Nguyên lý cực hạn

Trần Nam Dũng
Trường Đại học KHTN Tp HCM

Bài viết này được phát triển từ bài viết "Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh" mà chúng tôi đã trình bày tại Hội nghị "Các chuyên đề Olympic Toán chọn lọc" tại Ba Vì, Hà Nội, tháng 5-2010 và giảng dạy cho đội tuyển Olympic Việt Nam dự IMO 2010. Trong bài này, chúng tôi tập trung chi tiết hơn vào các ứng dụng của Nguyên lý cực hạn trong giải toán.

Một tập hợp hữu hạn các số thực luôn có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất. Một tập con bất kỳ của N luôn có phần tử nhỏ nhất. Nguyên lý đơn giản này trong nhiều trường hợp rất có ích cho việc chứng minh. Hãy xét trường hợp biên! Đó là khẩu quyết của nguyên lý này.

Một số ví dụ mở đầu

Ta xem xét một số ví dụ sử dụng nguyên lý cực hạn

Ví dụ 1. Có 3 trường học, mỗi trường có n học sinh. Mỗi một học sinh quen với ít nhất n+1 học sinh từ hai trường khác. Chứng minh rằng người ta có thể chọn ra từ mỗi trường một bạn sao cho ba học sinh được chọn đôi một quen nhau.

Giải.

Gọi A là **học sinh có nhiều bạn nhất** ở một trường khác. Gọi số bạn nhiều nhất này là k. Giả sử A ở trường thứ nhất và tập những bạn quen A là $M = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ ở trường thứ 2. Cũng theo giả thiết, có ít nhất 1 học sinh C ở trường thứ 3 quen với A. Vì C quen không quá k học sinh ở trường thứ nhất nên theo giả thiết C quen với ít nhất n+1 – k học sinh của trường thứ hai, đặt $N = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ là những người quen C ở trường thứ hai thì $m \geq n + 1 - k$. Vì M, N đều thuộc tập hợp gồm n học sinh và $| M | + | N | \geq k + n+1 - k = n+1$ nên ta có $M \cap N \neq \varnothing$. Chọn B nào đó thuộc $M \cap N$ thì ta có A, B, C đôi một quen nhau.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng không tồn tại số n lẻ, n > 1 sao cho $15^n + 1$ chia hết cho n

Giải. Giả sử tồn tại một số nguyên lẻ $n > 1$ sao cho $15^n + 1$ chia hết cho n. Gọi p là **ước số nguyên tố nhỏ nhất** của n, khi đó p lẻ. Giả sử k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $15^k - 1$ chia hết cho p (số k được gọi là bậc của 15 theo modulo p).

Vì $15^{2n} - 1 = (15^n-1)(15^n+1)$ chia hết cho p. Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat thì $15^{p-1} - 1$ chia hết cho p. Theo định nghĩa của k, suy ra k là ước số của các số p-1 và 2n. Suy ra $k \mid (p-1, 2n)$. Do p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n nên $(n, p-1) = 1$. Suy ra $(p-1, 2n) = 2$. Vậy $k \mid 2$. Từ đó $k = 1$ hoặc $k = 2$. Cả hai trường hợp này đều dẫn tới $p = 7$. Nhưng điều này mâu thuẫn vì $15^n + 1$ luôn đồng dư 2 mod 7

Trong hai ví dụ trên, rõ ràng việc xét **các trường hợp biên** đã đem đến cho chúng ta những thông tin bổ sung quan trọng. Trong ví dụ thứ nhất, việc chọn A là học sinh có số người quen nhiều nhất ở một trường khác đã cho ta thông tin số người quen của C trong trường thứ hai ít nhất là $n+1 - k$. Trong ví dụ thứ hai, do p là ước số nguyên tố nhỏ nhất nên p-1 nguyên tố cùng nhau với n là bội số của p.

Bài tập

1. Cho n điểm xanh và n điểm đỏ trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể nối 2n điểm này bằng n đoạn thẳng có đầu mút khác màu sao cho chúng đôi một không giao nhau.

2. Trên đường thẳng có 2n+1 đoạn thẳng. Mỗi một đoạn thẳng giao với ít nhất n đoạn thẳng khác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng giao với tất cả các đoạn thẳng còn lại.

