2I}{M_2P} = 1$$

Suy ra

$$\frac{LP}{LQ} = \frac{M_1I}{M_1Q} \cdot \frac{M_2P}{M_2I} = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{R}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} \Longrightarrow \frac{R_1}{LP} = \frac{R_2}{LQ} \quad (1)$$

Giả sử PO_1, QO_2 cắt IA tại S_1, S_2. Khi đó

$$\frac{S_1I}{S_1L} = \frac{IO_1}{LP} = \frac{R_1}{LP} \quad (2)$$

và

$$\frac{S_2I}{S_2L} = \frac{IO_2}{LQ} = \frac{R_2}{LQ} \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra $S_1 \equiv S_2 \equiv S$. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 25. Trong mặt phẳng cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O)$ mà $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại I và tiếp xúc trong với (O) (tại M_1, M_2). Tiếp tuyến chung trong của $(O_1), (O_2)$ cắt (O) tại A, A'. Đường thẳng AM_i cắt lại đường tròn (O_i) tại điểm N_i, đường thẳng M_1M_2 cắt lại đường tròn (O_i) tại P_i.

1. Các đường thẳng N_iP_i và AA' đồng quy

2. Đường thẳng N_1N_2 tiếp xúc với (O_i).

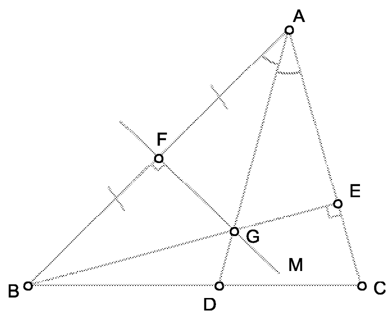
(Balkan 1997)

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng ℓ_a, h_b và trung trực AB đồng quy khi và chỉ khi $\angle BAC = 60°$

(JBMO)

Lời giải.

Gọi AD, BE là phân giác trong góc $\angle BAC$, đường cao kẻ từ B. Gọi F là trung điểm của AB (hình vẽ).
Điều kiện cần. Giả sử AD, BE, MF đồng quy tại G. Khi đó $GA = GB$. Hơn nữa



Hình 21

$$\angle GBA = \angle GAB = \angle GAC = \alpha$$

Suy ra $3\alpha = 90°$ điều này tương đương với $\alpha = 30°$ hay $\angle BAC = 60°$

Điều kiện đủ. Nếu $\angle BAC = 60°$ thì $\angle ABE = 90° - \angle BAC = 30°$. Gọi G là giao điểm của AD, BE, ta có $\angle GAB = 30° = \angle GBA$ suy ra $\triangle GAB$ cân, và do đó $GA = GB$. Vậy $G \in t[AB]$

Ví dụ 27. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Xét $P \in AB, Q \in AC$. Chứng minh rằng P, O, Q thẳng hàng iff

$$\sin 2A = \frac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \frac{QC}{QA} \cdot \sin 2C$$

Lời giải. Từ $PA \cdot \overrightarrow{PB} + PB \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{0}$ suy ra

$$\left(\frac{PB}{PA} + 1\right) \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{PB}{PA} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Tương tự

$$\left(\frac{QC}{QA} + 1\right) \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{QC}{QA} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

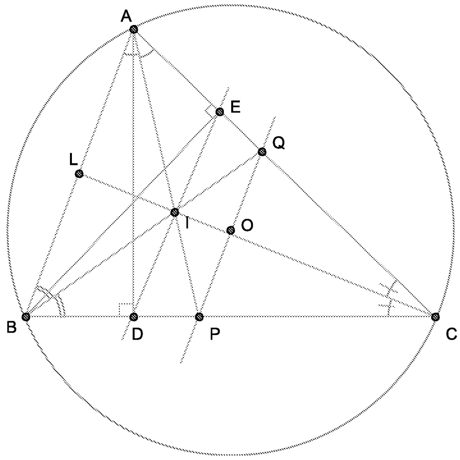
Vậy

$$\begin{aligned}
O, P, Q \text{ thẳng hàng } &\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ} = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{PB}{PA} \cdot \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} + \frac{QC}{QA} \cdot \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = 0\\
&\Leftrightarrow \sin 2A = \frac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \frac{QC}{QA} \cdot \sin 2C
\end{aligned}$$

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I) với các đường cao AD, BE, các đường phân giác trong AP, BQ $(D, P \in BC, E, Q \in CA)$. Chứng minh rằng D, I, E thẳng hàng iff P, Q, O thẳng hàng.

Lời giải. Theo kết quả bài toán trên, ta có

$$\begin{aligned}
P, O, Q \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \sin 2C &= \frac{PB}{PC} \cdot \sin 2B + \frac{QA}{QC} \cdot \sin 2A\\
\Leftrightarrow \sin 2C &= \frac{AB}{AC} \cdot \sin 2B + \frac{BA}{BC} \cdot \sin 2A\\
\Leftrightarrow \cos C &= \cos A + \cos B \qquad (1)
\end{aligned}$$



Hình 22

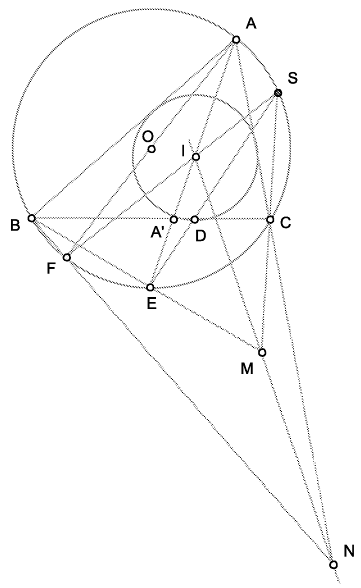
Mặt khác, $\triangle DEC \backsim \triangle ABC$, nên

$$\begin{aligned}
D, E, I \text{ thẳng hàng } &\Leftrightarrow \frac{CI}{CL} = \frac{CE}{CB} = \cos C\\
&\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \cos C\\
&\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} = \cos C\\
&\Leftrightarrow \cos A + \cos B = \cos C \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 29. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn nội tiếp tiếp xúc với cạnh BC tại D, các đường thẳng AI, AO cắt lại đường tròn (O) tại E, F. Gọi $S = FI \cap ED, M = SC \cap BE, N = AC \cap BF$.

1. Chứng minh rằng $S \in (O)$
2. Chứng minh rằng M, N, I thẳng hàng.



Hình 23

Lời giải. Gọi $A' = AE \cap BC$. Ta có

$$\text{sđ}\angle AA'D = \frac{1}{2}\left(\text{sđ }\overset{\frown}{AC} + \text{sđ }\overset{\frown}{EB}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ }\overset{\frown}{AC} + \text{sđ }\overset{\frown}{EC}\right) = \text{sđ}\angle AFE$$

