

Hàm đặc trưng của tập hợp và Ứng dụng

Trần Nam Dũng
Trường ĐH KHTN Tp HCM

1. Mở đầu

Hàm đặc trưng là một khái niệm quan trọng của toán học với nhiều ứng dụng trong lý thuyết tập hợp, lý thuyết nhóm, lý thuyết độ đo và tích phân, lý thuyết xác suất. Trong bài viết này, chúng ta đề cập đến hàm đặc trưng của tập hợp và những ứng dụng của nó trong lý thuyết tập hợp và các bài toán đếm. Cách tiếp cận hàm đặc trưng sẽ giúp học sinh làm việc dễ dàng hơn với các bài toán về tập hợp và giúp chúng ta giải thích một cách dễ hiểu phương pháp đếm theo phần tử - một kỹ thuật đếm hiệu quả.

2. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Ta xét một tập hợp E và tập hợp tất cả các tập con của E (ký hiệu là $P(E)$, hay 2^E). Tập hợp E được gọi là tập hợp vũ trụ, chứa tất cả các tập hợp mà ta quan tâm đến. Chú ý là E và \emptyset cũng là tập con của E , tức là phần tử của $P(E)$.

Định nghĩa 1. Với mỗi tập con A của E , hàm đặc trưng χ_A (đọc là chi-A) của A là hàm số xác định trên E và nhận giá trị trong $\{0, 1\}$, được xác định như sau:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{neu } x \in A \\ 0 & \text{neu } x \notin A \end{cases}$$

Như vậy, hàm đặc trưng chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 và $\chi_A(x)$ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi x thuộc A . Vì thế hàm đặc trưng của tập hợp còn được gọi là *hàm thuộc* hay *hàm chi*.

Một tập hợp sẽ hoàn toàn được xác định nếu ta biết hàm đặc trưng của nó. Hai tập hợp bằng nhau khi và chỉ khi hai hàm đặc trưng của nó bằng nhau (tức là chúng bằng nhau tại mọi điểm x thuộc E). Đây chính là cơ sở để ta vận dụng hàm đặc trưng trong việc chứng minh các tính chất liên quan đến các phép toán trên tập hợp.

Trước hết, ta có các định nghĩa cơ bản sau:

Định nghĩa 2. Xét hai hàm số χ_1 và χ_2 xác định trên E và nhận giá trị trong \mathbb{R} . Ta viết:

i) $\chi_1 = \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1(x) = \chi_2(x) \quad \forall x \in E;$

- ii) $\chi_1 \leq \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1(x) \leq \chi_2(x) \quad \forall x \in E$;
- iii) $\chi_1 + \chi_2$ là một hàm số từ E vào R, xác định bởi $(\chi_1 + \chi_2)(x) = \chi_1(x) + \chi_2(x)$;
- iv) $\chi_1 \chi_2$ là một hàm số từ E vào R, xác định bởi $(\chi_1 \chi_2)(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x)$.

Ta cũng sẽ sử dụng 0 và 1 để ký hiệu các hàm đồng nhất 0 trên E và đồng nhất 1 trên E (nói cách khác $0 = \chi_\emptyset$, $1 = \chi_E$).

Các tính chất cơ bản của hàm đặc trưng được tóm tắt trong định lý sau:

Định lý 1. Nếu A, B là các tập con bất kỳ của tập vũ trụ E thì ta có

- 1) $(\chi_A)^2 = \chi_A$;
- 2) $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$;
- 3) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;
- 4) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$;
- 5) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$;
- 6) $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B \pmod 2$.