3. Trong mặt phẳng cho $n > 1$ điểm. Hai người chơi lần lượt nối một cặp điểm chưa được nối bằng một véc-tơ với một trong hai chiều. Nếu sau nước đi của người nào đó tổng các véc tơ đã vẽ bằng 0 thì người thứ hai thắng; nếu cho đến khi không còn vẽ được véc tơ nào nữa mà tổng vẫn chưa có lúc nào bằng 0 thì người thứ nhất thắng. Hỏi ai là người thắng cuộc nếu chơi đúng?

4. Giả sử n là số nguyên dương sao cho $2^n + 1$ chia hết cho n.
a) Chứng minh rằng nếu $n > 1$ thì n chia hết cho 3;
b) Chứng minh rằng nếu $n > 3$ thì n chia hết cho 9;
c) Chứng minh rằng nếu $n > 9$ thì n chia hết cho 27 hoặc 19;
d) Chứng minh rằng nếu n chia hết cho số nguyên tố $p \neq 3$ thì $p \geq 19$;
e)* Chứng minh rằng nếu n chia hết cho số nguyên tố p, trong đó $p \neq 3$ và $p \neq 19$ thì $p \geq 163$.

Phương pháp phản ví dụ nhỏ nhất

Trong việc chứng minh một số tính chất bằng phương pháp phản chứng, ta có thể có thêm một số thông tin bổ sung quan trọng nếu sử dụng *phản ví dụ nhỏ nhất*. Ý tưởng là để chứng minh một tính chất A cho một cấu hình P, ta xét một đặc trưng f(P) của P là một hàm có giá trị nguyên dương. Bây giờ giả sử tồn tại một cấu hình P không có tính chất A, khi đó sẽ tồn tại một cấu hình P_0 không có tính chất A với $f(P_0)$ nhỏ nhất. Ta sẽ tìm cách suy ra điều mâu thuẫn. Lúc này, ngoài việc chúng ta có cấu hình P_0 không có tính chất A, ta còn có mọi cấu hình P với $f(P) < f(P_0)$ đều có tính chất A.

Ví dụ 3. Cho ngũ giác lồi ABCDE trên mặt phẳng toạ độ có toạ độ các đỉnh đều nguyên.

a) Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của ngũ giác (khác với A, B, C, D, E) có toạ độ nguyên.

b) Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong ngũ giác có toạ độ nguyên.

c) Các đường chéo của ngũ giác lồi cắt nhau tạo ra một ngũ giác lồi nhỏ $A_1B_1C_1D_1E_1$ bên trong. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong hoặc trên biên ngũ giác lồi $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Câu a) có thể giải quyết dễ dàng nhờ *nguyên lý Dirichlet*: Vì có 5 điểm nên tồn tại ít nhất 2 điểm X, Y mà cặp toạ độ (x, y) của chúng có cùng tính chẵn lẻ (ta chỉ có 4 trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn) và (lẻ, lẻ)). Trung điểm Z của XY chính là điểm cần tìm.

Sang câu b) lý luận trên đây chưa đủ, vì nếu XY không phải là đường chéo mà là cạnh thì Z có thể sẽ nằm trên biên. Ta xử lý tình huống này như sau. Để ý rằng nếu XY là một cạnh, chẳng hạn là cạnh AB thì ZBCDE cũng là một ngũ giác lồi có các đỉnh có toạ độ đều nguyên và ta có thể lặp lại lý luận nêu trên đối với ngũ giác ZBCDE, … Ta có thể dùng *đơn biến* để chứng minh quá trình này không thể kéo dài mãi, và đến một lúc nào đó sẽ có 1 ngũ giác có điểm nguyên nằm trong.

Tuy nhiên, ta có thể trình bày lại lý luận này một cách gọn gàng như sau: Giả sử tồn tại một ngũ giác nguyên mà bên trong không chứa một điểm nguyên nào (phản ví dụ). Trong tất cả các ngũ giác như vậy, chọn ngũ giác ABCDE có diện tích nhỏ nhất (phản ví dụ nhỏ nhất). Nếu có nhiều ngũ giác như vậy thì ta chọn một trong số chúng. Theo lý luận đã trình bày ở câu a), tồn tại hai đỉnh X, Y có cặp toạ độ cùng tính chẵn lẻ. Trung điểm Z của XY sẽ có toạ độ nguyên. Vì bên trong ngũ giác ABCDE không có điểm nguyên nào nên XY phải là một cạnh nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là AB. Khi đó ngũ giác ZBCDE có toạ độ các đỉnh đều nguyên và có diện tích nhỏ hơn diện tích ngũ giác ABCDE. Do tính nhỏ nhất của ABCDE (phản ví dụ nhỏ nhất phát huy tác dụng!) nên bên trong ngũ giác ZBCDE có 1 điểm nguyên T. Điều này mâu thuẫn vì T cũng nằm trong ngũ giác ABCDE.