Suy ra $\angle DIE = \angle EAF$

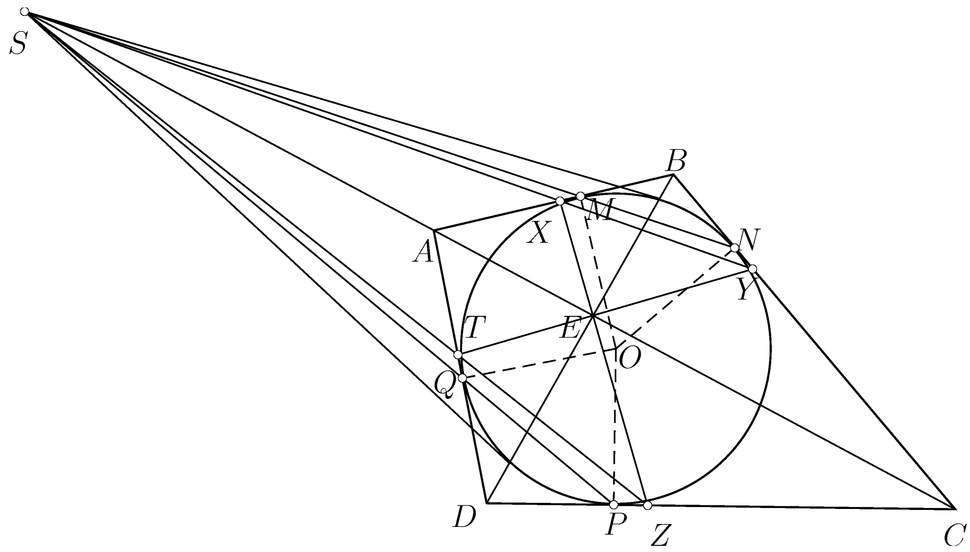
Mặt khác $IA \cdot IE = OI^2 - R^2 = 2Rr = AF \cdot ID \Longrightarrow \dfrac{IA}{AF} = \dfrac{ID}{IE}$

Suy ra $\triangle AIF \backsim \triangle IDE \Rightarrow \angle AFS = \angle AFI = \angle IED = \angle AES \Rightarrow S \in (O)$

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $ASCEFB$ nội tiếp, được M, N, I thẳng hàng.

Ví dụ 30. Cho tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh nào bằng nhau, ngoại tiếp đường tròn (O) có hai đường chéo cắt nhau tại E. Gọi M, N, P và Q theo thứ tự là tiếp điểm của AB, BC, CD và DA với (O), gọi X, Y, Z và T lần lượt là giao điểm của tia phân giác các góc $\angle AEB, \angle BEC, \angle CED$ và $\angle DEA$ với các cạnh AB, BC, CD và DA theo thứ tự đó. Chứng minh rằng các đường thẳng AC, MN, PQ, XY, ZT và tiếp tuyến của (O) tại các giao điểm của (O) với BD cùng đi qua một điểm.

Lời giải 1.



Hình 24

Gọi S, S' theo thứ tự là giao điểm của MN, PQ với AC. Áp dụng định lý Ménélaüs cho $\triangle ABC$ với cát tuyến MNS và tam giác ADC với cát tuyến PQS' ta có

$$\boxed{\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{S'A}}{\overline{S'C}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = 1} \tag{1}$$

và

$$\boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = 1} \tag{2}$$

Để ý rằng $BM = BN, DP = DQ$, từ đó và từ (1),(2) suy ra $\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{S'A}}{\overline{S'C}} = \frac{MA}{NC}$ vậy $S' \equiv S$ hay AC, MN, PQ đồng quy.

Giả sử XY, ZT cắt AC tại S'', S'''. Ta cần chứng minh $S'' \equiv S''' \equiv S$.

Áp dụng định lý Ménélaüs cho $\triangle ABC$ với cát tuyến XYS'' và tam giác ADC với cát tuyến ZTS''' ta có

$$\boxed{\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{S''A}}{\overline{S''C}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = 1} \tag{3}$$

và

$$\boxed{\frac{\overline{TD}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{S'''A}}{\overline{S'''C}} \cdot \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = 1} \qquad (4)$$

Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} = -\frac{EB}{EA}; \frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = -\frac{EC}{EB}; \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = -\frac{EC}{ED}; \frac{\overline{TD}}{\overline{TA}} = -\frac{ED}{EA}$

Từ đó và từ (3),(4) suy ra $\frac{\overline{S''A}}{\overline{S''C}} = \frac{\overline{S'''A}}{\overline{S'''C}} = \frac{EA}{EC}$ điều đó có nghĩa là $S'' \equiv S'''$

Ngoài ra, vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được, nên $EA : EC = MA : NC$. Từ đó suy ra $S'' \equiv S$, hay các đường thẳng AC, MN, PQ, XY, ZT đồng quy.

Ví dụ 31. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F, G theo thứ tự là giáo điểm của các cặp đường thẳng AB và CD, BC và DA, AC và BD. Các đường tròn $(DAE), (DCF)$ cắt nhau tại điểm thứ hai H. Phân giác của góc $\angle AHB$ cắt AB tại I, phân giác của góc $\angle DHC$ cắt CD tại J. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng.

Từ giả thiết suy ra $(HD; HE) = (AD; AE) = (AD; AB) = (CD; CB) = (CD; CF) = (HD; HF) \pmod \pi$ do đó H, D, F thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC, ta được các đường tròn $(BAF), (CFD)$ và (DEA) cùng đi qua một điểm (khác D). Do đó bốn đường tròn $(BAF), (CFD)$, $(DEA), (EAB)$ cùng đi qua H.

Vậy

$$(HA; HD) = (EA; ED) = (EB; EC) = (HB; HC) \pmod \pi$$

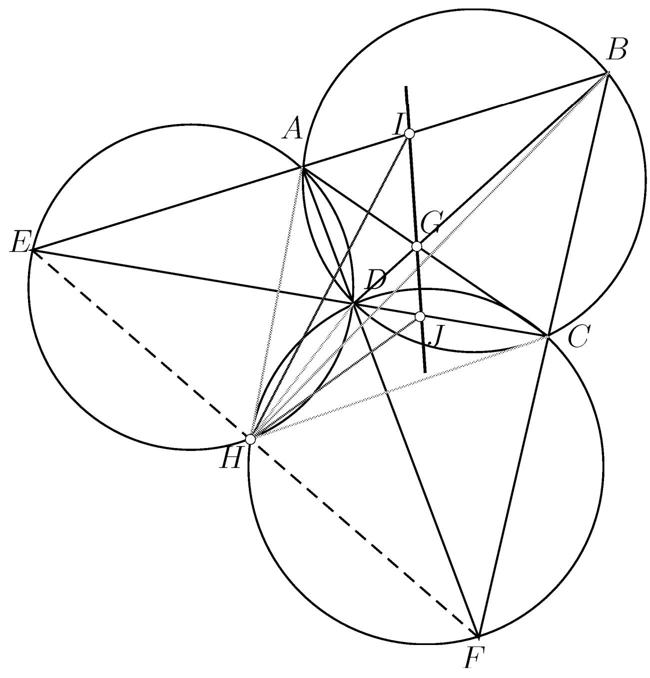
và

$$\begin{aligned}(CB; CH) &= (CB; CD) + (CD; CH) \pmod \pi \\ &= (AB; AD) + (FD; FH) \pmod \pi \\ &= (EA; EH) \pmod \pi = (DA; DH) \pmod \pi\end{aligned}$$

Suy ra $\triangle HCB \backsim \triangle HDA$. Vì vậy $\frac{HC}{HD} = \frac{HB}{HA} = \frac{BC}{DA}$

Ta có $\frac{IB}{IA} = \frac{JC}{JD} = \frac{HC}{HD} = \frac{BC}{DA} = \frac{GC}{GD} = \frac{GB}{GA} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{GC}{GD} \\ \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{GB}{GA} \end{cases}$

Suy ra GI, GJ là phân giác của góc $\angle AGB, \angle CGD$ theo thứ tự đó và vì vậy, I, G, J thẳng hàng.



Hình 25

Lời giải 2.

Từ giả thiết, suy ra $(HD;HE) \equiv (AD;AE) \equiv (AD;AB) \equiv (CD;CB) \equiv (CD;CF) \equiv (HD;HF) \pmod{\pi}$. Suy ra E, H, F thẳng hàng.

