Một số khái niệm đầu tiên của lý thuyết đồ thị

N.C.G. Vượng
Viện Toán học Hà Nội

30/3/2012

Bài giảng 3×2 tại trường Chuyên đề tổ hợp, 30/3/2012-02/4/2012, Viện Toán học Hà Nội.

1 Một số định nghĩa đầu tiên

Trước hết, ta đưa ra một vài ví dụ đầu tiên nhằm minh họa cho các khái niệm về đồ thị.

Ví dụ 1.1. *Trong một nhóm $n \geq 3$ người, mỗi người quen biết với ít nhất 2 người khác. Chứng minh rằng có thể tìm thấy $k \geq 3$ người $A_1, \dots, A_k$ sao cho với mỗi $1 \leq i \leq k$, A_i quen với A_{i-1}, A_{i+1}.*

Ví dụ 1.2. *Trong một cuộc gặp mặt n người, mỗi người là bạn là bạn của ít nhất một người khác. Biết rằng trong mỗi nhóm ba người bất kì không có chính xác hai cặp người bạn. Chứng minh rằng mọi người đều là bạn của nhau.*

Ví dụ 1.3. *Trong một thị trấn có 3 ngôi nhà A, B, C và ba nhà máy điện, nước và khí đốt. Mỗi ngôi nhà cần phải được nối với mỗi nhà máy trên bởi một đường dẫn. Hỏi có thể thực hiện được các đường ống sao cho hai đường ống đôi một không giao nhau hay không ?*

Với các tình huống như trên, ý tưởng tự nhiên là thực hiện một hình vẽ: chẳng hạn, với hai ví dụ đầu, ta tượng trưng cho mỗi người là một điểm trong mặt phẳng, hai người quen biết nhau được mô hình hóa bẳng một đường nối hai điểm tượng trưng cho hai người đó. Với ví dụ còn lại, mỗi ngôi nhà được mô hình hóa bằng một điểm, mỗi nhà máy là một điểm, các đường ống nối các ngôi nhà với các nhà máy được mô hình hóa bẳng các đường nối giữa các điểm.

Các tình huống như vậy dẫn đến khái niệm tổng quát sau.

Định nghĩa 1.4. *Một đồ thị là một cặp $G = (V, E)$ được tạo thành từ một tập hợp V và $E \subset V \times V$. Các tập V, E tương ứng được gọi là tập các đỉnh và tập các cạnh của đồ thị G.*

Với A, B là hai đỉnh, ta gọi (A, B) là cạnh nối A và B nếu $(A, B) \in E$. Ta nói A, B là các đầu mút của cạnh (A, B).

Nhận xét 1.5. 1. *Nói chung (A, B) và (B, A) không trùng nhau. Trong trường hợp này, ta nói đồ thị là có hướng. Ngược lại, nếu trong đồ thị G, ta không bao giờ phân biệt (A, B) với (B, A) thì ta nói G là một* **đồ thị vô hướng** *và khi đó ta nói: các đỉnh A, B là* **kề nhau***, đỉnh A (và B)) kề với cạnh (A, B), cạnh (A, B) kề với đỉnh A (và B). Ta cũng nói A là một* **đầu mút** *của cạnh (A, B).*

2. *Theo định nghĩa mà ta đưa ra ở trên, mỗi cặp đỉnh được nối với nhau nhiều nhất bởi một cạnh (và nói chung,* **không có khuyên***, nghĩa là không có cạnh nào nối một đỉnh với chính nó), nói cách khác, ta quan tâm đến các đồ thị* **đơn***.*

3. *Trong các ứng dụng về sau, ta thường gặp các đồ thị trên một tập đỉnh hữu hạn, nói cách khác, các* **đồ thị hữu hạn.**

4. *Chúng ta thường* **miêu tả các đồ thị bằng các hình vẽ***: các đỉnh bởi các điểm và các cạnh bởi các đường cong (liên tục) nối các điểm. Nói chung,* **vị trí tương đối của các điểm cũng như việc các đường cong nối chúng có cắt nhau hay không không có vai trò nào trong bài toán** *(tuy nhiên, bạn đọc* **lưu ý trường hợp đồ thị phẳng***!). Nói riêng, các giao điểm của các đường cong không tạo thêm đỉnh mới cho đồ thị.*

5. *Chú ý rằng một đồ thị có thể được biểu diễn bằng nhiều cách hình học và tô pô khác nhau.*

1.1 Bậc

Định nghĩa 1.6. *Cho một đồ thị $G = (V, E)$.* **Bậc** *của một đỉnh $A \in V$ là số cạnh, kí hiệu $\deg(A)$, của đồ thị nhận A làm đầu mút.*

Như vậy, bậc của một đỉnh đếm số đỉnh (hay cạnh) kề với nó.