Phản ví dụ nhỏ nhất cũng là cách rất tốt để trình bày một chứng minh quy nạp (ở đây thường là quy nạp mạnh), để tránh những lý luận dài dòng và thiếu chặt chẽ.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì tồn tại các số nguyên x, y sao cho ax + by = 1.

Giải.

Giả sử khẳng định đề bài không đúng, tức là tồn tại hai số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau sao cho không tồn tại x, y nguyên sao cho ax + by = 1. Gọi a_0, b_0 là một cặp số như vậy với $a_0 + b_0$ nhỏ nhất (phản ví dụ nhỏ nhất).

Vì $(a_0, b_0) = 1$ và $(a_0, b_0) \neq (1, 1)$ (do $1.0 + 1.1 = 1$) nên $a_0 \neq b_0$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_0 > b_0$. Dễ thấy $(a_0-b_0, b_0) = (a_0, b_0) = 1$. Do $a_0 - b_0 + b_0 = a_0 < a_0 + b_0$ nên do tính nhỏ nhất của phản ví dụ, ta suy ra (a_0-b_0, b_0) không là phản ví dụ, tức là tồn tại x, y sao cho $(a_0-b_0)x + b_0y = 1$. Nhưng từ đây thì $a_0x + b_0(y-x) = 1$. Mâu thuẫn đối với điều giả sử. Vậy điều giả sử là sai và bài toán được chứng minh.

Bài tập

5. Giải phần c) của ví dụ 3.

6. Trên mặt phẳng đánh dấu một số điểm. Biết rằng 4 điểm bất kỳ trong chúng là đỉnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng tất cả các điểm được đánh dấu là đỉnh của một đa giác lồi.

Nguyên lý cực hạn và bất đẳng thức

Nguyên lý cực hạn thường được áp dụng một cách hiệu quả trong các bất đẳng thức có tính tổ hợp, dạng chứng minh tồn tại k số từ n số thỏa mãn một điều kiện này đó.

Ví dụ 5. (Moscow MO 1984) Trên vòng tròn người ta xếp ít nhất 4 số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng tổng tất cả các tích các cặp số kề nhau không lớn hơn $\frac{1}{4}$.

Giải.

Ta cần chứng minh rằng với mọi $n \geq 4$ số thực không âm $a_1, ..., a_n$, có tổng bằng 1, ta có bất đẳng thức

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq 1/4.$$

Với n chẵn n ($n = 2m$) điều này có thể chứng minh dễ dàng: đặt $a_1 + a_3 + ... + a_{2m-1} = a$; khi đó, rõ ràng,

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq (a_1 + a_3 + ... + a_{2m-1}) \times (a_2 + a_4 + ... + a_{2m}) = a(1 - a) \leq 1/4.$$

Giả sử n lẻ và a_k – là số **nhỏ nhất** trong các số đã cho. (Để thuận tiện, ta giả sử $1 < k < n - 1$ – điều này không làm mất tính tổng quát khi $n \geq 4$.) Đặt $b_i = a_i$, với $i = 1,..., k - 1$, $b_k = a_k + a_{k+1}$ và $b_i = a_{i+1}$ với $i = k + 1,..., n - 1$. Áp dụng bất đẳng thức của chúng ta cho các số $b_1,..., b_{n-1}$, ta được:

$$a_1a_2 + ... + a_{k-2}a_{k-1} + (a_{k-1} + a_{k+2})\, b_k + a_{k+2}a_{k+3} + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq 1/4.$$

Cuối cùng, ta sử dụng bất đẳng thức

$$a_{k-1}a_k + a_ka_{k+1} + a_{k+1}a_{k+2} \leq a_{k-1}a_k + a_{k-1}a_{k+1} + a_{k+1}a_{k+2} \leq (a_{k-1} + a_{k+2})\, b_k.$$

để suy ra điều phải chứng minh.

Đánh giá trên đây là tốt nhất; dấu bằng xảy ra khi 2 trong n số bằng 1/2, còn các số còn lại bằng 0.

Ví dụ 6. *Cho $n \geq 4$ và các số thực phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại 4 số a, b, c, d thuộc $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sao cho

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq a + b + d + nabd.$$

Giải. Nếu $a \leq b \leq c$ là ba số nhỏ nhất trong các a_i thì với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ ta có bất đẳng thức

$$(a_i - a)(a_i - b)(a_i - c) \geq 0$$

Suy ra

$$a_i^3 \ge (a+b+c)a_i^2 - (ab+bc+ca)a_i + abc$$ với mọi i = 1, 2, …,n.