Phép chứng minh định lý sử dụng định nghĩa của hàm đặc trưng, cũng như định nghĩa các phép toán trên tập hợp. Ở đây chú ý là ta chọn tập ảnh của hàm đặc trưng là $\{0, 1\}$ có một thuận lợi là $0^2 = 0$ và $1^2 = 1$ do đó mà có tính chất 1). Cuối cùng, cũng cần nhắc lại là ký hiệu $A \Delta B$ biểu thị cho hiệu đối xứng của hai tập hợp, tức là tập các phần tử thuộc đúng vào một trong hai tập hợp:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

3. Ứng dụng hàm đặc trưng để chứng minh các đẳng thức, bao hàm thức về tập hợp

Với các tính chất cơ bản đã nêu ở phần 2, hàm đặc trưng có thể được sử dụng một cách hiệu quả để chứng minh các đẳng thức tập hợp. Chúng ta bắt đầu bằng các ví dụ đơn giản sau:

Ví dụ 1. (Quy tắc De Morgan). Nếu A, B là các tập con bất kỳ thuộc E thì ta có

- a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
- b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Chứng minh. a) Ta có

$$\chi_{\overline{A \cup B}} = 1 - \chi_{A \cup B} = 1 - (\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B) = (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = \chi_{\bar{A}} \cdot \chi_{\bar{B}} = \chi_{\bar{A} \cap \bar{B}}$$

Từ đó suy ra $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

b) Tương tự

$$\chi_{\overline{A \cap B}} = 1 - \chi_{A \cap B}$$

Mặt khác

$$\chi_{\overline{A \cap B}} = \chi_{\overline{A}} + \chi_{\overline{B}} - \chi_{\overline{A}} \cdot \chi_{\overline{B}} = 1 - \chi_A + 1 - \chi_B - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = 1 - \chi_A \cdot \chi_B$$

Nên ta suy ra hàm đặc trưng của $\overline{A \cap B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B}$ bằng nhau, do đó chúng bằng nhau.

Ví dụ 2. (Tính phân phối giữa phép hợp và phép giao). Nếu A, B, C là các tập con bất kỳ thuộc E thì ta có

$$a) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$b) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Chứng minh.

Ta chỉ chứng minh phần a), phần b) có chứng minh hoàn toàn tương tự.

Ta có

$$\chi_{(A \cup B) \cap C} = \chi_{A \cup B} \cdot \chi_C = (\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B) \chi_C$$

Mặt khác

$$\chi_{(A \cap C) \cup (B \cap C)} = \chi_{(A \cap C)} + \chi_{(B \cap C)} - \chi_{(A \cap C)} \chi_{(B \cap C)} = \chi_A \chi_C + \chi_B \chi_C - \chi_A \chi_C \chi_B \chi_C =$$

$$\chi_A \chi_C + \chi_B \chi_C - \chi_A \chi_B \chi_C = (\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B) \chi_C.$$

Hai hàm đặc trưng bằng nhau do đó hai tập hợp ở hai vế bằng nhau.

Bài tập

1. Chứng minh rằng phép hiệu đối xứng có tính kết hợp, tức là với mọi tập hợp A, B, C ta có $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

2. Chứng minh rằng nếu $A \cap B = A \cap C$ và $A \cup B = A \cup C$ thì $B = C$.

3. Chứng minh nếu A, B, C là các tập con bất kỳ của E thì ta có

$$a) (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$$

$$b) (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$$

Hàm đặc trưng còn có thể làm việc hiệu quả với các bao hàm thức, với chú ý là $A \subset B$ khi và chỉ khi $\chi_A \leq \chi_B$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $A \cap C \subset B \cap C$ và $A \setminus C \subset B \setminus C$ thì $A \subset B$.

Giải. Từ giả thiết ta suy ra $\chi_A \chi_C \leq \chi_B \chi_C$ và $\chi_A - \chi_A \chi_C \leq \chi_B - \chi_B \chi_C$. Cộng các bất đẳng thức vế theo vế, ta được $\chi_A \leq \chi_B$, tức là $A \subset B$ (đpcm).

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu $A \cap B = C \cap D$, $C \cup D = E$, $C \subset A$, $D \subset B$ thì $C = A$, $D = B$.

