Bài 1. - Phép đếm. Các nguyên lý cơ bản của phép đếm

Định nghĩa:
i) Một tập hợp A được nói là *hữu hạn* và *có n phần tử* nếu tồn tại một song ánh giữa A và tập hợp con {1, 2, ..., n} của N. Ta viết $|A| = n$.
ii) Nếu A không hữu hạn, ta nói A *vô hạn*.

Bổ đề (Nguyên bù trừ): Giả sử B là một tập con của tập hợp hữu hạn A. Gọi $C_A(B)$ là phần bù của B trong A. Khi ấy ta có

$$|A| = |B| + |C(B)|.$$

Định lý: Giả sử A, B là các tập hợp hữu hạn. Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B và một đơn ánh từ B vào A thì A và B có cùng số phần tử.

Nguyên lý cộng: Nếu A, B là các tập hợp không giao nhau thì

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Nguyên lý cộng còn có thể phát biểu một cách khác như sau:
Nếu một công việc có thể thực hiện bằng một trong hai phương án loại trừ lẫn nhau: phương án thứ nhất có m cách thực hiện và phương án thứ hai có n cách thực hiện. Khi đó công việc đó có m+n cách thực hiện.

Nguyên lý cộng mở rộng: Nếu tập hợp hữu hạn C là hợp của n tập đôi một rời nhau C_1, C_2, ..., C_n thì:

$$|C| = |C_1| + ...| |C_n|$$

Định nghĩa: Tích Descartes của hai tập hợp A, B ký hiệu bởi AxB là tập hợp tất cả các cặp thứ tự (a, b) với $a \in A$, $b \in B$.

Nguyên lý nhân: Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì AxB cũng hữu hạn và ta có

$$|A \times B| = |A|.|B|$$

Định nghĩa về tích Descartes và nguyên lý nhân trên đây có thể mở rộng cho nhiều tập hợp. Nguyên lý nhân có thể phát biểu một cách khác như sau:
Nếu một quá trình có thể được thực hiện qua hai công đọan: công đọan I có n_1 cách thực hiện, công đọan II (sau khi thực hiện I) có n_2 cách thực hiện. Khi đó có $n_1.n_2$ cách thực hiện quá trình đó.

Nguyên lý thêm bớt: Với hai tập hữu hạn A, B bất kỳ ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Câu hỏi và bài tập:
1) Hãy tìm số tập con của một tập hợp có n phần tử.
2) Hãy cho một ví dụ về áp dụng của nguyên lý bù trừ.
3) Hãy cho một ví dụ về phép đếm phải áp dụng cả nguyên lý cộng và nguyên lý nhân.
4) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau?
5) Có bao nhiêu số có 3 chữ số và chia hết cho 3?

6) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3?
7) Trong trò chơi tiến lên, tính xác suất để một người nào đó có tứ quí.
8) Nguyên lý thêm bớt có thể mở rộng như thế nào?

Bài 2. - Các đối tượng tổ hợp và các số tổ hợp

1. Họ các tập con của một tập hợp E

$$P(E) = \{A |\ A \subseteq E\}$$

Mệnh đề: $|P(E)| = 2^{|E|}$

2. Chỉnh hợp của n phần tử chọn k (hay chỉnh hợp chập k của n phần tử)
Giả sử $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. *Chỉnh hợp của n phần tử chọn k* là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i1}, ..., a_{ik})$.
Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A^k_n. Ta có

$$A^k_n = n(n-1)..(n-k+1) = n!/(n-k)!$$

3. Tổ hợp của n phần tử chọn k (hay tổ hợp chập k của n phần tử)
Giả sử $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. *Tổ hợp của n phần tử chọn k* là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $\{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$. Nói cách khác, đó là một tập con gồm k phần tử.
Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C^k_n. Ta có

$$C^k_n = n(n-1)..(n-k+1)/k! = n!/k!(n-k)!$$

4. Hóan vị
Giả sử $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Một hóan vị của E là một cách xếp các phần tử của E theo một thứ tự nào đó. Nói cách khác, đó chỉnh là chỉnh hợp của n phần tử chọn n.
Số các hóan vị của n phần tử ký hiệu là P_n. Ta có $P_n = n!$.