Mệnh đề 1.7. *Trong mọi đồ thị với $n \geq 2$ đỉnh, có ít nhất hai đỉnh có cùng bậc.*

Chứng minh. Do đồ thị là đơn, bậc của các đỉnh nằm trong tập $\{0, \ldots, n-1\}$. Tuy nhiên không thể có hai đỉnh A, B sao cho $\deg(A) = 0, \deg(B) = n-1$ được. Nói cách khác, bậc các đỉnh nằm trong $\{0, \ldots, n-2\}$ hoặc $\{1, \ldots, n-1\}$. Nguyên lý Dirichlet giúp ta kết thúc chứng minh. □

Định lý 1.8 (Công thức bậc)**.** *Cho một đồ thị $G = (V, E)$. Thế thì*

$$\sum_{A \in V} \deg(A) = 2|E|.$$

(Trong đó $|X|$ kí hiệu lực lượng tập hợp X.)

Chứng minh. Theo định nghĩa, mỗi cạnh nối chính xác hai đỉnh của đồ thị, do đó chúng được tính đúng hai lần trong tổng ở vế trái. □

Nhận xét 1.9. *Công thức trên cho một hình dung đầu tiên về bậc lớn nhất và bậc nhỏ nhất của một đồ thị nếu biết số đỉnh và số cạnh: bậc nhỏ nhất $\leq \frac{2|E|}{|V|} \leq$ bậc lớn nhất.*

Công thức bậc cho ta một tính chất rất hữu ích của các đồ thị

Hệ quả 1.10. *Trong một đồ thị hữu hạn, số đỉnh bậc lẻ luôn là một số chẵn.*

Chứng minh. Rút gọn modulo 2 công thức thiết lập tại Định lý 1.8 ở trên.

□

Dĩ nhiên, kết quả trên thường được biết đến dưới phát biểu quen thuộc sau đây

Ví dụ 1.11. *Trong một cuộc họp n người, mỗi người bắt tay với một số ≥ 0 người khác. Thế thì số người bắt tay với một số lẻ người khác là chẵn.*

1.2 Đường đi, tính liên thông

Định nghĩa 1.12. *Cho A,B là hai đỉnh của một đồ thị G. Một* **đường đi** *từ A đến B là một dãy các cạnh $(A_i,A_{i+1}), i=0,\ldots,k-1$ với $A_0=A$ và $A_k=B$. Số các cạnh (ở đây là k) tạo nên đường đi gọi là* **độ dài** *của đường đi.*

Một đồ thị được gọi là liên thông nếu hai đỉnh bất kì có một đường đi giữa chúng.

Nhận xét 1.13.

1. *Theo qui ước, một đỉnh được nối với chính nó bởi một đường đi có độ dài 0;*
2. *Trong thực tế, ta sẽ hay quan tâm đến một số đường đi không có lặp: không sử dụng cạnh nào quá một lần hay thậm chí không sử dụng đỉnh đỉnh nào quá một lần.*

Cho A là một đỉnh của một đồ thị G. Tập tất cả các đỉnh B sao cho có một đường đi từ A đến B được gọi là **thành phần liên thông** của A, kí hiệu là $\mathscr{C}_A$. Tập các thành phần liên thông rõ ràng tạo nên một phân hoạch của các đỉnh của đồ thị:

- $\cup_{A\in V}\mathscr{C}_A = V$;
- Với mọi $A,B\in V$, $\mathscr{C}_A=\mathscr{C}_B$ hoặc $\mathscr{C}_A\cap\mathscr{C}_B=\emptyset$.