Cộng tất cả các bất đẳng thức này, với chú ý $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$ ta được

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \ge a+b+c+nabc.$$

Bây giờ nếu chọn d là số lớn nhất trong các a_i thì ta có

$$(a_i - a)(a_i - b)(a_i - d) \le 0$$

với mọi i = 1, 2, …, n. Và cũng thực hiện tương tự như trên, ta suy ra bất đẳng thức vế phải của bất đẳng thức kép cần chứng minh.

Ví dụ 7. Tổng bình phương của một 100 số thực dương lớn hơn 10000. Tổng của chúng nhỏ hơn 300. Chứng minh rằng tồn tại 3 số trong chúng có tổng lớn hơn 100.

Giải. Giả sử 100 số đó là $C_1 \ge C_2 \ge ... \ge C_{100} > 0$. Nếu như $C_1 \ge 100$, thì $C_1 + C_2 + C_3 > 100$. Do đó ta có thể giả sử rằng $C_1 < 100$. Khi đó $100 - C_1 > 0$, $100 - C_2 > 0$, $C_1 - C_2 \ge 0$ и $C_1 - C_3 \ge 0$, vì vậy

$$100(C_1 + C_2 + C_3) \ge 100(C_1 + C_2 + C_3) - (100 - C_1)(C_1 - C_3) - (100 - C_2)(C_2 - C_3) =$$

$$= C_1^2 + C_2^2 + C_3(300 - C_1 - C_2) >$$

$$> C_1^2 + C_2^2 + C_3(C_3 + C_4 + ... + C_{100}) \ge$$

$$\ge C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + ... + C_{100}^2 > 10000.$$

Suy ra, $C_1 + C_2 + C_3 > 100$.

Bài tập

7. Trong mỗi ô của bảng 2 x n ta viết các số thực dương sao cho tổng các số của mỗi cột bằng 1. Chứng minh rằng ta có thể xoá đi ở mỗi cột một số sao cho ở mỗi hàng, tổng của các số còn lại không vượt quá $\frac{n+1}{4}$.

8. 40 tên trộm chia 4000 euro. Một nhóm gồm 5 tên trộm được gọi là nghèo nếu tổng số tiền mà chúng được chia không quá 500 euro. Hỏi số nhỏ nhất các nhóm trộm nghèo trên tổng số tất cả các nhóm 5 tên trộm bằng bao nhiêu?

Nguyên lý cực hạn và phương trình Diophant

Trong phần này, ta trình bày chi tiết ba ví dụ áp dụng nguyên lý cực hạn trong phương trình Fermat, phương trình Pell và phương trình dạng Markov.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ (1) không có nghiệm nguyên dương.

Giải. Giả sử ngược lại, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương, và (x, y, z) là nghiệm của (1) với z nhỏ nhất.

(1) Dễ thấy $\mathbf{x^2, y^2, z}$ đôi một nguyên tố cùng nhau

(2) Từ nghiệm của phương trình Pythagore, ta có tồn tại p, q sao cho

$\mathbf{x^2 = 2pq}$
$\mathbf{y^2 = p^2 - q^2}$
$\mathbf{z = p^2 + q^2}$

(3) Từ đây, ta lại có một bộ ba Pythagore khác, vì $\mathbf{y^2 + q^2 = p^2}$.

(4) Như vậy, tồn tại **a,b** sao cho
$\mathbf{q = 2ab}$
$\mathbf{y = a^2 - b^2}$
$\mathbf{p = a^2 + b^2}$
a,b nguyên tố cùng nhau

(5) Kết hợp các phương trình này, ta được:
$\mathbf{x^2 = 2pq = 2(a^2 + b^2)(2ab) = 4(ab)(a^2 + b^2)}$

(6) Vì **ab** và $\mathbf{a^2 + b^2}$ nguyên tố cùng nhau, ta suy ra chúng là các số chính phương.

(7) Như vậy $\mathbf{a^2 + b^2 = P^2}$ và $\mathbf{a = u^2}$, $\mathbf{b = v^2}$. Suy ra $P^2 = u^4 + v^4$.

(8) Nhưng bây giờ ta thu được điều mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của z vì:
$\mathbf{P^2 = a^2 + b^2 = p < p^2 + q^2 = z < z^2}$.