5. Chỉnh hợp lặp
Giả sử $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. *Chỉnh hợp lặp của n phần tử chọn k* là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i1}, ..., a_{ik})$, trong đó cho phép lấy lặp lại.
Số các chỉnh hợp chập k của n, theo quy tắc nhân, bằng n^k.

6. Tổ hợp lặp
Giả sử $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. *Tổ hợp lặp của n phần tử chọn k* là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $\{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$, trong đó cho phép lấy lặp lại. Nói cách khác, đó là một đa tập hợp gồm k phần tử lấy từ E.
Số các tổ hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu là H^k_n. Ta có

$$H^k_n = C^k_{n+k-1}$$

7. Hóan vị lặp
Xét đa tập hợp $E(r_1, r_2, ..., r_s)$ có n phần tử, trong đó phần tử a_1 có r_1 phiên bản, phần tử a_2 có r_2 phiên bản, ..., phần tử a_s có r_s phiên bản. $r_1+r_2+...+r_s = n$. Một cách xếp các phần tử của E theo thứ tự nào đó được gọi là một hóan vị lặp của n phần tử của E.
Số hóan vị lặp của đa tập hợp $E(r_1, r_2, ..., r_s)$ bằng $n!/r_1!...r_s!$.
Bổ đề: (Tính chất hệ số nhị thức)

$$C^{k-1}_n+C^k_n = C^k_{n+1}$$

Định lý: (Nhị thức Newton)

$$(x+y)^n = C^0_n x^n + C^1_n x^{n-1} y + ... + C^n_n y^n$$

Câu hỏi và bài tập:

1) Nêu rõ sự khác biệt giữa chỉnh hợp và tổ hợp, hóan vị và hóan vị lặp.
2) Tìm hiểu ý nghĩa của các ký hiệp A, C, P, H.
3) Hãy chứng minh định lý nhị thức.
4) Nêu ví dụ áp dụng cho từng đối tượng tổ hợp trên đây.
5) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

6) Có 5 nam và 5 nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 người trong đó có ít nhất 1 nam và ít nhất 1 nữ.
7) Rút gọn tổng $A = \sum C^k_n(-2)^k$, $B = \sum C^k_n \cos(kx)$.
8) Chứng minh $\sum (C^k_n)^2 = C^n_{2n}$.

Bài 3. - Các phương pháp đếm nâng cao

Cơ sở của phép đếm là định nghĩa phép đếm, các nguyên lý đếm và các số tổ hợp (là các số thường nảy sinh một cách tự nhiên trong các bài tóan đếm). Tuy nhiên, với các công cụ cơ sở trên, chúng ta thường chỉ giải được những bài tóan ở dạng đơn giản nhất. Với các bài tóan có yêu cầu phức tạp hơn, cần đến các phương pháp đếm nâng cao.

Có nhiều phương pháp đếm nâng cao dựa trên các nền tảng lý thuyết khác nhau. Ví dụ phương pháp song ánh dựa vào lý thuyết tập hợp và ánh xạ, phương pháp thêm bớt cũng dựa vào lý thuyết tập hợp (cụ thể là tổng quát hóa của công thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$), phương pháp quỹ đạo dựa vào một định lý cơ bản về số đường đi ngắn nhất giữa hai điểm của lưới nguyên, phương pháp quan hệ đệ quy dựa vào ý tưởng quy nạp, phương pháp hàm sinh sử dụng các kiến thức tổng hợp của đại số và giải tích ...

Dưới đây, qua các ví dụ, chúng ta sẽ giới thiệu một số phương pháp đếm nâng cao.

1. Phương pháp song ánh.

Phương pháp song ánh dựa vào một ý tưởng rất đơn giản: Nếu tồn tại một song ánh từ A vào B thì $|A| = |B|$. Do đó, muốn chứng minh hai tập hợp có cùng số phần tử, chỉ cần xây dựng một song ánh giữa chúng. Hơn nữa, ta có thể đếm được số phần tử của một tập hợp A bằng cách xây dựng song ánh từ A vào một tập hợp B mà ta đã biết cách đếm.