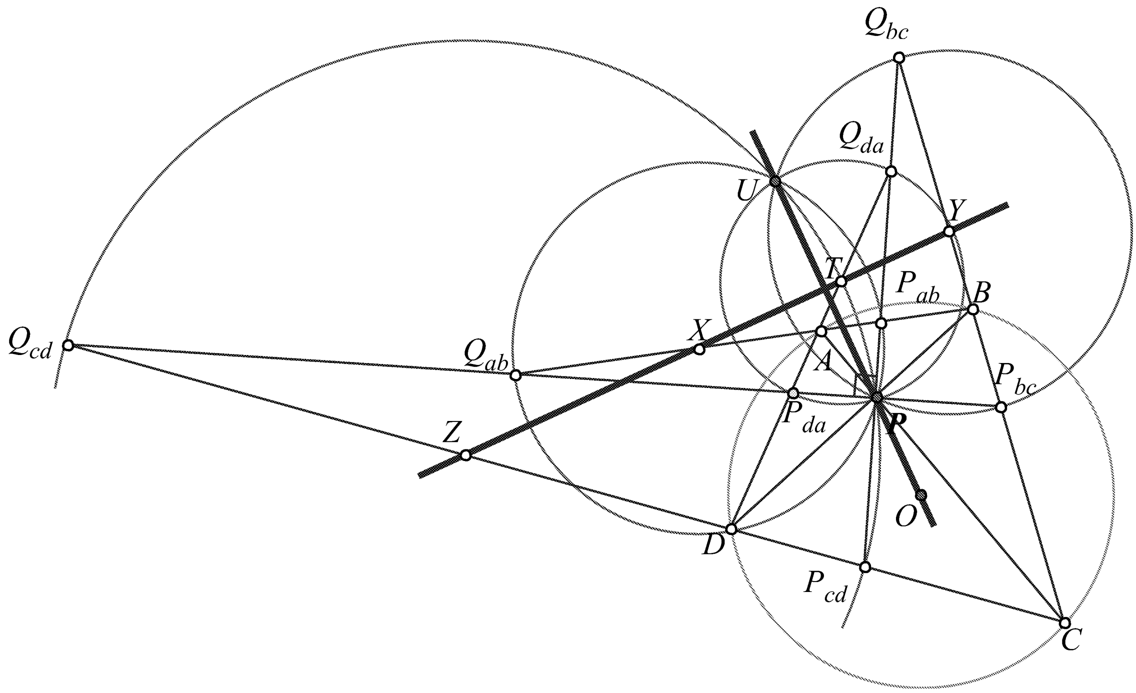
Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC ta được các đường tròn (BAF), (CFD) và (EDA) cùng đi qua một điểm (khác D) và do đó, bốn đường tròn (EDA), (FCD), (FAB), (EBC) cùng đi qua H.

Mặt khác

$$(D, C, E, J) = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} : \frac{\overline{JD}}{\overline{JC}} = \frac{HD \cdot \sin(HE;HD)}{HC\sin(HE;HC)} : \frac{HD\sin(HJ;HD)}{HE\sin(HJ;HE)}$$
$$= \frac{\sin(AD;AB)}{\sin(BC;BA)}$$

và tương tự $(B, A, E, I) = \frac{\sin(AD;AB)}{\sin(BC;BA)}$ Từ đó, và do phép chiếu xuyên tâm (tâm G) bảo toàn tỷ số kép, suy ra G, I, J thẳng hàng.

Ví dụ 32. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn, có hai đường chéo cắt nhau tại P. Giả sử rằng phân giác của các góc tạo bởi hai đường chéo cắt các cạnh AB, BC, CD, DA tương ứng tại các cặp điểm $P_{ab}, Q_{ab}; P_{bc}, Q_{bc}; P_{cd}, Q_{cd}, P_{da}, Q_{da}$. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng $P_{ab}Q_{ab}, P_{bc}Q_{bc}, P_{cd}Q_{cd}, P_{da}Q_{da}$ thẳng hàng.



Hình 26

Dễ dàng nhận thấy phân giác của các góc tạo bởi hai đường chéo của tứ giác là hai đường thẳng vuông góc. Gọi $\omega_{ab}, \omega_{bc}, \omega_{cd}, \omega_{da}$ là đường tròn đường kính $P_{ab}Q_{ab}, P_{bc}Q_{bc}, P_{cd}Q_{cd}, P_{da}Q_{da}$ theo thứ tự đó. Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm của $P_{ab}Q_{ab}, P_{bc}Q_{bc}, P_{cd}Q_{cd}, P_{da}Q_{da}$. Khi đó, cần chứng minh X, Y, Z, T hay $\omega_{ab}, \omega_{bc}, \omega_{cd}, \omega_{da}$ cắt nhau tại một điểm $U \neq P$.

Do PP_{ab}, PQ_{ab} là phân giác trong và ngoài của tam giác PAB nên $(ABP_{ab}Q_{ab}) = -1$. Do đó, theo hệ thức Newton, ta có $\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XP_{ab}}^2 = \overline{XQ_{ab}}^2$ (1)

Xét phương tích của X đối với đường tròn (O), ta thấy $P_{X/(O)} = XO^2 - R^2 = \overline{XA} \cdot \overline{XB} = XP_{ab}^2$ (do (1)). Từ đó $\omega_{ab} \perp (O)$, vậy $P_{O/\omega_{ab}} = R^2$ (2)

Tương tự, cũng có $P_{O/\omega_{bc}} = P_{O/\omega_{cd}} = P_{O/\omega_{da}} = R^2$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra O nằm trên trục đẳng phương của $\omega_{ab}, \omega_{bc}, \omega_{cd}, \omega_{da}$. Vậy các đường tròn $\omega_{ab}, \omega_{bc}, \omega_{cd}, \omega_{da}$ cắt nhau tại điểm thú hai hai U (hơn nữa U, P, O thẳng hàng). ĐPCM

Nhận xét. Nếu gọi $E = (AB) \cap (CD), F = (AD) \cap (BC)$ thì cũng có E, U, F thẳng hàng và $EF \parallel XZ$.

Ví dụ 33. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc với nhau tại H và Δ_1 cắt các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1,

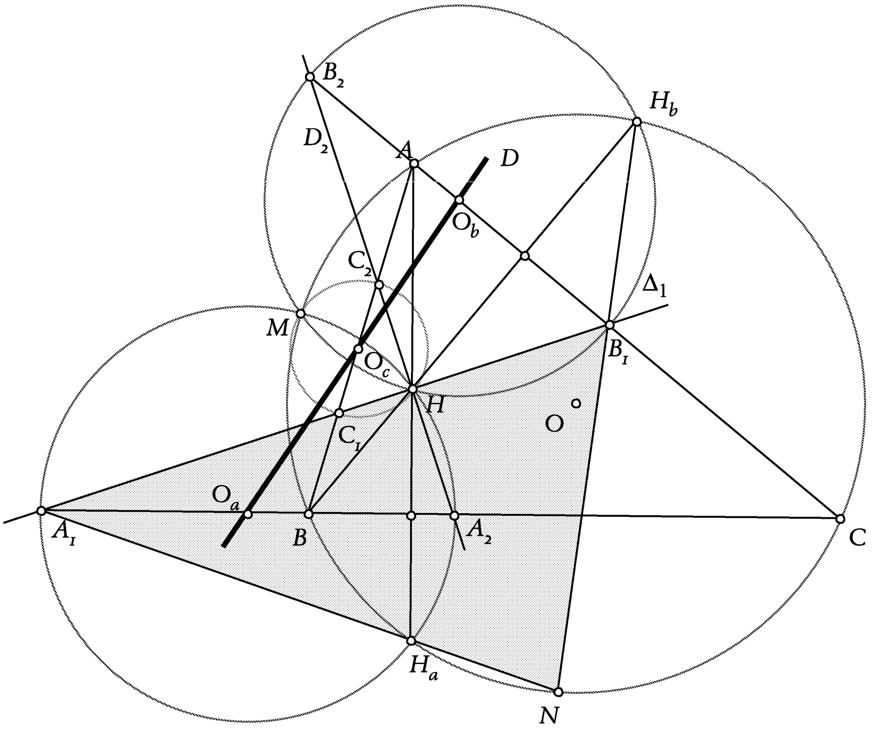
δ_2 cắt BC, CA, AB tại A_2, B_2, C_2 theo thứ tự đó.

1. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng $A_1A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường thẳng Δ và điểm đối xứng với H qua Δ nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC

(Định lý Droz-Farny)

2. Chứng minh rằng $\dfrac{HB_1}{HC_1} = \dfrac{A_2C}{A_2B}$

Lời giải.



Hình 27

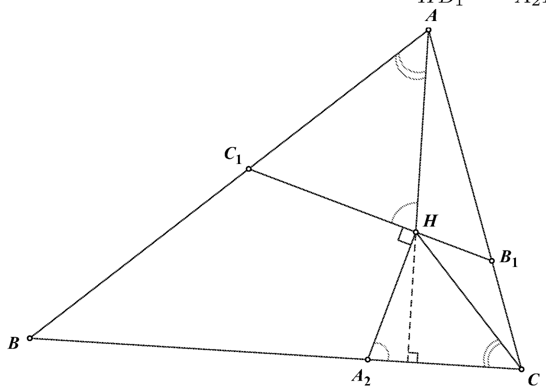
1. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và O_a, O_b, O_c theo thứ tự là trung điểm A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Gọi H_a, H_b, H_c là các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó $H_a, H_b, H_c \in (O)$ và các đường thẳng A_1H_a, B_1H_b, C_1H_c đồng quy tại $N \in (O)$ (hình vẽ).

Áp dụng bổ đề Miquel cho tam giác NA_1B_1 với $H_a \in NA_1, H \in A_1B_1, H_b \in B_1N$ ta được các đường tròn $(O_a), (O), (O_b)$ đồng quy tại M (khác H_a, H_b). Hoàn toàn tương tự, cũng được $(O_a), (O), (O_c)$ đồng quy tại M' (khác H_a, H_c). Từ đó, do hai đường tròn phân biệt cắt nhau tại nhiều nhất hai điểm, nên $M' \equiv M$ hay $(O_a), (O_b), (O_c), (O)$ đồng quy tại M. Điều này có nghĩa là O_a, O_b, O_c cùng nằm trên trung trực của HM (ĐPCM)

2. Do H là trực tâm của tam giác ABC và $B_1C_1 \perp HA_2$nên

$$(AH; AB_1) \equiv (BA_2; BH) \pmod{\pi}, \ (HB_1; HA) \equiv (A_2H; A_2B) \pmod{\pi}.$$

Suy ra các tam giác B_1HA, HA_2B đồng dạng. Vậy $\frac{HA}{HB_1} = \frac{A_2B}{A_2H}$ (1)



Hình 28

Tương tự, cũng được các tam giác C_1HA, HA_2C đồng dạng. Vậy $\frac{HC_1}{HA} = \frac{A_2H}{A_2C}$ (2)

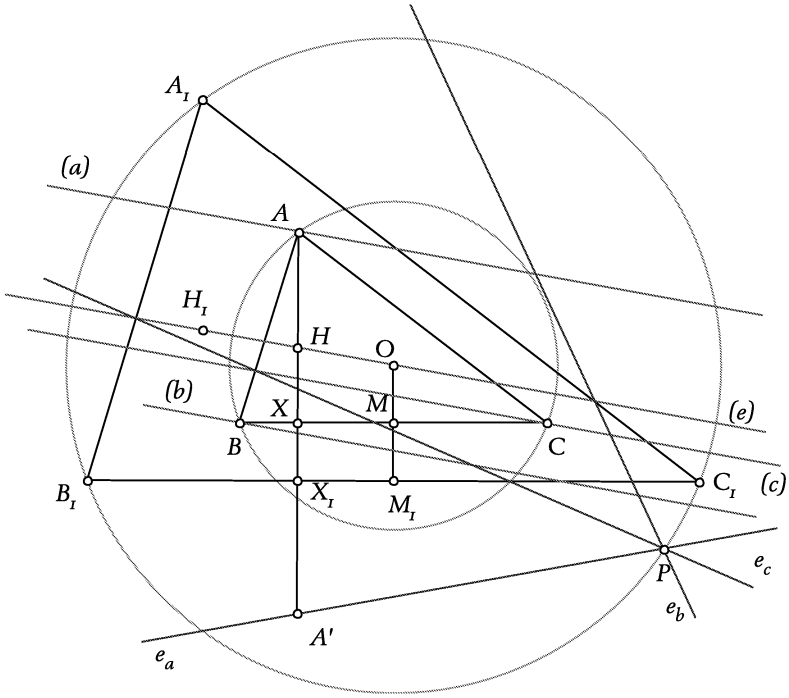
Nhân (1) và (2), vế đối vế, ta được $\frac{HC_1}{HB_1} = \frac{A_2B}{A_2C}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 34. Gọi a, b, c là các đường thẳng song song theo thứ tự đi qua các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Gọi $a' = Đ_{BC}(a), b' = Đ_{CA}(b), c' = Đ_{AB}(c)$. Chứng minh rằng các đường thẳng a', b', c' đồng quy khi và chỉ khi a, b, c song song với đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC. Khi chúng đồng quy, điểm đồng quy đối xứng với tâm O của đường tròn (ABC) qua E (E là điểm đồng quy của các đường thẳng đối xứng với đường thẳng Ơ-le qua các đường thẳng chứa cạnh của tam giác)

(Định lý Parry)

Lời giải.

Xét $V_O^2 : X \mapsto X_1 \quad \forall X$. Khi đó H_1 nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC. Gọi (e) là đường thẳng đi qua H và song song với a, b, c. $A' = Đ_{BC}(A)$.



Hình 29

Khi đó

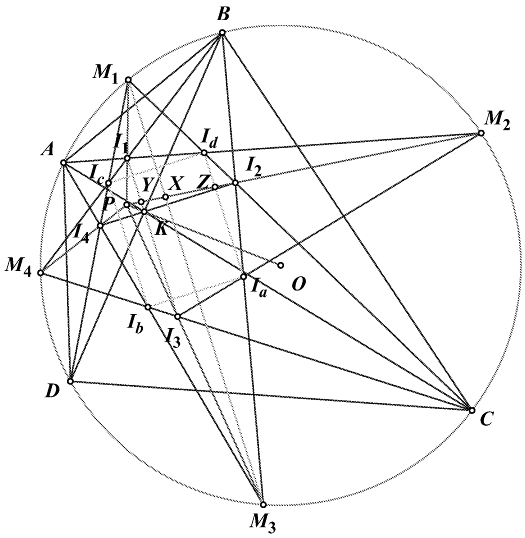
$$\begin{aligned} HA' &= AA' - AH = 2(AX - MO) \\ &= 2(AH + HX - OM) \\ &= 2(HX + OM) \\ &= 2(HX + XX_1) = 2HX_1 \end{aligned}$$

Do đó $A' = Đ_{B_1C_1}(H)$. Vậy $e_a \equiv a'$, tương tự $e_b \equiv b', e_c \equiv c'$.
Do đó, a', b', c' đồng qui tại P khi và chỉ khi e_a, e_b, e_c đồng qui tại P khi và chỉ khi e đi qua H_1 (tức e là đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC). ĐPCM

Ví dụ 35. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) có hai đường chéo cắt nhau tại K. Gọi M_1, M_1, M_3, M_4 lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}$ và $\overset{\frown}{DA}$. Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác KAB, KBC, KCD và KDA. Chứng minh rằng các đường thẳng $M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4$ đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OK.