Giải. Theo giả thiết ta có

$$(1) \chi_A \chi_B = \chi_C \chi_D;$$

$$(2) \chi_C + \chi_D - \chi_C \chi_D = 1;$$

$$(3) \chi_C \leq \chi_A, \chi_D \leq \chi_B.$$

Ta cần chứng minh các bất đẳng thức ở (3) phải là các đẳng thức.

Giả sử ngược lại, tồn tại một điểm x mà ở đó một trong hai bất đẳng thức ở (3) là bất đẳng thức thực sự. Không mất tính tổng quát, giả sử $\chi_C(x) < \chi_A(x)$. Khi đó $\chi_C(x) = 0$, $\chi_A(x) = 1$. Lúc đó, do (1) thì $\chi_B(x) = 0$. Từ bất đẳng thức $\chi_D \leq \chi_B$ suy ra $\chi_D(x) = 0$. Nhưng điều này mâu thuẫn với (2).

Bài tập

4. Cho E là một tập hợp, $X, Y, Z, X', Y', Z' \in P(E)$. Giả thiết rằng:

$$X \cup Y \cup Z = E, X \cap Y = X' \cap Y', X \cap Z = X' \cap Z', Y \cap Z = Y' \cap Z', X \subset X', Y \subset Y', Z \subset Z'.$$

Chứng minh rằng $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$.

4. Ứng dụng hàm đặc trưng trong các bài toán đếm

Một trong những ứng dụng đẹp đẽ và có chiều sâu nhất của hàm đặc trưng là ứng dụng trong các bài toán đếm. Và cơ sở của ứng dụng này là công thức hiển nhiên sau:

$$|A| = \sum_{x \in E} \chi_A(x)$$

Trước hết, ta sẽ ứng dụng công thức này để chứng minh lại một số nguyên lý cơ bản của phép đếm.

Nguyên lý cộng

$$\text{Nếu } A \cap B = \emptyset \text{ thì } |A \cup B| = |A| + |B|$$

Nguyên lý nhân

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Nguyên lý trừ

$$|\bar{A}| = |E| - |A|$$

Nguyên lý bù trừ

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Chứng minh

Rõ ràng nguyên lý cộng và nguyên lý trừ là hệ quả của nguyên lý bù trừ, do đó ta chỉ cần chứng minh nguyên lý bù trừ là suy ra hai nguyên lý còn lại.

Ta có $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

Từ đó suy ra $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$

Cho x chạy qua khắp E rồi cộng lại, ta được

$$\sum_{x \in E} \chi_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in E} \chi_A(x) + \sum_{x \in E} \chi_B(x) - \sum_{x \in E} \chi_{A \cap B}(x)$$

Nhưng điều này, theo công thức cơ bản ở trên, có nghĩa là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ta có điều phải chứng minh.

Theo định nghĩa thì $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$. Ta có

$$|A \times B| = \sum_{(x,y) \in E \times F} \chi_{A \times B}(x, y) = \sum_{(x,y) \in E \times F} \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_{x \in E} \chi_A(x) \sum_{y \in B} \chi_B(y) = |A| \cdot |B|$$

Như vậy quy tắc nhân đã được chứng minh.

Bài tập

5. Cho A, B, C là các tập hợp bất kỳ, chứng minh rằng

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

6. Chứng minh công thức bao hàm và loại trừ (Nguyên lý bù trừ) tổng quát.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Tiếp theo, ta sẽ ứng dụng công thức này để giải thích phương pháp đếm theo phần tử. Ta minh họa phương pháp này qua bài toán sau.