<u>Ví dụ 1.</u> (Bài tóan chia kẹo của Euler)
Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \quad (*)$$

<u>Ví dụ 2.</u> (Định lý cơ bản của phương pháp quỹ đạo) Chứng minh rằng số đường đi ngắn nhất trên lưới nguyên từ điểm A(0, 0) đến B(m, n) bằng C^m_{m+n}.

<u>Ví dụ 3</u>. Xây dựng một song ánh từ N vào ZxZ.

<u>Ví dụ 4.</u> Chứng minh không tồn tại một song ánh từ tập hợp các số hữu tỷ thuộc đoạn [0, 1] vào tập hợp các số thực thuộc đoạn này.

(Xem thêm bài: Song ánh và các bài toán giải tích tổ hợp)

2. Phương pháp quan hệ đệ quy.

Phương pháp quan hệ đệ quy là phương pháp giải bài tóan với n đối tượng thông qua việc giải bài tóan tương tự với số đối tượng ít hơn bằng cách xây dựng các quan hệ nào đó, gọi là *quan hệ đệ quy*. Sử dụng quan hệ này, ta có thể tính được đại lượng cần tìm nếu chú ý rằng với n nhỏ, bài tóan luôn có thể giải một cách dễ dàng.

Ta minh họa phương pháp này thông qua một số ví dụ:

Ví dụ 1. (Bài tóan chia kẹo của Euler)
Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \quad (*)$$

Giải. Gọi số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên là S(n, k). Dễ dàng thấy rằng S(1, k) = 1. Để tính S(n, k), ta chú ý rằng (*) tương đương với

$$x_1 + ...+ x_{n-1} = k - x_n \quad (**)$$

Suy ra với x_n cố định thì số nghiệm của (**) là $S(n-1, k-x_n)$. Từ đó ta được công thức

$$S(n, k) = S(n-1, k) + S(n-1, k-1) + ...+ S(n-1, 0)$$

Đây có thể coi là công thức truy hồi tính S(n, k). Tuy nhiên, công thức này chưa thật tiện lợi. Viết công thức trên cho (n, k-1) ta được

$$S(n, k-1) = S(n-1, k-1) + S(n-1, k-2) + ...+ S(n-1, 0)$$

Từ đây, trừ các đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$S(n, k) - S(n, k-1) = S(n-1, k)$$

Hay $S(n, k) = S(n, k-1) + S(n-1, k)$

Từ công thức này, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng $S(n, k) = C^k_{n+k-1}$.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n trong đó không có hai bit 1 đứng cạnh nhau?
Giải. Gọi c_n là số xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ta có $c_1 = 2$, $c_2 = 3$. Để tìm công thức truy hồi, ta xây dựng xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài có dạng $a_na_{n-1}a_{n-2}......a_2a_1$. Có hai trường hợp

i) $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1} = 0$ và $a_{n-2}......a_2a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài n-2 thỏa điều kiện. Có c_{n-2} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-2} xâu.
ii) $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1}......a_2a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài n-1 thỏa điều kiện. Có c_{n-1} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-1} xâu.

Vậy tổng cộng xây dựng được $c_{n-1} + c_{n-2}$ xâu, nghĩa là ta có hệ thức truy hồi

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách lát đường đi kích thước 3x2n bằng các viên gạch kích thước 1x2?

Ví dụ 4. n đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?

Ví dụ 5. (VMO 2003): Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$ gọi s_n là số các hoán vị (a_1, a_2, ..., a_n) của tập hợp $E_n = \{1, 2, ..., n\}$, mà mỗi hoán vị có tính chất $1 \leq |a_i - i| \leq 2$ với mọi i=1, 2, ..., n. Chứng minh rằng với n > 6 ta có $1.75s_{n-1} < sn < 2s_{n-1}$.
Hướng dẫn. Chứng minh công thức truy hồi $s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}$.