(9) Như vậy điều giả sử ban đầu là sai, suy ra điều phải chứng minh.

Phương pháp trình bày ở trên còn được gọi là phương pháp xuống thang. Đây có lẽ là phương pháp mà Fermat đã nghĩ tới khi viết trên lề cuốn sách của Diophant những dòng chữ mà sau này được gọi là định lý lớn Fermat và đã làm điên đầu bao nhiêu thế hệ những nhà toán học.

<u>Ví dụ 9.</u> Tìm tất cả các cặp đa thức P(x), Q(x) thỏa mãn phương trình

$$P^2(x) = (x^2-1)Q^2(x) + 1 \quad (1)$$

<u>Giải.</u> Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần tìm nghiệm trong tập các đa thức có hệ số khởi đầu dương.

Nếu $(x+\sqrt{x^2-1})^n = P_n(x)+\sqrt{x^2-1}Q_n(x)$ (2) thì $(x-\sqrt{x^2-1})^n = P_n(x)-\sqrt{x^2-1}Q_n(x)$ (3)

Nhân (2) và (3) vế theo vế, ta được

$$\begin{aligned}1 &= (x+\sqrt{x^2-1})^n(x-\sqrt{x^2-1})^n = (P_n(x)+\sqrt{x^2-1}Q_n(x))(P_n(x)-\sqrt{x^2-1}Q_n(x))\\ &= P_n^2(x)-(x^2-1)Q_n^2(x)\end{aligned}$$

Suy ra cặp đa thức $P_n(x)$, $Q_n(x)$ xác định bởi (2) (và (3)!) là nghiệm của (1). Ta chứng minh đây là tất cả các nghiệm của (1). Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại cặp đa thức P(x), Q(x) không có dạng $P_n(x)$, $Q_n(x)$ thỏa mãn (1). Ta xét cặp đa thức (P, Q) như vậy với degQ nhỏ nhất.

Đặt $(P(x)+\sqrt{x^2-1}Q(x))(x-\sqrt{x^2-1}) = P^*(x)+\sqrt{x^2-1}Q^*(x)$ (4)

Thì rõ ràng

$$(P(x)-\sqrt{x^2-1}Q(x))(x+\sqrt{x^2-1}) = P^*(x)-\sqrt{x^2-1}Q^*(x)$$

Suy ra (P*, Q*) cũng là nghiệm của (1).

Khai triển (4), ta thu được $P^*(x) = xP(x) - (x^2-1)Q(x)$, $Q^*(x) = xQ(x) - P(x)$. Chú ý là từ (1) ta suy ra $(P(x) - xQ(x))(P(x)+xQ(x)) = - Q^2(x) + 1$. Vì P(x) và Q(x) đều có hệ số khởi đầu > 0 và degP = degQ + 1 nên ta có deg(P(x)+xQ(x)) = degQ + 1. Từ đây, do deg($-Q^2(x) + 1$) ≤ 2deg(Q) nên ta suy ra deg(Q*(x)) ≤ deg(Q) – 1 < deg Q.

Như vậy, theo cách chọn cặp (P, Q) thì tồn tại n sao cho (P*, Q*) = (P_n, Q_n).

Nhưng khi đó từ (4) suy ra

$$P(x)+\sqrt{x^2-1}Q(x)=(P^*(x)+\sqrt{x^2-1}Q^*(x))(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$=(x+\sqrt{x^2-1})^n(x+\sqrt{x^2-1})=(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}$$

Suy ra (P, Q) = (P_{n+1},Q_{n+1}), mâu thuẫn.

Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị k sao cho phương trình $(x+y+z)^2 = kxyz$ có nghiệm nguyên dương.

Giải.

Giả sử k là một giá trị cần tìm. Gọi x_0, y_0, z_0 là nghiệm nguyên dương của phương trình

$$(x+y+z)^2 = kxyz \qquad (1)$$

có $x_0 + y_0 + z_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x_0 \ge y_0 \ge z_0$.