Nhận xét 1.14. *Nói một cách khác, có thể phân chia các đỉnh một đồ thị thành các nhóm đôi một rời nhau (các thành phần liên thông) sao cho hai đỉnh bất kì trong một nhóm được nối với nhau bởi các đường đi.*

Từ một đồ thị $G=(V,E)$ cho trước, ta có thể xây dựng các đồ thị mới bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn như sau:

1. Nếu ta chỉ loại bỏ một số cạnh của G (giữ nguyên các đỉnh) hoặc loại bỏ một số đỉnh cũng như tất cả các cạnh với ít nhất một đầu mút nằm trong các đỉnh đó thì ta nhận được một đồ thị mới, gọi là một **đồ thị con** của G;
2. Nếu như ta giữ lại một số đỉnh của G và một số cạnh của G nối các đỉnh mà ta giữ lại ta nhận được một **đồ thị cảm sinh** từ G;
3. Ta giữ nguyên các đỉnh của đồ thị G, bổ sung tất cả các cạnh có thể (sao cho được một đồ thị **đầy đủ**) rồi bỏ đi các cạnh của đồ thị ban đầu. Ta nhận được một đồ thị $\overline{G}=(V,E')$ sao cho hai đỉnh bất kì $A\neq B$ kề nhau trong $\overline{G}$ khi và chỉ khi không kề nhau trong G, gọi là **đồ thị bù** của G.
4. Nếu ta thay thế một số cạnh của G bởi các đường đi bằng cách tạo thêm một số đỉnh mới trung gian (chẳng hạn thay thế (A,B) bởi $(A,A_1),(A_1,A_2),\ldots,A_kB$ trong đó M_i là các đỉnh được tạo mới) thì ta nhận được một đồ thị mới, gọi là một **chia nhỏ** của G.

   (Chú ý rằng, trong một phép chia nhỏ một đồ thị, ta **không được quyền tạo thêm một đỉnh mới mà đỉnh đó đồng thời là đầu mút của hai cạnh**.)

Ví dụ 1.15. *Chứng minh rằng nếu G là một đồ thị không liên thông thì đồ thị bù của nó là liên thông.*

Nhận xét rằng để một đồ thị là liên thông, số các cạnh không thể có quá ít so với số đỉnh.

Mệnh đề 1.16. *Cho $G=(V,E)$ là một đồ thị liên thông. Thế thì $|E|\geq|V|-1$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo số đỉnh n của đồ thị. Trường hợp $n = 1, 2$ là tầm thường. Gọi N là một số nguyên và giả sử rằng mọi đồ thị liên thông N đỉnh đều có ít nhất $N - 1$ cạnh. Gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị $N + 1$ đỉnh.. Lưu ý rằng do G liên thông, bậc của mỗi đỉnh ≥ 1.

- Nếu bậc của mỗi đỉnh của G đều ≥ 2 thì theo công thức quen thuộc liên kết các bậc và số cạnh, ta có

$$2|E| = \sum_{A \in V} \deg(A) \geq 2n.$$

  Ta suy ra $|E| \geq n$.

- Giả sử có một đỉnh của G có bậc 1. Gọi A là một đỉnh như vậy và gọi G' là đồ thị được tạo thành từ G bằng cách loại bỏ đỉnh A và cạnh duy nhất của G với một đầu mút A. Dễ thấy G' cũng là một đồ thị liên thông với N đỉnh và $|E| - 1$ cạnh. Áp dụng giả thiết qui nạp cho G' ta có điều cần chứng minh.

□

1.3 Cây

Định nghĩa 1.17. *Cho G là một đồ thị (đơn). Một* **chu trình** *là một đường đi độ dài* $\neq 0$ *nối một đỉnh với chính nó, không sử dụng cạnh nào cũng như đỉnh nào (ngoài đỉnh đầu tiên) quá hai lần. Một chu trình, như vậy, là một đường đi khép kín không sử dụng đỉnh nào quá hai lần. Ta kí hiệu một chu trình* $A_1A_2 \ldots A_kA_1$. *Chú ý rằng* $k \neq 3$ *vì các đồ thị ở đây được giả thiết là đơn.*

Định nghĩa 1.18. *Một đồ thị liên thông không có chu trình được gọi là một* **cây**.

Trước khi đưa ra các tính chất đặc trưng cây, ta bắt đầu với điều kiện cần quen thuộc sau đây.

Mệnh đề 1.19. *Cho G là một đồ thị sao cho mỗi bậc* ≥ 2. *Thế thì G chứa một chu trình, nói riêng không phải là một cây.*

Chứng minh. Thật vậy, ta di chuyển trên đồ thị, bắt đầu từ một đỉnh bất kì, từ đỉnh này sang đỉnh khác sao cho không sử dụng lại cạnh vừa đi (do bậc mỗi đỉnh ≥ 2 nên điều này thực hiện được). Bởi vì số đỉnh là hữu hạn, ta sẽ quay lại đường đã đi. Cách này rõ ràng tạo cho ta một chu trình. □

Một trong những tính chất (về đỉnh) quan trọng của các cây là sự tồn tại các đỉnh đặc biệt.