Ví dụ 6. Xét tập hợp $E = \{1, 2, 3, ..., 2003\}$. Với tập con A khác rỗng của E, ta đặt

$$r(A) = a_1 - a_2 + ... + (-1)^{k-1}a_k$$

trong đó a_1, a_2, ..., a_k là tất cả các phần tử của A xếp theo thứ tự giảm dần. Hãy tính tổng

$$S = \Sigma_{A \subseteq E}\, r(A).$$

3. Phương pháp thêm bớt

Ta xét bài toán thực tế sau:
Ví dụ 1. Rút ngẫu nhiên 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Tính xác suất để trong 13 quân đó có "tứ quý".
Giải. Có C^{13}_{52} cách rút 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Ta cần tìm số cách rút trong đó có 4 quân bài giống nhau (về số!).
Trước hết ta đếm số cách rút có "tứ quý" A. Rõ ràng có C^9_{48} cách rút như vậy (lấy 4 con A và 9 con bất kỳ từ 48 con còn lại). Với các quân bài khác cũng vậy. Vì có 13 quân bài khác nên số cách rút là có tứ quý là 13. C^9_{48} (!?).
Trong lời giải trên, chúng ta đã đếm lặp. Cụ thể là những cách rút bài có hai tứ quý, chẳng hạn tứ quý K và tứ quý A được đếm hai lần: một lần ở tứ quý A và một lần ở tứ quý K. Nhưng ta đang đếm không hải là số tứ quý mà là số lần gặp tứ quý. Như thế, những lần đếm lặp đó phải trừ đi. Dễ thấy, số cách rút có tứ quý K và A sẽ là C^5_{44}. Lý luận tiếp tục như thế, ta có con số chính xác cách rút có tứ quý là:

$$13.\ C^9_{48} - C^2_{13}C^5_{44} + C^3_{13}C^1_{40}$$

và xác suất cần tìm bằng

$$p = (13.\ C^9_{48} - C^2_{13}C^5_{44} + C^3_{13}C^1_{40})/C^{13}_{52}.$$

Định lý. *Với n tập hợp A_1, ..., A_n bất kỳ ta có công thức*

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-1}|A_1 \cap ... \cap A_n|$$

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào?
Giải. Có 8! cách xếp 8 con xe con xe lên bàn cờ quốc tế sao cho không có con nào ăn con nào. Ta cần đếm số cách xếp không hợp lệ, tức là số cách xếp có ít nhất một con xe nằm trên đường chéo.
Gọi A_i là tập hợp các cách xếp có quân xe nằm ở ô (i, i). Ta cần tìm $|A_1 \cup ... \cup A_8|$. Nhưng dễ dàng thấy rằng $|A_i| = 7!$, $|A_i \cap A_j| = 6!$ ... $|A_1 \cap ... \cap A_8| = 1$ nên từ định lý trên ta suy ra

$$|A_1 \cup ... \cup A_8| = C^1_8.7! - C^2_8.6! + C^3_8.6! - ... - C^8_8.1! = 8! - 8!/2! + 8!/3! - ... - 8!/8!.$$

Như vậy số cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào bằng

$$N(8) = 8! - (8! - 8!/2! + 8!/3! - ... - 8!/8!) = 8!(1/2! - 1/3! + ... + 1/8!).$$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi hai đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào?

Nói thêm: Định lý về xe và đa thức xe.

4. Phương pháp quỹ đạo

Ví dụ 1. Có m+n người đang đứng quanh quầy vé, trong đó n người có tiền 5.000 và m người chỉ có tiền 10.000. Đầu tiên ở quầy không có tiền, vé giá 5.000. Hỏi có bao nhiêu cách xếp m+n người thành hàng để không một người nào phải chờ tiền trả lại (m ≤ n).

Ví dụ 2. (Bài toán bầu cử) Trong cuộc bầu cử, ứng cử viên A được a phiếu bầu, ứng cử viên B được b phiếu bầu (a > b). Cử tri bỏ phiếu tuần tự. Có bao nhiêu cách sắp xếp việc bỏ phiếu để lúc nào A cũng hơn B về số phiếu bầu?