Viết lại (1) dưới dạng $x^2 - (kyz - 2y - 2z)x + (y+z)^2 = 0$

ta suy ra x_0 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 - (ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0)x + (y_0+z_0)^2 = 0 \qquad (2)$$

Theo định lý Viet $x_1 = ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0 - x_0 = (y_0+z_0)^2/x_0$ cũng là nghiệm của (2). Từ đó (x_1, y_0, z_0) là nghiệm của (1). Cũng từ các công thức trên, ta suy ra x_1 nguyên dương. Tức là (x_1, y_0, z_0) là nghiệm nguyên dương của (1). Từ tính nhỏ nhất của $x_0 + y_0 + z_0$ ta $x_1 \ge x_0$. Từ đây ta có

$$ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0 - x_0 \ge x_0 \quad \text{và } (y_0+x_0)^2/x_0 \ge x_0$$

Từ bất đẳng thức thứ hai ta suy ra $y_0 + z_0 \ge x_0$. Từ đó, áp dụng vào bất đẳng thức thứ nhất, ta được $ky_0z_0 \ge 4x_0$.

Cuối cùng, chia hai vế của đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2x_0y_0 + 2y_0z_0 + 2z_0x_0 = kx_0y_0z_0$ cho $x_0y_0z_0$, ta được

$$\frac{x_0}{y_0z_0}+\frac{y_0}{x_0z_0}+\frac{z_0}{x_0y_0}+\frac{2}{z_0}+\frac{2}{x_0}+\frac{2}{y_0}=k\,.$$

Từ đó suy ra $\frac{k}{4}+1+1+2+2+2 \ge k$, tức là $k \le \frac{32}{3}$. Suy ra $k \le 10$.

Chú ý nếu $x_0 = 1$ thì $y_0 = z_0 = 1$ suy ra k = 9. Nếu $k \neq 9$ thì $x_0 \geq 2$ và đánh giá ở trên trở thành

$$\frac{k}{4}+1+\frac{1}{2}+2+1+2 \geq k \quad \text{suy ra} \quad k \leq \frac{26}{3}, \text{ suy ra } k \leq 8$$

Vậy giá trị k = 10 bị loại.

Với k = 1 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (9, 9, 9)

Với k = 2 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (4, 4, 8)

Với k = 3 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (3, 3, 3)

Với k = 4 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (2, 2, 4)

Với k = 5 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 4, 5)

Với k = 6 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 2,3)

Với k = 8 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 1, 2)

Với k = 9 phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 1, 1)

Ngoài ra, ta có thể chứng minh được rằng trường hợp k = 7 phương trình không có nghiệm nguyên dương (xin được dành cho bạn đọc).

Vậy các giá trị k cần tìm là k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Ví dụ 11. (CRUX, Problem 1420) Nếu a, b, c là các số nguyên dương sao cho

$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 - abc$ là số chính phương.

Giải. Giả sử ngược lại rằng tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$ và $k = a^2 + b^2 - abc$ (1) không phải là số chính phương.

Bây giờ ta cố định k và c và xét tập hợp tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình (1), tức là ta xét

$$S(c, k) = \{(a, b) \in (N^*)^2 : a^2 + b^2 - abc = k\}$$

Giả sử (a, b) là cặp số thuộc S(c, k) có a + b nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \geq b$. Ta xét phương trình

$$x^2 - bcx + b^2 - k = 0$$

Ta biết rằng x = a là một nghiệm của phương trình. Gọi a_1 là nghiệm còn lại của phương trình này thì $a_1 = bc - a = (b^2 - k)/a$.

Ta có thể chứng minh được rằng (bạn đọc tự chứng minh!) a_1 nguyên dương. Suy ra (a_1, b) cũng thuộc S(c, k).

Tiếp theo ta có $a_1 = (b^2-k)/a < a^2/a = a$, suy ra $a_1 + b < a + b$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn (a, b).

Bài tập

9. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ không có nghiệm nguyên dương.

10. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

11. (IMO 88) Nếu a, b, $q = (a^2+b^2)/(ab+1)$ là các số nguyên dương thì q là số chính phương.

12. (PTNK 03). Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 - (k^2-4)y^2 = -24$ có nghiệm nguyên dương.

13. (Mathlinks) Cho A là tập hợp hữu hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp hữu hạn các số nguyên dương B sao cho $A \subset B$ và $\prod_{x\in B} x = \Sigma_{x\in B} x^2$.

14.* (AMM 1995) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho xy + x và xy + y là các số chính phương. Chứng minh rằng có đúng một trong hai số x, y là số chính phương.

15. (IMO 2007) Cho a, b là các số nguyên dương sao cho 4ab – 1 chia hết $(4a^2-1)^2$. Chứng minh rằng a = b.