Ví dụ 5. Cho $E = \{1, 2, \dots, n\}$. $F = P(E)$. Hãy tính

$$S = \sum_{(A,B) \in F^2} |A \cap B|$$

Giải. Bài này có thể giải bằng hai cách, cách 1 là đếm theo tập hợp và cách hai là đếm theo phần tử. Với cách 1, ta gọi $s(k)$ là số tất cả các bộ $(A, B) \in F^2$ sao cho $|A \cap B| = k$. Thế thì rõ ràng

$$S = \sum_{k=0}^n k.s(k)$$

Như vậy ta chỉ cần đi tìm $s(k)$. Với mỗi k cố định, có C_n^k cách chọn ra một tập con gồm k phần tử. Giả sử đó là C . Nếu ta cho $A \cap B = C$ thì $|A \cap B| = k$. Để đảm bảo điều này, sau đó mỗi phần tử thuộc $E \setminus C$ có thể:

- a) Không thuộc A , không thuộc B ;
- b) Thuộc A , không thuộc B ;
- c) Thuộc B , không thuộc A .

Tức là có 3 cách chọn.

Từ đó suy ra $s(k) = C_n^k \cdot 3^{n-k}$.

Cuối cùng $S = \sum_{k=0}^n k.s(k) = \sum_{k=0}^n k.C_n^k 3^{n-k} = n4^{n-1}$ (Tại sao?)

Lời giải trên là khá phức tạp, bao gồm 2 bước lý luận khó: 1) Tính được $s(k)$; 2) Rút gọn tổng $\sum_{k=0}^n k.C_n^k 3^{n-k}$. Tuy nhiên, đáp số bài toán lại khá đơn giản: $n4^{n-1}$. Ta thử tìm một cách tiếp cận khác cho ra thẳng đáp số này. Và thừa số n ở đáp số gợi cho chúng ta đến phương pháp đếm theo phần tử, tức là đếm số lần một phần tử x xuất hiện trong các tập hợp $A \cap B$. Cụ thể ta có

$$S = \sum_{(A,B) \in F^2} |A \cap B| = \sum_{(A,B) \in F^2} \sum_{x \in E} \chi_{A \cap B}(x) = \sum_{x \in E} \sum_{(A,B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x)$$

Ở đây ta đã đảo thứ tự lấy tổng.

Với một phần tử $x \in E = \{1, 2, \dots, n\}$ cố định, xét tổng $\sum_{(A,B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x)$. Ta thấy $\chi_{A \cap B}(x) = 1$

khi và chỉ khi $A \cap B$ chứa x . Như vậy $\sum_{(A,B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x) = |\{(A, B) \in F^2 \mid x \in A \cap B\}|$, tức là

tổng trên bằng số bộ (A, B) sao cho cả A và B đều chứa x . Có 2^{n-1} tập con của E chứa x . Do đó, theo quy tắc nhân, số bộ (A, B) để $A \cap B$ chứa x bằng $2^{n-1} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$. Từ đó

$$S = \sum_{x \in E} \sum_{(A,B) \in F^2} \chi_{A \cap B}(x) = \sum_{x \in E} 4^{n-1} = n \cdot 4^{n-1}.$$

Ghi chú. Từ kết quả bài toán này ta suy ra kết luận sau: “Nếu lấy ngẫu nhiên hai tập con A, B thuộc $E = \{1, 2, \dots, n\}$ thì giá trị kỳ vọng của $|A \cap B|$ là $\frac{n}{4}$.”

Ví dụ 6. (APMO 1998). Xét tập hợp $E = \{1, 2, \dots, 1998\}$ và F là tập hợp tất cả các tập con của E . Hãy tính tổng

$$S = \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

Giải. Nếu giải bài này bằng phương pháp đếm theo tập hợp sẽ gặp khá nhiều khó khăn. Tuy nhiên, phương pháp đếm theo phần tử cho ta kết quả một cách nhanh chóng

$$\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} \sum_{x \in E} \chi_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}(x) = \sum_{x \in E} \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F^n} \chi_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}(x)$$

Tổng bên trong đúng bằng số các bộ (A_1, A_2, \dots, A_n) mà $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ chứa x . Ta có tổng số các bộ (A_1, A_2, \dots, A_n) bằng $(2^{1998})^n$ (2^{1998} là số các tập con của E). Tổng số các bộ (A_1, A_2, \dots, A_n) mà $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ không chứa x bằng $(2^{1997})^n$ (2^{1997} là số các tập con của E không chứa x). Từ đó suy ra số các bộ (A_1, A_2, \dots, A_n) mà $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ chứa x bằng $(2^{1998})^n - (2^{1997})^n$.