Cho x > 0 và y là số nguyên. Quỹ đạo từ gốc toạ độ đến điểm (x; y) là đường gấp khúc nối các điểm O, (1; s_1), ..., (k; s_k), ...(x; s_x), trong đó

$$|s_i - s_{i-1}| = 1, s_x = y.$$

Gọi $N_{x,y}$ là số các quỹ đạo nối điểm (0; 0) với điểm (x; y). Ta có các định lý sau:

Định lý 1. *$N_{x,y} = C^p_{p+q}$ với $p = (x+y)/2$, $q = (x-y)/2$ nếu x, y cùng tính chẵn lẻ và $N_{x,y} = 0$ nếu x, y khác tính chẵn lẻ.*
Chứng minh: Giả sử quỹ đạo gồm p đoạn hướng lên trên và q đoạn hướng xuống dưới. Khi đó

$$p + q = x, p - q = y$$

từ đó

$$p = (x+y)/2, q = (x-y)/2$$

(vì p và q là các số nguyên nên x, y cần phải có cùng tính chẵn lẻ). Vì quỹ đạo sẽ hoàn toàn được xác định nếu ta chỉ ra đoạn nào được hướng lên trên, do đó số các quỹ đạo từ điểm O đến điểm (x; y) bằng $N_{x,y} = C^p_{p+q}$.

Định lý 2. *(Nguyên lý đối xứng gương) Giả sử A(a; α), B(b; β) là các điểm có toạ độ nguyên, hơn nữa $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, và A□(a; - α) là điểm đối xứng với A qua trục Ox. Khi đó số các quỹ đạo từ A đến B cắt trục Ox hoặc có điểm chung với Ox bằng số các quỹ đạo từ A□ đến B.*
Chứng minh. Mỗi một quỹ đạo T từ A đến B, cắt trục Ox hoặc có điểm chung với Ox ta cho tương ứng với quỹ đạo T' từ A' đến B theo quy tắc sau: xét đoạn quỹ đạo T từ A cho đến điểm gặp nhau đầu tiên giữa T và Ox và lấy đối xứng đoạn này qua Ox, tiếp theo T và T' trùng nhau. Như vậy mỗi một quỹ đạo T từ A đến B cắt Ox tương ứng với một quỹ đạo xác định từ A' đến B. Ngược lại mỗi một quỹ đạo từ A' đến B tương ứng với một và chỉ một quỹ đạo từ A đến B cắt Ox (lấy đoạn quỹ đạo từ A' đến B đến điểm gặp đầu tiên và lấy đối xứng đoạn này qua Ox). Như vậy ta đã thiết lập được song ánh từ tập hợp các quỹ đạo từ A đến B cắt Ox vào tập hợp các quỹ đạo từ A' đến B. Định lý được chứng minh.

Định lý 3. *Giả sử x > 0, y > 0. Khi đó số quỹ đạo từ O đến (x; y) khôn có điểm chung với trục Ox (ngoại trừ điểm O) bằng $(y/x)N_{x,y}$.*

5. Phương pháp hàm sinh

Phương pháp hàm sinh là một phương pháp hiện đại, sử dụng các kiến thức về chuỗi, chuỗi hàm (đặc biệt là công thức Taylor). Đây là phương pháp mạnh nhất để giải bài toan giải tích tổ hợp

Định nghĩa: Cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
Chuỗi hình thức
$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$
được gọi là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$.

Ý tưởng phương pháp hàm sinh như sau: Giả sử ta cần tìm công thức tổng quát của một dãy số $\{a_n\}$ nào đó. Từ công thức truy hồi hoặc những lý luận tổ hợp trực tiếp, ta tìm được hàm sinh
$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$
Khai triển A(x) thành chuỗi và tìm hệ số của x^n trong khai triển đó ta tìm được a_n.

Công thức khai triển thường sử dụng (Công thức nhị thức Newton)
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2/2 + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n/n! + \ldots$$

Ví dụ 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $f_0 = 1, f_1 = 2, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.
Giải: Xét hàm sinh
$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots + f_nx^n + \ldots$$
$$= f_0 + f_1x + (f_0+f_1)x^2 + \ldots + (f_{n-1}+f_{n-2})x^n + \ldots$$
$$= f_0 + f_1x + x^2(f_0+f_1x+\ldots) + x(f_1x+\ldots)$$
$$= f_0 + f_1x + x^2F(x) + x(F(x)-f_0)$$
Từ đó suy ra
$$F(x) = (1+x)/(1-x-x^2)$$
Tiếp theo, ta khai triển F(x) thành chuỗi. Ta có
$$F(x) = (1+x)/(1-\alpha x)(1-\beta x)$$
trong đó α, β là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Ta dễ dàng tìm được hai hằng số A, B sao cho
$$F(x) = A/(1-\alpha x) + B/(1-\beta x)$$
Từ đó, sử dụng công thức $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ ta được
$$F(x) = A + B + (A\alpha + B\beta)x + \ldots + (A\alpha^n + B\beta^n)x^n + \ldots$$
suy ra
$$f_n = A\alpha^n + B\beta^n$$
với α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ và A, B, là các hằng số hòan tòan xác định.