Định lý 1.20. *Mọi cây trên* ≥ 2 *đỉnh đều có một đỉnh bậc* 1.

Một đỉnh như vậy được gọi là một **lá**. Ta cũng gọi **cạnh lá** cạnh kề (duy nhất) với một đỉnh lá.

Chứng minh. Đây là hệ quả hiển nhiên của kết quả trên. □

Một cách trực quan, mọi cây đều được hình thành như sau: bắt đầu từ một gốc nào đó, sau mỗi bước, mọc thêm một lá!

Mệnh đề 1.21. *Mọi cây đều có thể được xây dựng bằng cách bắt đầu từ một đỉnh, mỗi lần thêm vào cây đã có đúng một lá.*

Chứng minh. Thật vậy, mọi cây đều có ít nhất một lá. Ta có thể **hủy** một cây bằng cách lần lượt mỗi lần bỏ một lá khỏi cây. **Lật ngược quá trình** này ta được xây dựng như mong muốn. □

Cây là có thể được đặc trưng bới một số tính chất khác nhau. Ta bắt đầu với

Mệnh đề 1.22. *Một đồ thị là cây khi và chỉ khi giữa hai đỉnh bất kì tồn tại duy nhất một đường đi.*

Chứng minh. Giả sử G là một cây. Nói riêng, G liên thông, do đó giữa hai đỉnh bất kì tồn tại một đường đi. Mặt khác, nếu tồn tại hai đường đi phân biệt giữa hai đỉnh nào đó thì bằng cách *nối* chúng lại với nhau (và loại bỏ các cạnh lặp hay các đỉnh lặp một cách tự nhiên) ta được một chu trình, vô lý.

Chiều ngược lại là một bài tập dễ và được để lại cho bạn đọc. □

Ta đã biết một đồ thị liên thông trên n đỉnh có không ít hơn $n-1$ cạnh. Các cây chính là các đồ thị liên thông có số cạnh nhỏ nhất.

Mệnh đề 1.23. *Một đồ thị n đỉnh là một cây khi và chỉ khi liên thông và có đúng $n-1$ cạnh.*

Chứng minh. Trước hết giả sử rằng G là một đồ thị liên thông, có n đỉnh và $n-1$ cạnh nhưng G có chu trình, chẳng hạn $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_1$. Nhận xét rằng loại bỏ đi cạnh A_1A_2 đồ thị mới vẫn còn liên thông. Thật vậy, nếu cần đi từ A_1 tới A_2 ta chỉ cần đi *đường vòng* qua $A_1A_kA_{k-1}\ldots A_2$. Tuy nhiên, việc đồ thị mới này có n đỉnh, $n-2$ cạnh và liên thông mâu thuẫn với kết quả thiết lập tại Mệnh đề 1.16.

Đảo lại, theo Bổ đề 1.20, mọi cây có ít nhất một lá. Bỏ một lá khỏi cây, hiển nhiên ta có một cây mới với số đỉnh cũng như số cạnh giảm đi một. Bằng suy luận qui nạp theo số đỉnh ta có điều cần chứng minh. □

Ví dụ 1.24. *Cho G là một cây. Gọi Δ là bậc lớn nhất. Thế thì, G có ít nhất Δ lá.*

Chứng minh. Gọi A là một đỉnh bậc Δ. Với mỗi cây con với gốc là một đỉnh kề với A chọn ra một lá. Các lá này **đôi một khác nhau** (bạn đọc tự giải thích tại sao) nên số lá của cây ban đầu không ít hơn Δ.

□

Ta tóm tắt lại các đặc trưng tương đương của cây thông qua phát biểu sau.