Từ đó suy ra $S = 1998((2^{1998})^n - (2^{1997})^n) = 1998(2^n - 1)2^{1997 \cdot n}$.

Bài tập

7. Cho $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Với mỗi $k = 0, 1, 2, \dots, n$ đặt $F_k = \{A \subset E \mid |A| = k\}$ (tức là tập hợp tất cả các tập con có k phần tử của E). Hãy tính tổng

$$\sum_{(A, B) \in F_p \times F_q} |A \cap B|$$

8. (VMO 2002, bảng B) Cho tập hợp S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn $[1; 2002]$. Gọi T là tập hợp tất cả các tập hợp con không rỗng của S . Với mỗi tập con X thuộc T , ký hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X . Đặt $m = \frac{\sum m(X)}{|T|}$, ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T . Hãy tính giá trị của m .

5. Một số ứng dụng khác của phương pháp đếm theo phần tử

Phương pháp đếm theo phần tử được trình bày ở mục 4 có thể được tổng quát hóa như sau:

Cho F là họ các tập con của X . Với x thuộc x , ta gọi $d(x)$ là số phần tử của F chứa x .

Định lý 2. Cho F là họ các tập con của tập hợp X . Khi đó

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{A \in F} |A|$$

Chứng minh. Xét ma trận kề $M = (m_{x,A})$ của F . Nghĩa là M là ma trận 0-1 với $|X|$ dòng đánh số bởi các điểm $x \in X$ và $|F|$ cột đánh số bởi tập $A \in F$ sao cho $m_{x,A} = 1$ khi và chỉ

khi $x \in A$. Để ý rằng $d(x)$ bằng số số 1 trên dòng thứ x còn $|A|$ là số số 1 trên cột thứ A . Như vậy cả vế trái và vế phải đều biểu diễn số số 1 của M .

Nếu ta xét đồ thị $G = (V, E)$ trên tập đỉnh V như một họ các tập con 2 phần tử của V thì ta có định lý Euler.

Định lý 3. (Euler, 1736) Trong mọi đồ thị, tổng bậc các đỉnh của nó bằng hai lần số cạnh của nó và như thế, luôn là một số chẵn.

Định lý sau có thể được chứng minh bằng cách tương tự

Định lý 4. $\sum_{x \in Y} d(x) = \sum_{A \in F} |Y \cap A|$ với mọi $Y \subseteq X$.
 $\sum_{x \in X} d(x)^2 = \sum_{A \in F} \sum_{x \in A} d(x) = \sum_{A \in F} \sum_{B \in F} |A \cap B|.$

(Hai tổng ở đẳng thức đầu ứng với số số 1 trên các hàng Y . Các tổng ở đẳng thức thứ hai đếm số lần xuất hiện của x trong các tập có dạng $A \cap B$).

Trường hợp đặc biệt khi $F = E$ là tập con 2 phần tử, ta có

Định lý 5. Với đồ thị $G = (V, E)$, ta có
 $\sum_{x \in V} d(x)^2 = \sum_{\{x,y\} \in E} (d(x) + d(y)).$

Định lý sau đây của hình học tổ hợp có nhiều ứng dụng hiệu quả trong các bài toán đánh giá diện tích và được chứng minh dựa trên ý tưởng của công thức bao hàm và loại trừ, cũng như phương pháp đếm theo phần tử (dù ở đây chúng ta không làm việc với tập hợp hữu hạn).