Ví dụ 2. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $a_0 = 1, a_na_0+a_{n-1}a_1 + \ldots + a_0a_n = 1$
Giải: Xét hàm sinh $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$
Biểu thức truy hồi gợi chúng ta đến hệ số của hai đa thức
$A(x).A(x) = a_0 + (a_0a_1+a_1a_0)x + \ldots + (a_na_0+a_{n-1}a_1 + \ldots + a_0a_n)x^n + \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = (1-x)^{-1}$.
Từ đó suy ra
$$A(x) = (1-x)^{-1/2} = 1 + (1/2)x + (1/2)(3/2)x^2/2 + \ldots + (1/2)(3/2)\ldots(n-1/2)x^n/n! + \ldots$$
Và như vậy
$$a_n = (2n-1)!!/2^n.n! = C^n_{2n}/2^{2n}.$$

Ví dụ 3. (Bài tóan chia kẹo của Euler)
Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \ (*)$$

Giải: Gọi $c_n(k)$ là số nghiệm của (*). Xét tích của các tổng vô hạn

$$(1+x+x^2+...)(1+x+x^2+...)....(1+x+x^2+...) = (1+x+x^2+...)^n$$

Ta nhận xét rằng nếu khai triển tích trên thành chuỗi lũy thừa của x

$$(1+x+x^2+...)^n = c_0 + c_1x + ...+ c_kx^k + ...$$

thì $c_k = c_n(k)$ (Vì sao? Hãy thử giải thích)
Nhưng

$$(1+x+x^2+...)^n = (1-x)^{-n} = 1 + nx + ...+ n(n+1)...(n+k-1)x^k/k! + ...$$

Suy ra

$$c_n(k) = n(n+1)...(n+k-1)/k! = C^k_{n+k-1}.$$

Ví dụ 4. Vé xe búyt trong hệ thống giao thông công cộng được đánh số từ 000000 đến 999999. Một vé được gọi là *vé hạnh phúc* nếu tổng ba chữ số đầu tiên bằng tổng ba chữ số cuối cùng. Hãy tìm xác suất gặp vé hạnh phúc của một người mua 1 vé bất kỳ.

Ví dụ 5.(Vietnam ST 94) Tính tổng

$$T = \Sigma\ 1/n_1!n_2!...n_{1994}!(n_2+2n_3+...+1993n_{1994})!$$

ở đây tổng lấy theo tất cả các bộ có thứ tự các số tự nhiên $(n_1, n_2, ..., n_{1994})$ thoả mãn điều kiện

$$n_1+2n_2+3n_3+...+1994n_{1994} = 1994.$$

Giải.

Ví dụ 6. Có 2n điểm trên đường tròn. Hãy tìm số cách nối 2n điểm này bằng n dây cung không cắt nhau.

Câu hỏi và bài tập

1. 1) n đường thẳng có thể chia đường thẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?
   2) n mặt phẳng có thể chia không gian thành nhiều nhất bao nhiêu miền?
2. Hàm sinh của dãy $\{a_n\}$ bằng A(x). Hãy tính hàm sinh của các dãy số sau
   1) $b_n = ca_n$
   2) $b_n = a_n + b$
   3) $b_n = a_n + a_{n-1} + ...+ a_1 + a_0$
   4) $b_n = a_{2n}$
3. Giả sử Ω là một tập hợp gồm n phần tử. Họ các tập con $A_1, A_2, ..., A_k$ được gọi là họ *Sperner* nếu trong các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$ không có tập nào là tập con của tập khác.
   1) Giả sử $A_1, A_2, ..., A_k$ là một họ Sperner với số phần tử tương ứng là $i_1, i_2 ..., i_k$. Chứng minh rằng $1/C^{i1}_n + 1/1/C^{i2}_n + ... + 1/C^{in}_n \le 1$.
   2) (Định lý Sperner). Giả sử $A_1, A_2, ..., A_k$ là một họ Sperner. Khi đó $k \le C^{[n/2]}_n$.
   3) Gọi A_n là số các họ Sperner khác nhau của Ω. Chứng minh rằng
   $$2^{Tn} < A_n < C^{Tn}_{2^{\wedge}Tn}$$
   trong đó $T_n = C^{[n/2]}_n$.
4. (Mỹ 1996) Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 010, b_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 0011 hoặc 1100. Chứng minh rằng $b_{n+1} = 2a_n$ với mọi n nguyên dương.