Định lý 1.25. *Cho một đồ thị vô hướng, đơn, hữu hạn $G = (V, E)$. Các tính chất sau là tương đương:*

1. *G là một cây;*
2. *Hai đỉnh bất kì của G được nối với nhau bởi duy nhất một đường đi;*
3. *G là một đồ thị liên thông cực tiểu: G liên thông nhưng loại bỏ bất kì một cạnh nào của G khiến G không liên thông;*
4. *$|V| = |E| + 1$;*

5. *G là đồ thị phi chu trình cực đại: G không chứa chu trình nhưng bằng cách thêm vào một cạnh bất kì (giữa hai đỉnh không kề nhau của G) khiến đồ thị mới có chu trình.*

Chứng minh. Đa phần các tương đương đã được chứng minh. Phần còn lại được để lại cho bạn đọc như bài tập. □

Ngoài việc các cây là các đồ thị liên thông có số cạnh nhỏ nhất, ta có thể chú ý rằng các cây **sinh ra** tất cả các đồ thị liên thông. Cụ thể hơn,

Định lý 1.26. *Mọi đồ thị liên thông đều có thể được xây dựng bằng cách thêm vào một số cạnh vào một cây có cùng số đỉnh với đồ thị đã cho.*

Một cây như vậy được gọi là **cây bao trùm** của đồ thị.

Nhận xét 1.27. *Ta biết rằng số cạnh của một cây bẳng số đỉnh trừ đi* 1*. Như vậy, để xây dựng lại một đồ thị $G = (V, E)$, cần thêm vào $|E| + 1 - |V|$ cạnh vào một cây bao trùm G.*

Chứng minh Mệnh đề 1.26. Ta qui nạp theo số **chu trình** c của đồ thị. Nếu $c = 0$, đồ thị là một cây và ta không có gì phải chứng minh. Giả sử kết quả cần chứng minh là đúng với $c \geq 0$. Giả sử G là một đồ thị có $c+1$ chu trình. Gọi G' là đồ thị cảm sinh từ G bằng cách giữ nguyên các đỉnh và bỏ đi đúng một cạnh thuộc một chu trình nào đó, chẳng hạn cạnh (A_1, A_2) của chu trình $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_1$. Chú ý rằng mọi chu trình của G' đều là một chu trình của G và do ta đã phá đi ít nhất một chu trình của G, số chu trình của G' vì thế $\leq c$. Ngoài ra, đồ thị G' vẫn còn liên thông (nếu cần đi từ A_1 đến A_2 chỉ cần đi vòng $A_1, A_k, \ldots, A_3, A_2$.) Theo giả thiết, có thể xây dựng G' từ một cây nào đó. Sau đó chỉ cần thêm vào G' cạnh A_1, A_2 để thu được G. □

Nhận xét 1.28. *Kết quả trên rất hữu ích trong việc rút gọn các bài toán trên một đồ thị liên thông về các bài toán trên cây.*

1.4 Đồ thị đầy đủ, đồ thị đa phần

Định nghĩa 1.29. *Ta gọi đồ thị đầy đủ một đồ thị mà hai đỉnh bất kì được nối với nhau bởi một cạnh. Ta kí hiệu K_n một đồ thị đầy đủ n đỉnh.*

Như vậy, một đồ thị đầy đủ là một đồ thị có số cạnh cực đại trên một tập đỉnh cho trước.

Trái ngược với tính chất trên,

Định nghĩa 1.30. *Một tập con các đỉnh của một đồ thị được gọi là* **độc lập** *với nhau nếu hai đỉnh bất kì trong đó không được nối với nhau bởi một cạnh.*

Định nghĩa 1.31. *Một đồ thị được gọi là đồ thị hai phần nếu có thể phân chia các đỉnh của nó thành hai tập hợp, mỗi tập gồm các đỉnh độc lập với nhau.*

Ta có định nghĩa tương tự cho các đồ thị 3 *phần, ..., k-phần.*

Trong trường hợp một đồ thị hai phần với $X \cup Y$ là một phân hoạch các đỉnh thành hai tập đỉnh độc lập thỏa mãn mọi đỉnh của X được nối với mọi đỉnh của Y (một phân chia như vậy rõ ràng là duy nhất) thì ta kí hiệu $K_{X,Y}$, hay $K_{m,n}$ (m, n tương ứng là lực lượng của X, Y) cho đồ thị như vậy.

Ví dụ 1.32. *Đồ thị biểu diễn bài toán về 3 ngôi nhà và 3 nhà máy điện, nước, khí đốt là một đồ thị hai phần, cụ thể hơn, là một đồ thị $K_{3,3}$.*

Một đồ thị 2 phần có thể chấp nhận nhiều cách phân chia các đỉnh thành hai tập đỉnh độc lập (ví dụ một đồ thị chỉ gồm các đỉnh cô lập). Ta có cách miêu tả trừu tượng khác về các đồ thị 2 phần.