16. (VMO 2012) Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của $b^2 + 2$ và b là ước số của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

$$v_1 = v_2 = 1 \text{ và } v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Nguyên lý cực hạn trong tổ hợp

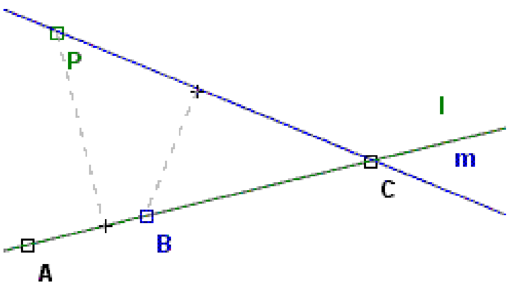
Trên đây chúng ta đã xem xét các ví dụ áp dụng của nguyên lý cực hạn trong Mảnh đất màu mỡ nhất dành cho nguyên lý cực hạn. Nguyên lý cực hạn có thể được ứng dụng để chứng minh một quá trình là dừng (trong bài toán liên quan đến biến đổi trạng thái), trong bài toán về đồ thị, hay trong các tình huống tổ hợp đa dạng khác. Các đối tượng thường được đem ra để xét cực hạn thường là: đoạn thẳng ngắn nhất, tam giác có diện tích lớn nhất, góc lớn nhất, đỉnh có bậc lớn nhất, chu trình có độ dài ngắn nhất …

Dưới đây ta xem xét một số ví dụ:

Ví dụ 12. (Định lý Sylvester) Cho tập hợp S gồm hữu hạn các điểm trên mặt phẳng thỏa mãn tính chất sau: Một đường thẳng đi qua 2 điểm thuộc S đều đi qua ít nhất một điểm thứ ba thuộc S. Khi đó tất cả các điểm của S nằm trên một đường thẳng.

Kết luận của định lý nghe có vẻ hiển nhiên nhưng chứng minh nó thì không hề đơn giản. Chứng minh dưới đây của Kelly được chúng tôi tham khảo từ Wikipedia

Giả sử phản chứng là tồn tại một tập hợp S gồm hữu hạn điểm không thẳng hàng nhưng mọi đường thẳng qua hai điểm trong S đều chứa ít nhất ba điểm. Một đường thẳng gọi là đường nối nếu nó đi qua ít nhất hai điểm trong S. Giả sử (P,l) là cặp điểm và đường nối có khoảng cách dương nhỏ nhất trong mọi cặp điểm-đường nối.



Theo giả thiết, l đi qua ít nhất ba điểm trong S, nên nếu hạ đường cao từ P xuống l thì tồn tại ít nhất hai điểm nằm cùng một phía của đường cao (một điểm có thể nằm ở ngay chân đường cao). Trong hai điểm này, gọi điểm ở gần chân đường cao hơn là B, và điểm kia là C. Xét đường thẳng m nối P và C. Khoảng cách từ B tới m nhỏ hơn khoảng cách từ P tới l, mâu thuẫn với giả thiết về P và l. Một cách để thấy điều này là tam giác vuông với cạnh huyền BC đồng dạng và nằm bên trong tam giác vuông với cạnh huyền PC.

Do đó, không thể tồn tại khoảng cách dương nhỏ nhất giữa các cặp điểm-đường nối. Nói cách khác, mọi điểm đều nằm trên đúng một đường thẳng nếu mọi đường nối đều chứa ít nhất ba điểm.

Ví dụ 13. (Trận đấu toán học Nga 2010) Một quốc gia có 210 thành phố. Ban đầu giữa các thành phố chưa có đường. Người ta muốn xây dựng một số con đường một chiều nối *giữa các thành phố sao cho: Nếu có đường đi từ A đến B và từ B đến C thì không có đường đi từ A đến C.Hỏi có thể xây dựng được nhiều nhất bao nhiêu đường?*

Giải.

Gọi A là thành phố có nhiều đường đi nhất (gồm cả đường đi xuất phát từ A và đường đi đến A). Ta chia các thành phố còn lại thành 3 loại. Loại I - Có đường đi xuất phát từ A. Loại II - Có đường đi đến A. Loại III: Không có đường đi đến A hoặc xuất phát từ A. Đặt m = | I |, n = | II |, p = | III |. Ta có m + n + p = 209.

Dễ thấy giữa các thành phố loại I không có đường đi. Tương tự, giữa các thành phố loại 2 không có đường đi.

Số các đường đi liên quan đến các thành phố loại 3 không vượt quá p(m+n). (Do bậc của A = m + n là lớn nhất).

Tổng số đường đi bao gồm:
+ Các đường đi liên quan đến A: m + n
+ Các đường đi liên quan đến III : $\le p(m+n)$
+ Các đường đi giữa I và II: $\le mn$
Suy ra tổng số đường đi nhỏ hơn
$mn + (p+1)m + (p+1)n \le (m+n+p+1)^2/3 = 210^2/3$.