5. (Việt Nam 1996) Cho các số nguyên k và n sao cho $1 \le k \le n$. Tìm tất cả các bộ sắp thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_k)$ trong đó $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số khác nhau từ tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$, thoả mãn điều kiện:

1) Tồn tại s và t sao cho $1 \le s < t \le k$ và $a_s > a_t$.

2) Tồn tại s sao cho $1 \le s \le k$ và a_s không đồng dư với s theo mod 2.

6. Tìm số tất cả các bộ n số $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho

(i) $x_i = \pm 1$ với $i=1, 2, ..., n$;

(ii) $0 \le x_1 + x_2 + ...+ x_r < 4$ với $r = 1, 2, ..., n-1$;

(iii) $x_1 + x_2 + ...+ x_n = 4$.

7. (PTNK 2000) Cho $M = \{1, 2, ..., n\}$.

1) Tìm số tất cả các bộ ba tập con A, B, C của M thoả điều kiện

$A \cup B \cup C = M, B \cap C = \varnothing$;

2) Tìm số tất cả các bộ bốn tập con A, B, C, D của M thoả điều kiện

$A \cup B \cup C \cup D = M, B \cap C \cap D = \varnothing$.

Bài 4. - Ứng dụng của phép đếm

Giải tích tổ hợp không chỉ giải quyết các bài toán được đặt ra trong chính lý thuyết này mà còn nhiều ứng dụng thú vị trong các ngành toán học khác, ví dụ như trong đại số, số học, hình học tổ hợp, lý thuyết xác suất...

Các hệ số nhị thức thường được nảy sinh một cách tự nhiên trong số học modular, trong đại số giao hoán, trong lý thuyết đại số Lie modular, vì vậy, những đẳng thức liên quan đến hệ số nhị thức đóng một vai trò đặc biệt quan trọng.

Dưới đây, chúng ta xét một số ví dụ liên quan đến ứng dụng của giải tích tổ hợp trong các lĩnh vực khác nhau của toán học.

Ví dụ 1. Cho p là một số nguyên tố. Đường tròn được chia thành p cung bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô p cung bằng a màu khác nhau (Hai cách tô màu thu được bằng một phép quay được coi là giống nhau)?

Giải. Mỗi mội cung có a cách tô màu, như vậy có a^p cách tô màu p cung (với quy ước cố định vị trí). Trong số này có a cách tô màu bằng chỉ một màu. Với mỗi cách tô màu dùng 2 màu trở lên, ta có thể dùng phép quay để tạo ra p cách tô màu khác được tính trong a^p cách tô màu trên nhưng không được tính theo cách tính đề bài. Như vậy số cách tô màu thoả mãn điều kiện đề bài là $(a^p-a)/p + a$.

Hệ quả. (Định lý nhỏ Fermat) Cho p là số nguyên tố và a là số nguyên, khi đó $a^p - a$ chia hết cho p.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng từ 2n-1 số nguyên bất kỳ luôn tìm được n số có tổng chia hết cho n.

Giải. Ta gọi mệnh đề ở đề bài là A(n). Trước hết ta chứng minh rằng nếu A(m), A(n) đúng thì A(mn) cũng đúng (hãy chứng minh!). Từ đây, bài toán quy về việc chứng minh A(p) với p là số nguyên tố. Xét $E = \{a_1, a_2, ..., a_{2p-1}\}$. Giả sử ngược lại rằng với mọi bộ $a_{i1}, ..., a_{ip}$ lấy từ E ta có $a_{i1} + ...+ a_{ip}$ không chia hết cho p. Khi đó, theo định lý nhỏ Fermat

$(a_{i1} + ...+ a_{ip})^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Từ đó suy ra