Định lý 1.33 (Định lý Koenig)**.** *Một đồ thị là hai phần khi và chỉ khi không có chu trình độ dài lẻ.*

Chứng minh. **Giả sử G là một đồ thị hai phần.** Rõ ràng một chu trình sẽ đi qua các đỉnh của mỗi tập đỉnh độc lập một cách **luân phiên** và do đó chỉ có thể quay lại đỉnh đầu tiên sau một số chẵn lần. Nói cách khác, mọi chu trình (nếu có) của G phải có độ dài chẵn.

Giả sử G không có chu trình độ dài lẻ. Ta sẽ xây dựng cụ thể một phân đôi của G bằng cách đưa vào hàm khoảng cách. Dễ thấy có thể giả thiết G **liên thông**, nếu không chỉ cần tiến hành cho từng thành phần liên thông rồi ghép các phân đôi lại. Gọi A là một đỉnh bất kì của G (liên thông). Với mỗi đỉnh B của G kí hiệu $d(A,B)$ là **khoảng cách** giữa hai đỉnh A và B, được định nghĩa như là độ dài ngắn nhất trong số các độ dài các đường đi từ A tới B (như vậy $d(A,A)=0$). Chú ý rằng giả thiết G liên thông đảm bảo cho việc định nghĩa này là tốt.

Gọi X, Y tương ứng là tập các đỉnh có độ dài tới A là chẵn, lẻ. Hiển nhiên X, Y tạo thành một phân hoạch của tập đỉnh của G. Hơn nữa mỗi tập X, Y là một tập đỉnh độc lập. Chẳng hạn, giả sử $B, C \in X$ sao cho (B, C) là một cạnh của G. Thế thì bằng cách nối các đường đi độ dài ngắn nhất từ A đến B, rồi cạnh (B, C), đường đi có độ dài ngắn nhất từ C tới A (có thể cần phải bỏ một số cạnh trùng nhau và đỉnh lặp) ta sẽ thu được một chu trình có độ dài lẻ, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

□

Nhận xét 1.34.

1. *Dĩ nhiên hàm khoảng cách trên đồ thị cũng thỏa mãn bất đẳng thức tam giác quen thuộc*

$$d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C),$$

2. *Đôi khi để thuận tiện, ta qui ước $d(A,B) = +\infty$ nếu giữa A và B không có đường đi. Khái niệm khoảng cách như vậy được định nghĩa trên mọi đồ thị. Tất nhiên, một đồ thị là liên thông khi và chỉ khi $d(A,B) < +\infty$ với mọi A, B.*

Hệ quả 1.35. *Mọi cây là một đồ thị hai phần.*

Ví dụ 1.36. *Bạn đọc hãy chứng minh trực tiếp tính chất: mọi cây là một đồ thị hai phần.*

1.5 Bài tập

Bài tập 1. *Có* 32 *đội bóng tham gia một giải đấu bóng đá. Ngày đầu tiên, mỗi đội chơi đúng một trận. Ngày thứ hai, mỗi đội chơi thêm đúng một trận nữa. Chứng minh rằng sau ngày thi đấu thứ hai có thể chọn ra* 16 *đội bóng sao cho hai đội bóng bất kì trong số đó chưa từng thi đấu với nhau.*

Bài tập 2. *Tồn tại hay không một nhóm*

1. *5 người mà số các người bạn của mỗi bạn (trong nhóm bạn đó) lần lượt là* $5, 3, 2, 2, 1$ *?*
2. *5 người mà số các người bạn của mỗi bạn (trong nhóm bạn đó) lần lượt là* $0, 2, 4, 4, 4$ *?*
3. *5 người mà số các người bạn của mỗi bạn (trong nhóm bạn đó) lần lượt là* $0, 4, 4, 5, 5$ *?*
4. *9 người mà số các người bạn của mỗi bạn (trong nhóm bạn đó) lần lượt là* $6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2$ *?*
5. *8 người mà số các người bạn của mỗi bạn (trong nhóm bạn đó) lần lượt là* $6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0$ *?*
6. *8 người mà số các người bạn của mỗi bạn (trong nhóm bạn đó) lần lượt là* $7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1$ *?*