(Kvant)

Lời giải.



Hình 30

Từ giả thiết suy ra $I_1I_3 \perp I_2I_4$.

Vì

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AM_1} + \text{Sđ } \overset{\frown}{CM_3} = \text{ Sđ } \overset{\frown}{BM_1} + \text{Sđ } \overset{\frown}{DM_3}$$

nên đường thẳng M_1M_3 tạo với các đường thẳng AC, BD các góc bằng nhau. Do đó $M_1M_3 \parallel I_1I_3$ hoặc $M_1M_3 \equiv I_1I_3$. Tương tự, cũng được $M_2M_4 \parallel I_2I_4$ hoặc $M_2M_4 \equiv I_2I_4$. Từ đó suy ra $M_1M_3 \perp M_2M_4$.

Gọi I_a, I_b, I_c và I_d lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC theo thứ tự đó. Khi đó $I_aI_bI_cI_d$ là hình chữ nhật (chứng minh) và I_aI_d, I_bI_c, M_1M_3 đôi một song song; cũng vậy I_aI_b, I_cI_d, M_2M_4 đôi một song song.

Nếu $I_1I_3 \equiv M_1M_3$ thì $AB \parallel CD$, tứ giác $ABCD$ là hình thang cân; O, K, I_1, I_3, M_1, M_3 cùng nằm trên trung trực chung của AB, CD đồng thời là trục đối xứng của hình. Khi đó, do M_2I_2 đối xứng với M_4I_4 qua trục đối xứng này, nên M_kI_k, OK đồng quy. Tương tự với trường hợp $M_2M_4 \equiv I_2I_4$

Xét trường hợp $M_1M_3 \parallel I_1I_3, M_2M_4 \parallel I_2I_4$. Do cách dựng, ta có M_2, I_d, I_1 thẳng hàng; M_2, I_a, I_3 thẳng hàng; I_2, I_d, M_1 thẳng hàng; I_2, I_a, M_3 thẳng hàng. Gọi P là giao điểm của M_1I_1, M_3I_3, đặt $k = \frac{M_1M_3}{I_1I_3}, \ell = \frac{I_dI_a}{M_1M_3}$. Ta có

$$I_1I_3 \xrightarrow{V(P;k)} M_1M_3 \xrightarrow{V(I_2;\ell)} I_dI_a$$

Suy ra

$$V(I_2;\ell) \circ V(P;k) : I_1I_3 \to I_dI_a$$

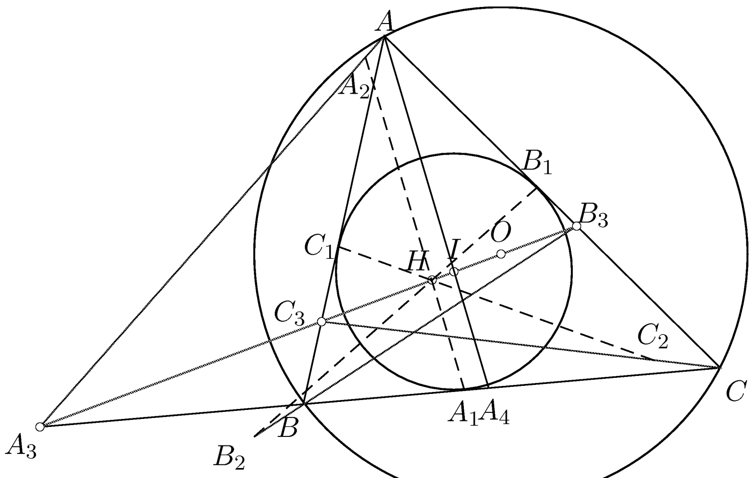
Từ đó; do M_2, I_d, I_1 thẳng hàng, M_2, I_a, I_3 thẳng hàng; nên M_2 là tâm của phép vị tự tích này. Suy ra $P \in M_2I_2$. Tương tự, cũng được $P \in M_4I_4$.

Ví dụ 36. Gọi I_a, I_b, I_c tương ứng là tâm đường tròn bàng tiếp trong các góc $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$ của tam giác ABC. Gọi A_1, A_2 tương ứng là các điểm đối xứng với A qua I_aI_b, I_aI_c; B_2, B_3 là các điểm đối xứng với B qua các đường thẳng I_bI_c, I_bI_a và C_3, C_1 là các điểm đối xứng với C qua các đường thẳng I_cI_a, I_cI_b. Chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua I_a, I_b, I_c theo thứ tự vuông góc với B_3C_3, C_1A_1, A_2B_2 đồng quy.

Hint. Dự đoán: Điểm đồng quy la tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Sử dụng tiêu chuẩn Carnot.

Ví dụ 37. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác không cân ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB tại A_1, B_1 và C_1. Gọi A_2 là điểm đối xứng với A_1 qua B_1C_1 và A_3 là giao điểm của các đường thẳng AA_2, BC. Các điểm B_2, B_3, C_2, C_3 được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

Lời giải. Chúng ta cần chứng minh $A_3, B_3, C_3 \in (OI)$. Gọi H là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$, $AI \cap BC = A_4$.



Hình 31

Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{IA}{IA_4} = \frac{BA}{BA_4} = \frac{AB+AC}{BC} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$ (1)

Mặt khác, dễ thấy A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại H. Ngoài ra

$$\angle C_1A_1B_1 = \frac{B+C}{2}, \angle A_1B_1C_1 = \frac{C+A}{2}, \angle B_1C_1A_1 = \frac{A+B}{2}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{HA_2}{HA_1} &= \frac{A_1A_2 - A_1H}{A_1H} = \frac{A_1A_2 \cdot B_1C_1}{HA_1 \cdot B_1C_1} - 1 \\
&= \frac{2S_{\triangle A_1B_1C_1}}{HA_1 \cdot B_1C_1} - 1 = \frac{4r^2 \sin\frac{B+C}{2} \sin\frac{C+A}{2} \sin\frac{A+B}{2}}{HA_1 \cdot B_1C_1} - 1 \\
&= \frac{r^2(\sin A + \sin B + \sin C)}{r^2 \cdot \sin A} - 1 = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \qquad (2)
\end{aligned}$$

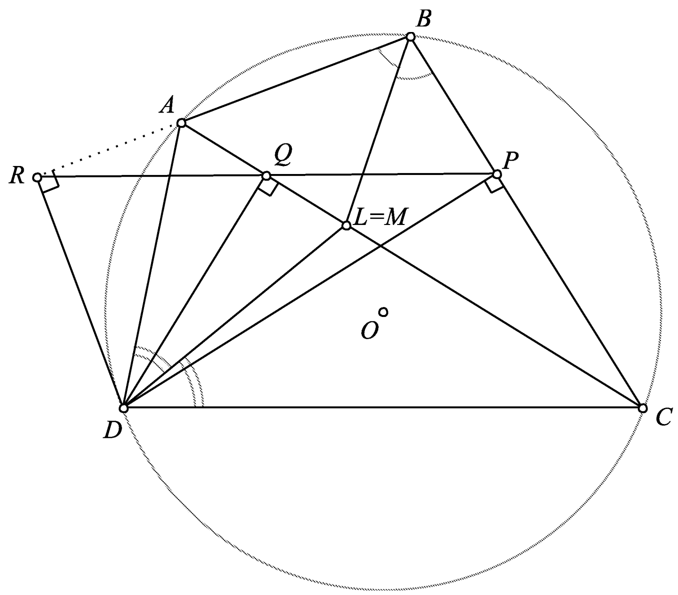
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HA_2}{HA_1} = \frac{IA}{IA_4} \Longrightarrow A_3 \in (IH)$

Tương tự, cũng có $B_3, C_3 \in (IH)$ (ĐPCM)

Ví dụ 38. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi P, Q, R theo thứ tự là hình chiếu của D trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $QP = QR$ khi và chỉ khi phân giác của các góc $\angle ABC, \angle ADC$ cắt nhau tại một điểm nằm trên AC

(Shortlisted 2003 - G1)

Lời giải 1.