$\sum (a_{i1} + ...+ a_{ip})^{p-1} \equiv C^p_{2p-1}$ (mod p)

trong đó tổng tính theo tất cả các tập con p phần tử của E. Mặt khác, ta đếm số lần xuất hiện của đơn thức $a_{j1}^{\alpha 1}...a_{jk}^{\alpha k}$ với $\alpha_1 + ...+ \alpha_k = p-1$ trong tổng ở vế trái. Có $C^k_{2p-1}.C^{p-k}_{2p-k-1}$ tổng dạng $a_{i1} + ...+ a_{ip}$ có chứa $a_{j1}, ..., a_{jk}$. Trong mỗi tổng này, đơn thức $a_{j1}^{\alpha 1}...a_{jk}^{\alpha k}$ xuất hiện với hệ số $(p-1)!/\alpha_1!...\alpha_k!$. Như vậy, đơn thức $a_{j1}^{\alpha 1}...a_{jk}^{\alpha k}$ sẽ xuất hiện trong tổng vế trái với hệ số $C^k_{2p-1}.C^{p-k}_{2p-k-1}.[(p-1)!/\alpha_1!...\alpha_k!] = [(2p-1)!/k!(p-k)!(p-1)!].[(p-1)!/\alpha_1!...\alpha_k!]$. Do $1 \le k \le p-1$ nên hệ số này luôn chia hết cho p, suy ra tổng vế trái chia hết cho p. Mặt khác $C^p_{2p-1} = (2p-1)/p!(p-1)! = (p+1)...(2p-1)/(p-1)!$ không chia hết cho p. Mâu thuẫn.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{n} k(C^k_n)^2 = nC^{n-1}_{2n-1}$.

Ví dụ 4. Cho a là số thực dương và n là số nguyên dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x_1x_2...x_n/(1+x_1)(x_1+x_2)...(x_{n-1}+x_n)(x_n+a^{n+1})$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số dương tuỳ ý.

Giải. Đặt $u_0 = x_1$, $u_1 = x_2/x_1$, ..., $u_n = a^{n+1}/x_n$ thì $u_0u_1...u_n = a_{n+1}$ và ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)$. Ta có $(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n) = 1 + \sum u_i + \sum u_{i1}u_{i\,2} + ...+ \sum u_{i1}...u_{i\,k} + ... + u_0u_1...u_n$. Tổng $\sum u_{i1}...u_{i\,k}$ có C^k_{n+1} số hạng. Tích của chúng sẽ là một biểu thức bậc kC^k_n. Do tính đối xứng, mỗi một số hạng sẽ đúng góp bậc là $kC^k_{n+1}/(n+1)$. Suy ra tích của tất cả các số hạng này bằng (a^{n+1})^$(kC^k_{n+1}/(n+1))$ = a^(kC^k_{n+1}). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\sum u_{i1}...u_{i\,k} \ge C^k_{n+1}a^k$. Do đó $1 + \sum u_i + \sum u_{i1}u_{i\,2} + ...+ \sum u_{i1}...u_{i\,k} + ... + u_0u_1...u_n \ge 1 + (n+1)a + C^2_{n+1}a^2 + ...+ C^k_{n+1}a^k + ... + a^{n+1} = (1+a)^{n+1}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u_0 = u_1 = ...= u_n = a$ tức là khi $x_1 = a$, $x_2 = a^2$, ..., $x_n = a^n$.

Ví dụ 5. (Vietnam ST 1993) Xét n điểm A_1, A_2, ..., A_n trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Mỗi một cặp điểm A_i, A_j được nối với nhau bởi một đoạn thẳng.

Tìm giá trị lớn nhất của n sao cho có thể tô tất cả các đoạn thẳng đó bằng hai màu xanh, đỏ thoả mãn ba điều kiện sau:

1) Mỗi đoạn thẳng được tô bằng đúng một màu.
2) Với i=1, 2, ..., n số đoạn thẳng có một đầu mút là A_i mà được tô màu xanh không vượt quá 4.
3) Với mỗi đoạn thẳng A_iA_j được tô màu đỏ đều tìm thấy ít nhất một điểm A_k (k khác i, j) mà các đoạn thẳng A_kA_i và A_kA_j đều được tô màu xanh.