Bài tập 3. *Tại một buổi sinh hoạt CLB Toán học, người ta thấy rằng mỗi thành viên là bạn với ít nhất một thành viên khác. Hơn thế nữa, trong mỗi nhóm* ≥ 3 *thành viên, không có đúng* 2 *cặp bạn bè. Chứng minh rằng tất cả các thành viên CLB là bạn của nhau.*

Bài tập 4. *Có* $n > 2$ *hòn đảo và* n *cây cầu kết nối chúng. Biết rằng có thể đi từ một hòn đảo bất kì đến một hòn đảo bất kì bằng cách sử dụng các cây cầu đó. Chứng minh rằng có thể tìm được một cây cầu sao cho nếu ta bỏ cây cầu đó đi, ta vẫn có thể đi từ một hòn đảo đến một hòn đảo bất kì khác.*

Bài tập 5. *Một mảnh lưới bóng bàn được tạo thành từ một lưới ô vuông kích thước* 20×150. *Người ta có thể cắt tối đa bao nhiêu cạnh đơn vị của lưới đó sao cho lưới bóng bàn vẫn không rời thành hơn 1 mảnh ?*

Bài tập 6. *Trong một quốc gia nọ có* ≥ 101 *thành phố và các đường bay (hai chiều) nối một số các thành phố. Biết rằng thủ đô có đường bay trực tiếp tới* 100 *thành phố khác và một thành phố bất kì, không phải là thủ đô, có đường bay trực tiếp đến đúng* 10 *thành phố khác, ngoài ra hai thành phố bất kì được nối với nhau bằng một đường bay trực tiếp hay gián tiếp. Chứng minh rằng có thể đóng một nửa số đường bay phục vụ thủ đô sao cho vẫn có thể bay từ một thành phố bất kì đến một thành phố bất kì khác.*

Bài tập 7. *Trong một nhóm người, một số người quen biết nhau và một số người không. Mỗi tối, một người nào đó đãi tiệc mời tất cả những người mình quen biết và giới thiệu họ cho nhau. Biết rằng, sau khi mỗi người đều đã tổ chức tiệc vẫn còn hai người trong nhóm vẫn chưa quen biết nhau. Chứng minh rằng, tại bữa tiệc tiếp theo, họ vẫn không được giới thiệu cho nhau.*

Bài tập 8. *Cho* G *là một đồ thị sao cho bậc nhỏ nhất* $\delta \geq 2$. *Chứng minh rằng* G *chứa một chu trình có độ dài ít nhất* $\delta + 1$. *(Nói riêng* G *có một đường đi với độ dài* $\geq \delta$ *cạnh.)*

Bài tập 9. *Cho* $G = (V, E)$ *là một đồ thị (đơn, hữu hạn) liên thông. Gọi* δ *là bậc nhỏ nhất. Chứng minh rằng* G *có một đường đi có độ dài* $\geq \min\{2\delta, |V| - 1\}$.

Bài tập 10. *Hai thành phố bất kì của một quốc gia nọ được kết nối trực tiếp với nhau bởi đúng một trong hai phương tiện: đường bộ hoặc hàng không. Chứng minh rằng có thể đóng tất cả các đường bộ hoặc tất cả các đường bay sao cho bằng phương tiện giao thông còn lại, người ta luôn đi được từ một thành phố bất kì đến một thành phố bất kì khác và không đi qua quá* 2 *thành phố trung gian khác.*

Bài tập 11 (Túi kẹo của thầy Hải). *Thầy Hải mang một túi kẹo gồm m thanh kẹo lạc (giống nhau) đến Câu lạc bộ Toán học. Biết rằng CLB Toán học hôm đó có n bạn học sinh tham dự. Các bạn học sinh có thể ăn kẹo của thầy (dù có làm được bài của thầy hay không) với điều kiện*

1. *Túi kẹo phải được chia đều cho tất cả các bạn học sinh;*
2. *Không có thanh kẹo nào bị bẻ ra quá 2 phần.*

Hỏi với những m, n nào thì các bạn học sinh có thể được ăn kẹo của thầy Hải ?