Hình 32

Theo định lý về đường thẳng Simson, P, Q, R thẳng hàng.
Ngoài ra, do các bộ bốn điểm $(P, Q, D, C), (D, Q, R, A)$ đồng viên, nên

$$(CD; CA) \equiv (CD; CQ) \equiv (PD; PQ) \equiv (PD; PR) \pmod{\pi}$$

và

$$(AD; AC) \equiv (AD; AQ) \equiv (RD; RQ) \equiv (RD; RP) \pmod{\pi}$$

Suy ra $\triangle DCA \backsim \triangle DPR$ (g.g)
Một cách tương tự, cũng có $\triangle DAB \backsim \triangle DQP, \triangle DBC \backsim \triangle DRQ$
Vậy

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}$$

Do đó $QP = QR \Longleftrightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} \Longleftrightarrow$ phân giác của $\angle ABC$ và $\angle ADC$ cắt nhau tại $M \in AC$. Điều phải chứng minh.

Lời giải 2. Giả sử phân giác của các góc $\angle ABC, \angle ADC$ cắt AC tại L, M theo thứ tự đó. Khi đó $\dfrac{LA}{LC} = \dfrac{BA}{BC}$ và $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{DA}{DC}$
Do đó các đường phân giác này cắt nhau tại một điểm trên AC khi và chỉ khi $L \equiv M$, điều này tương đương với $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC}$ hay $DA \cdot BC = AB \cdot CD$. Vậy cần chứng minh $AB \cdot CD = DA \cdot BC \Longleftrightarrow QP = QR$

Từ giả thiết $(DP; DQ) \equiv (CB; CA) \equiv \gamma \pmod \pi$ và $(DQ; DR) \equiv (AC; AB) \equiv \alpha \pmod \pi$
Do đó, theo định lý sin, ta có $PQ = CD \cdot \sin\gamma$ và $QR = AD \sin\alpha$. Vậy $QP = QR \Longleftrightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{BC}{BA} \Longleftrightarrow AB \cdot CD = DA \cdot BC$ (ĐPCM)

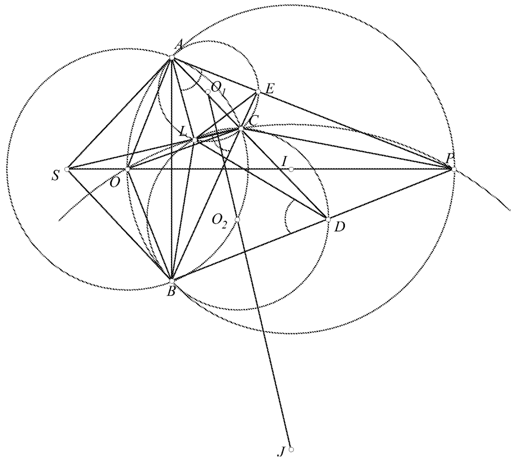
Nhận xét.

1. Lời giải 2 không sử dụng đến định lý Simson.
2. Từ lời giải 2, ta thấy, $QP = QR$ khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ điều hòa khi và chỉ khi AC là phân giác của góc $\angle BMD$ (trong đó M là trung điểm AC) khi và chỉ khi BD là phân giác góc $\angle ANC$ (trong đó N là trung điểm BD) khi và chỉ khi $(AA) \cap (CC) \in (BD)$ khi và chỉ khi $(BB) \cap (DD) \in (AC)$

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC có $\angle BCA > \frac{\pi}{2}$ và $CA \neq CB$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O) cắt nhau tại P. Các đường thẳng AC, PB cắt nhau tại D, các đường thẳng BC, AP cắt nhau tại E. Chứng minh rằng tâm của các đường tròn $(ACE), (BCD), (PCO)$ cùng nằm trên một đường thẳng.

(Russia 2010 - Grade 9)

Lời giải 1. Gọi O_1, O_2, I, J theo thứ tự là tâm của các đường tròn $(ACE), (BCD)$, $(PAOB), (PCO)$.



Hình 33

Do tam giác PAO vuông tại O và I là trung điểm PO nên tam giác PIA cân hay $\angle PAI = \angle APO$
Mặt khác

$$\begin{aligned}\angle PAO_1 = \angle EAO_1 &= \frac{\pi}{2} - \angle ACE \\ &= \angle ACB - \frac{\pi}{2} = \pi - \angle AOP - \frac{\pi}{2} \\ &= \angle APO = \angle PAI\end{aligned}$$

Từ đó, do O_1, I nằm về cùng một phía của PA nên A, I, O_1 thẳng hàng. Suy ra (O_1) và (I) tiếp xúc với nhau. Tương tự, cũng có (O_2) và (I) tiếp xúc với nhau.
Suy ra tiếp tuyến chung của $(O_1), (I)$ và tiếp tuyến chung của $(O_2), (I)$ cắt nhau tại điểm S nằm trên PO. Do tính đối xứng, nên $SA = SB$. Xét phương tích của S đối với các đường tròn trên ta có

$$\begin{aligned}P_{S/(O_1)} &= SA^2 = SB^2 = P_{S/(O_2)} \\ P_{S/(O_1)} &= SA^2 = P_{S/(I)} = \overline{SO} \cdot \overline{SP} = P_{S/(J)}\end{aligned}$$

Suy ra SC là trục đẳng phương chung của $(O_1), (O_2), (J)$ suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2. Gọi O_1, O_2, I, J theo thứ tự là tâm của các đường tròn $(ACE), (BCD)$, $(PAOB), (PCO)$. Gọi L là giao điểm thứ hai của $(O_1), (O_2)$, ta cần chứng minh tứ giác $PCLO$ nội tiếp.

Ta có $\angle LAE = \angle LCB = \angle LDB$. Suy ra tứ giác $ALDP$ nội tiếp. Tương tự, cũng có tứ giác $BLEP$ nội tiếp.

Ta có

$$(PL; PO) = (PL; PB) + (PB; PO) = (EL; EB) + (PB; PO) \pmod{\pi}$$
$$(CL; CO) = (CL; CB) + (CB; CO) = (AL; AE) + (BO; BC) \pmod{\pi}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$(EL; EB) + (BC; BO) = (AL; AE) + (PO; PB) \pmod{\pi}$$

Thật vậy,

$$VT = (AL; AC) + \frac{\pi}{2} + (AC; AB) \pmod{\pi} = \frac{\pi}{2} + (AL; AB) \pmod{\pi}$$
$$\begin{aligned} VP &= (DL; DP) + (PO; PB) \pmod{\pi} \\ &= (AL; AP) + (OP; OB) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &= (AL; AO) + (OA; OP) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &= (AL; AP) + (AP; AB) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &= (AL; AB) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 40. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O và điểm $A \notin d_1, d_2$. Một đường tròn ω đi qua A, O, cắt lại d_1, d_2 tại M_1, M_2 theo thứ tự đó. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2 luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi ω thay đổi nhưng luôn đi qua A và O.

Lời giải.