Định lý 6. Trên mặt phẳng cho n hình. Gọi $S_{i_1 \dots i_k}$ là diện tích phần giao của các hình với chỉ số i_1, \dots, i_k . S là diện tích phần mặt phẳng được phủ bởi các hình trên; M_k là tổng tất cả các $S_{i_1 \dots i_k}$. Khi đó:

- $S = M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{n+1} M_n;$
- $S \geq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m$ khi m chẵn và
 $S \leq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m$ khi m lẻ.

Chứng minh.

a) Gọi W_m là diện tích phần mặt phẳng được phủ bởi đúng m hình. Phần mặt phẳng này tạo thành từ các mẫu, mỗi một mẫu được phủ bởi m hình xác định nào đó. Diện tích mỗi một mẫu như vậy khi tính M_k được tính C_m^k lần, vì từ m hình có thể thiết lập được C_m^k phần giao của k hình. Vì vậy

$$M_k = C_k^k W_k + C_{k+1}^k W_{k+1} + \dots + C_n^k W_n$$

Suy ra

$$M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{n+1} M_n = C_1^1 W_1 + (C_2^1 - C_2^2) W_2 + \dots + (C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \dots) W_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n,$$

vì $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots - (-1)^m C_m^m = (-1 + C_m^1 - C_m^2 + \dots) + 1 = -(1-1)^m + 1 = 1$.

Cuối cùng, chú ý rằng $S = W_1 + W_2 + \dots + W_n$, ta suy ra điều phải chứng minh.

b) Chứng minh phần b) xin được dành cho bạn đọc.

Ta xem xét một ứng dụng trực tiếp của định lý 6.

Ví dụ 7.

a) Trong hình vuông diện tích 6 có ba hình đa giác có diện tích mỗi hình bằng 3. Chứng minh rằng trong chúng tồn tại hai hình đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn 1.

b) Trong hình vuông diện tích 5 có chín hình đa giác có diện tích mỗi hình bằng 1. Chứng minh rằng trong chúng tồn tại hai đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn 1/9.

Giải.

a) Theo định lý 6, phần a) thì ta có $6 = 9 - (S_{12} + S_{23} + S_{13}) + S_{123}$. Từ đó suy ra

$$S_{12} + S_{23} + S_{13} = 3 + S_{123} \geq 3$$

Suy ra một trong các số S_{12}, S_{23}, S_{13} không nhỏ hơn 1.

b) Theo định lý 6, phần b) thì $5 \geq 9 - M_2$, tức là $M_2 \geq 4$. Vì từ 9 hình đa giác có thể tạo ra $9 \cdot 8/2 = 36$ cặp, nên diện tích phần trong của một trong các cặp như vậy không nhỏ hơn $M_2/36 \geq 1/9$.

Bài tập

9. Trong hình chữ nhật diện tích 1 có 5 hình có diện tích mỗi hình bằng 1/2.

a) Chứng minh rằng tồn tại hai hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn 3/20.

b) Chứng minh rằng tồn tại hai hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn 1/5.

c) Chứng minh rằng tồn tại ba hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn 1/20.

10. (Olympic toàn Nga, 1996) Trong Duma có 1600 đại biểu, tạo thành 16000 ủy ban, mỗi ủy ban có 80 người. Chứng minh rằng tồn tại hai ủy ban có chung ít nhất 4 thành viên.

6. Tài liệu tham khảo

[1]. Đoàn Quỳnh (chủ biên), Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán, Đại số 10*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2009.

[2]. Nguyễn Hữu Anh, *Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.

[3]. Jean-Marie Monier, *Giáo trình Toán, Tập 5, Đại số 1*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.

[4]. Trần Nam Dũng, *Kỹ thuật đếm bằng hai cách ứng dụng trong giải toán*, Kỷ yếu Hội nghị khoa học, Các chuyên đề chuyên toán – Bồi dưỡng HSG THPT, Nam Định, 11/2010.

[5]. Alfutova N.B., Ustinov A.V., *Đại số và Lý thuyết số*, NXB MCCME 2002.

[6]. Prasolov V.V., *Các bài toán hình học*, NXB MCCME 2001.