Dấu bằng xảy ra với đồ thị 3 phe, mỗi phe có 70 thành phố, thành phố phe 1 có đường đi đến thành phố phe 2, thành phố phe 2 có đường đi đến thành phố phe 3, thành phố phe 3 có đường đi đến thành phố phe 1.

Ví dụ 14. Trong quốc hội Mỹ, mỗi một nghị sĩ có không quá 3 kẻ thù. Chứng minh rằng có thể chia quốc hội thành 2 viện sao cho trong mỗi viện, mỗi một nghị sĩ có không quá một kẻ thù.

Đây là một ví dụ mà tôi rất thích. Có nhiều cách giải khác nhau nhưng ở đây chúng ta sẽ trình bày một cách giải sử dụng nguyên lý cực hạn. Ý tưởng tuy đơn giản nhưng có rất nhiều ứng dụng (trong nhiều bài toán phức tạp hơn).

Ta chia quốc hội ra thành 2 viện A, B một cách bất kỳ. Với mỗi viện A, B, ta gọi s(A), s(B) là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện đó. Vì số cách chia là hữu hạn nên phải tồn tại cách chia (A_0, B_0) sao cho $s(A_0) + s(B_0)$ nhỏ nhất. Ta chứng minh cách chia này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử rằng cách chia này vẫn chưa thoả mãn yêu cầu, tức là vẫn có một nghị sĩ nào đó có nhiều hơn 1 kẻ thù trong viện của mình. Không mất tính tổng quát, giả sử nghị sĩ x thuộc A_0 có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0. Khi đó ta thực hiện phép biến đổi sau: chuyển x từ A_0 sang B_0 để được cách chia mới là $A' = A_0 \setminus \{x\}$ và $B' = B_0 \cup \{x\}$. Vì x có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0 và A' không còn chứa x nên ta có

$s(A') \leq s(A_0) - 4$ (trong tổng mất đi ít nhất 2 của s(x) và 2 của các kẻ thù của x trong A_0)

Vì x có không quá 3 kẻ thù và có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0 nên x có nhiều nhất 1 kẻ thù trong B_0 (hay B'), cho nên

$s(B') \leq s(B_0) + 2$

Từ đó $s(A') + s(B') \leq s(A_0) + s(B_0) - 2$. Mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của $s(A_0) + s(B_0)$. Vậy điều giả sử là sai, tức là cách chia (A_0, B_0) thỏa mãn yêu cầu bài toán (đpcm).

Bài tập

17. Cho 2n điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng những điểm này có thể phân thành n cặp sao cho các đoạn thẳng nối chúng không cắt nhau.

18. Trong mặt phẳng cho 100 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết rằng ba điểm bất kỳ trong chúng tạo thành một tam giác có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng ta có thể phủ tất cả các điểm đã cho bằng một tam giác có diện tích 4.

19. Trên mặt phẳng cho 2n+3 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra từ các điểm này 3 điểm, sao cho trong các điểm còn lại có n điểm nằm trong đường tròn và n điểm nằm ngoài đường tròn.

20. Trong mặt phẳng cho n điểm và ta đánh dấu tất cả các điểm là trung điểm của các đoạn thẳng có đầu mút là các điểm đã cho. Chứng minh rằng có ít nhất 2n-3 điểm phân biệt được đánh dấu.

21. Tại một quốc gia có 100 thành phố, trong đó có một số cặp thành phố có đường bay. Biết rằng từ một thành phố bất kỳ có thể bay đến một thành phố bất kỳ khác (có thể nối

chuyến). Chứng minh rằng có thể đi thăm tất cả các thành phố của quốc gia này sử dụng không quá a) 198 chuyến bay b) 196 chuyến bay.

22*. Trong một nhóm 12 người từ 9 người bất kỳ luôn tìm được 5 người đôi một quen nhau. Chứng minh rằng tìm được 6 người đôi một quen nhau trong nhóm đó.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu chủ biên, *Các chuyên đề Olympic Toán chọn lọc*, Ba Vì, 5/2010.

[2] Đoàn Quỳnh chủ biên, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán - Đại số 10*, NXB GD, 2010.

[3] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/05/fermats-last-theorem-n-4.html

[4] vi.wikipedia.org/wiki/Định_lý_Sylvester–Gallai

[5] www.mathscope.org

[6] www.problems.ru