Gọi (K) là đường tròn đi qua A, tiếp xúc với d_1 tại O và (J) là đường tròn đi qua A, tiếp xúc với d_2 tại O. Đường tròn (K) cắt lại d_2 tại B, đường tròn (J) cắt lại d_1 tại C, suy ra B, C cố định. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của OC, OB. Do B, C, O cố định, nên D, E cố định. Ta sẽ chứng minh đường thẳng DE đi qua trung điểm đoạn thẳng M_1M_2 (Hình vẽ).

Ký hiệu $(x; y)$ để chỉ góc định hướng tạo bởi đường thẳng x với đường thẳng y. Do OM_1 tiếp xúc với (K) nên

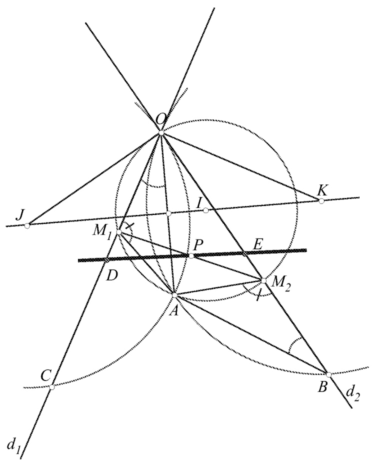
$$(OA; OM_1) \equiv (BO; BA) \equiv (BM_2; BA) \pmod{\pi} \qquad (1)$$

Do bốn điểm M_1, M_2, O, A cùng nằm trên đường tròn ω nên

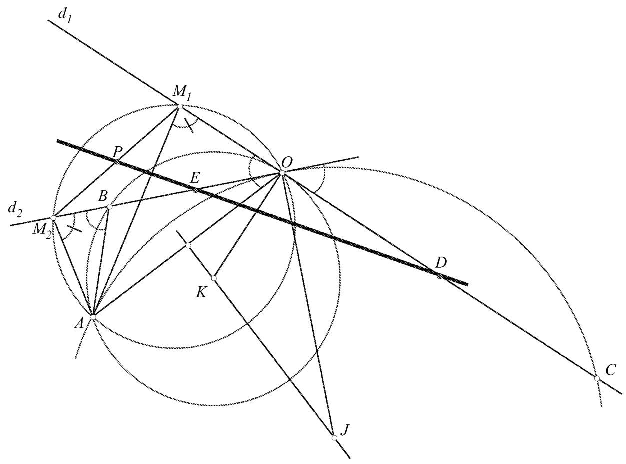
$$(M_1A; M_1O) \equiv (M_2A; M_2O) \equiv (M_2A; M_2B) \pmod{\pi} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle OM_1A \backsim \triangle BM_2A$. Do đó $\dfrac{OM_1}{BM_2} = \dfrac{M_1A}{M_2A}$ (3)

Tương tự, cũng có $\triangle OM_2A \backsim \triangle CM_1A$. Do đó $\dfrac{M_1A}{M_2A} = \dfrac{CM_1}{OM_2}$ (4)



Hình 34



Hình 35

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{CM_1}{OM_2} = \dfrac{OM_1}{BM_2} \Longrightarrow \dfrac{CM_1}{OM_1} = \dfrac{OM_2}{BM_2}$

Từ đó, theo tính chất của tỷ lệ thức, thu được

$$\frac{CM_1}{CO} = \frac{OM_2}{BO} \Longrightarrow \frac{CD}{CM_1} = \frac{OE}{OM_2} \Longrightarrow \frac{DO}{DM_1} = \frac{EO}{EM_2}$$

Giả sử đường thẳng DE cắt đường thẳng M_1M_2 tại P. Khi đó, áp dụng định lý Menelaos cho tam giác OM_1M_2 với cát tuyến PDE, ta được

$$\frac{DO}{DM_1} \cdot \frac{PM_1}{PM_2} \cdot \frac{EM_2}{EO} = 1 \Longrightarrow \frac{PM_1}{PM_2} = 1$$

suy ra P là trung điểm M_1M_2.

Chú ý. Việc sử dụng góc định hướng trong lời giải trên là cần thiết. Điều đó làm cho lời giải gọn hơn, không bị phụ thuộc vào hình vẽ. Nếu không sử dụng công cụ góc định hướng, cần phải xét hai vị trí của điểm A như trong hình 34 và hình 35.

5 Bài tập tự luyện

Bài tập 41. Hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc nhau tại A. Tiếp tuyến tại M tùy ý của (O_2) cắt (O_1) tại B, C. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua điểm chính giữa cung BC.

Bài tập 42. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB. Lấy B_2 là điểm chính giữa đoạn gấp khúc ABC, các điểm C_2, A_2 được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng $A_1A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ đồng quy.

(Hungarian 2000)

Bài tập 43. Tam giác $A_1A_2A_3$ không cân, không vuông nội tiếp trong (O). Gọi B_i là trung điểm cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$ (phép cộng lấy theo modul 3). Trên tia $[OB_i)$ lấy điểm C_i sao cho $\triangle OA_iB_i \backsim \triangle OC_iA_i$. Chứng minh rằng các đường thẳng A_iC_i đồng quy quy.

Bài tập 44. Trong mặt phẳng, cho trước ba tam giác $A_iB_iC_i, i = 1, 2, 3$. Gọi O_i, G_iH_i lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác $A_iB_iC_i$ theo thứ tự đó.

1. Chứng minh rằng trọng tâm các tam giác $H_1H_2H_3, G_1G_2G_3, O_1O_2O_3$ thẳng hàng.

2. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $H_1H_2H_3, G_1G_2G_3$ và $O_1O_2O_3$ thẳng hàng.

Bài tập 45. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M_i là trung điểm cạnh đối diện đỉnh A_i và gọi N_i, B_i lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp, bàng tiếp với cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$.

1. Chứng minh rằng $A_iB_i \parallel IM_i$

2. Chứng minh rằng các đường thẳng A_iN_i, M_iI, B_iG đồng quy (G là trọng tâm tam giác ABC).

Bài tập 46. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường thẳng AI, BI cắt lại (O) tại D, E theo thứ tự đó. Các dây cung DE theo thứ tự cắt AC và BC tại F và G. Đường thẳng qua F song song với AD cắt đường thẳng qua G song song với BE tại P. Giả sử rằng tiếp tuyến của (O) tạo A và B cắt nhau tại S. Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BD và SP đồng quy hoặc song song.

(Shortlisted 2011 - G5)

Bài tập 47. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm CA, AB. Gọi D là chân đường cao kẻ từ A và G là trọng tâm của tam giác. Đường tròn ω đi qua B_0, C_0 và tiếp xúc trong với (O) tại điểm $M \neq A$. Chứng minh rằng D, G, M thẳng hàng.

(Shortlisted 2011 - G4)

Bài tập 48. Cho tứ giác lồi $ABCD$, với $AD \not\parallel BC$. Giải sử rằng các đường tròn với đường kính AB và CD cắt nhau tại E và F nằm trong tứ giác. Gọi ω_e là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc kẻ từ E tới AB, BC và CD; ω_f là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc kẻ từ F tới CD, DA và AB. Gọi M, N là giao điểm của ω_e và ω_f, gọi P là trng điểm EF. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

(Shortlisted 2011 - G3)

Bài tập 49. Cho tam giác ABC nội nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn ω_a tiếp xúc với các tia AB, AC tại A_b, A_c và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A'. Các điểm $B_a, B_c, B', C_a, C_b, C'$ được xác định một cách tương tự.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b đồng quy tại $I-$ tâm tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Hơn nữa, I là trung điểm chung của các đoạn thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b

2. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại tâm vị tự ngoài của $(O), (I)$.

3. Gọi A_0, A_1 theo theo thứ tự là điểm chính giữa cung BC (không chứa A) của (O), tiếp điểm của (I) với BC, và gọi M_a là trung điểm IA_1. Chứng minh rằng đường thẳng A_0M_a là là trục đẳng phương của ω_b và ω_c.

(3′) Gọi A_0, A_1 theo theo thứ tự là điểm chính giữa cung BC (không chứa A) của (O), tiếp điểm của (I) với BC, và gọi M_a là trung điểm IA_1. Một cách tương tự, cũng có các điểm $B_0, B_1, C_0, C_1, M_b, M_c$. Chứng minh rằng các đường thẳng A_0M_a, B_0M_b, C_0M_c đồng quy. Hãy chỉ rõ vị trí hình học của điểm đồng quy.

4. Đường tròn (k) tiếp xúc trong với $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ theo thứ tự tại A'', B'', C''. Chứng minh rằng $A'A'', B'B'', C'C''$ đồng quy.

Bài tập 50. Xét điểm M trên đoạn AB, không trùng với A, B. Về cùng một phía của đường thẳng, dựng các hình vuông $AMCD, BMFE$. Đường tròn ngoại tiếp của hai hình vuông cắt nhau tại điểm thứ hai N.

1. Chứng minh rằng F, A, N thẳng hàng và B, C, N thẳng hàng.

2. Chứng minh rằng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

3. Tìm quỹ tích trung điểm PQ, trong đó P, Q theo thứ tự là tâm của hai hình vuông $AMCD, BMFE$

Bài tập 51. Cho đường tròn (O) và đường thẳng Δ không có điểm chung, và AB là đường kính của (O) vuông góc với Δ (B gần Δ hơn. C là điểm tùy ý trên đường tròn tròn khác A, B. Đường thẳng AC cắt Δ tại D, kẻ tiếp tuyến DE với (O) ($E \in (O)$ và cùng phía với B đối với AC). Đường thẳng BE cắt Δ tại F, đường thẳng AF cắt lại (O) tại $G \neq A$. Chứng minh rằng $\text{Đ}_{(AB)}(G) \in (CF)$

(Shortlisted 2004 - G2)

Bài tập 52. Cho tam giác nhọn ABC với đường phân giác BB_1. Đường thẳng qua B_1 vuông góc với BC cắt cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tại K. Đường thẳng qua B vuông góc với AK cắt đường thẳng AC tại L. Đường thẳng BB_1 cắt lại đường tròn (ABC) tại T. Chứng minh rằng K, L, T thẳng hàng.

(Russia 2007 - Grade 9)

Bài tập 53. Gọi F là điểm Toricelli-Fermat của tam giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le các tam giác FBC, FCA, FAB đồng quy.

HD. Bổ đề: Về phía ngoài của tam giác ABC lấy các điểm A', B', C' sao cho $\angle B'AC = \angle C'AB, \angle C'BA = \angle A'BC, \angle A'CB = \angle B'CA$. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy.

Bài tập 54. Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác IAB, IBC, ICA đồng quy tại điểm J nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài tập 55. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác HAB, HBC, HCA đồng quy tại một điểm nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài tập 56. Một đường thẳng d đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác AEF, BFD, CDE giới hạn nên một tam giác đều.

Bài tập 57. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Xét điểm D thay đổi trên(O), nhưng không trùng với các đỉnh của tam giác. Ký hiệu s_a, s_b, s_c, s_d theo thứ tự là đường thẳng Simson của A, B, C, D đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.

1. Chứng minh rằng s_a, s_b, s_c, s_d đồng quy tại một điểm P.

2. Tìm quỹ tích P khi D thay đổi.

Bài tập 58. Cho lục giác lồi $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Ký hiệu $s(X;YZT)$ là đường thẳng Simson của điểm X đối với tam giác YZT. Chứng minh rằng các đường thẳng $s(A;BDF), s(B;ACE), s(D;ABF), s(E;ABC)$ đồng quy khi và chỉ khi $CDEF$ là một hình chữ nhật.

Bài tập 59. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$ (trọng tâm của tứ giác) và H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH}$ (H được gọi là trực tâm của tứ giác nội tiếp).

1. Chứng minh rằng O, G, H cùng nằm trên một đường thẳng, và $\overrightarrow{OH} = 4\cdot\overrightarrow{OG}$ (đường thẳng Euler của tứ giác nội tiếp)

2. Gọi H_a, H_b, H_c, H_d theo thứ tự là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường tròn $(H_X;R)$, với $X = a, b, c, d$ đi qua H

3. Chứng minh rằng đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cùng đi qua một điểm, xác định vị trí hình học điểm đó. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của các tam giác này cùng nằm trên một đường tròn (đường tròn Euler của tứ giác nội tiếp).

4. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua trung điểm mỗi cạnh, vuông góc với cạnh đối diện, đồng quy. Chỉ rõ vị trí hình học điểm đồng quy. (Điểm đồng quy ở đây được gọi là điểm Monge)

5. Chứng minh rằng $S(A:BCD), S(B;CDA), S(C;DAB), S(D;ABC)$ đồng quy tại điểm Monge.

6. Xét P tùy ý trên đường tròn. Gọi s_a, s_b, s_c, s_d theo thứ tự là đường thẳng simpson của P đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng hình chiếu của P trên các đường thẳng này cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Simson của P đối với tứ giác (nội tiếp) $ABCD$)

Bài tập 60. Cho tam giác ABC không cân với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Đường thẳng B_1C_1 và đường thẳng BC cắt nhau tại A_2. Các điểm B_2, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng các điểm A_2, B_2, C_2 cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OH, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Bài tập 61. Gọi O, E theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn tròn Ơ-le của tam giác ABC. Lấy điểm E' sao cho $\angle E'BA = \angle EBC$ và $\angle E'AB = \angle EAC$. Trung trực của OA cắt BC tại A', các điểm B', C' được xác đinh tương tự. Chứng minh rằng các điểm A', B', C' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OE'.

Bài tập 62. Đường tròn tâm O tiếp xúc trong với hai đường tròn nằm trong nó tại S, T. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau tại $M, N \quad (N$ gần ST hơn$M)$. Chứng minh rằng $OM \perp MN \Leftrightarrow S, N, T$ thẳng hàng.

Bài tập 63. Cho tam giác ABC nhọn ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi (ω_a) là đường tròn có tâm nằm trên đường cao kẻ từ A, đi qua A và tiếp xúc trong với (I) taiju A_1. Các điểm B_1, C_1 được xác định một cách tương tự.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại mọt điểm P nào đó.

2. Gọi (J_a) là đường tròn đối xứng với đường tròn bàng tiếp (I_a) qua trung điểm cạnh BC, (J_b) là đường tròn đối xứng với đường tròn bàng tiếp (I_b) qua trung điểm cạnh CA và (J_c) là đường tròn đối xứng với đường tròn bàng tiếp (I_c) qua trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng P là tâm đẳng phương của $(J_a), (J_b)$ và (J_c).

(Vietnam TST 2007 - Prob. 2)

2' Gọi (J_b) là đường tròn đối xứng với đường tròn bàng tiếp (I_b) qua trung điểm cạnh CA và (J_c) là đường tròn đối xứng với đường tròn bàng tiếp (I_c) qua trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (J_b) và (J_c) chia đôi chu vi tam giác ABC.

Bài tập 64. Lấy các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC làm đáy, dựng ra phía ngoài các tam giác cân BCD, CAE, ABF. Chứng minh rằng các đường thẳng theo thứ tự đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với EF, FD, DE đồng quy.

Bài tập 65. Cho tứ giác lồi $ABCD$, không có hai cạnh nào song song, nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AB, CD và Q là giao điểm của hai đường thẳng AD, BC. Chứng minh rằng P, E, F thẳng hàng.

(Chinese 1997)