Bài tập 12 (Bài giảng buồn tẻ.). *Cô giáo Hà Dương phát hiện ra năm bạn học sinh ngủ gật trong bài giảng của mình, hơn nữa, mỗi bạn đó ngủ gật đúng hai lần. Cô Hà Dương còn nhận thấy rằng với hai bạn bất kì, có một thời điểm mà họ cùng ngủ gật. Chứng minh rằng có ít nhất 3 bạn cùng ngủ gật ở một thời điểm nào đó.*

Bài tập 13. *Người ta đặt các viên sỏi vào các ô của một bảng vuông $n \times n$ sao cho:*

1. *Mỗi ô không chứa sỏi bất kì kề (có một cạnh chung) với một ô chứa sỏi;*
2. *Với hai ô chứa sỏi O_1, O_2 bất kì, có một dãy các ô chứa sỏi, bắt đầu từ O_1, kết thúc tại ô O_2 sao cho hai ô liên tiếp trong dãy đều kề nhau.*

Chứng minh rằng có không ít hơn $\frac{n^2-2}{3}$ viên sỏi.

Bài tập 14. *Trong một cuộc họp, một số người là đối thủ của nhau (quan hệ đối thủ là hai chiều). Chứng minh rằng có thể chia nhóm người tại cuộc họp vào hai phòng khác nhau sao cho một người bất kì, ít nhất một nửa số đối thủ của anh ta ngồi ở trong phòng khác.*

Bài tập 15. *Trong một mạng xã hội gồm ít nhất 7 người, mỗi người trao đổi thư từ với đúng 3 người khác trong số đó. Chứng minh rằng có thể phân chia mạng xã hội ra thành hai nhóm khác rỗng sao cho mỗi người trao đổi thư từ với ít nhất hai người trong nhóm mà anh ta nằm trong.*

Bài tập 16. *Trong một hội nghị có 2010 người. Chứng minh rằng có thể tìm được hai người tại hội nghị sao cho họ có một số chẵn (có thể là 0) những người quen chung tại hội nghị.*

Bài tập 17. *Nhà vua một nước nọ quyết định xây dựng n thành phố và $n-1$ con đường liên kết chúng: mỗi con đường nối hai thành phố và không đi qua một thành phố khác và hai con đường bất kì không giao nhau. Nhà vua cũng muốn rằng khoảng cách nhỏ nhất giữa hai thành phố (theo đường bộ) là $1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$. Có thể thực hiện ước muốn của nhà vua không nếu*

1. *$n = 6$;*
2. *$n = 2011$;*

Bài tập 18. *Người ta viết các chữ số $0, 1, \ldots, 9$, mỗi số đúng 10 lần, vào các ô vuông của một bảng 10×10. Chứng minh rằng có thể tìm được một hàng hay một cột chứa ít nhất 4 chữ số phân biệt.*

Bài tập 19. *Tại một miền nọ có 50 khu dân cư và một số con đường đất giữa chúng. Người ta có thể di chuyển từ một khu dân cư tùy ý đến một khu dân cư tùy ý khác bằng các con đường trên. Chứng minh rằng người ta có thể trải nhựa một số con đường sao cho ở mỗi khu dân cư, số con đường nhựa đi ra khỏi đó là một số lẻ.*

2 Đồ thị phẳng

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Một đồ thị sao cho ta có thể biểu diễn các đỉnh bởi các điểm trong mặt phẳng và các cạnh bởi các đường cong đôi một không giao nhau được gọi là một đồ thị phẳng. Khi đó, ta gọi một biểu diễn như vậy là một biểu diễn phẳng của đồ thị.*

Ta có lưu ý quan trọng sau. Một đồ thị có thể được biểu diễn bằng nhiều cách khác nhau. Thế nên không phải vì một biểu diễn nào đó của đồ thị không là phẳng mà ta có thể kết luận được rằng đồ thị không phải là đồ thị phẳng. Một đồ thị là phẳng nếu có **một** biểu diễn phẳng.

Nhận xét 2.2. *Có thể chứng minh được rằng một đồ thị phẳng có một biểu diễn phẳng sao cho tất cả các cạnh là các đoạn thẳng.*

Cho G là một đồ thị phẳng và cho một biểu diễn phẳng của G. Thế thì các cạnh của G phân chia mặt phẳng thành các vùng.

Định nghĩa 2.3. *Một mặt của đồ thị là một vùng cực đại (theo quan hệ bao hàm) không chứa bất kì đỉnh cũng như một phần nào của các cạnh của đồ thị.*

Nói riêng, một biểu diễn phẳng của một đồ thị phẳng chấp nhận ít nhất một mặt không bị chặn, thậm chí có **duy nhất** một mặt không bị chặn.

Mệnh đề 2.4. *Một đồ thị là phẳng nếu và chỉ nếu có thể biểu diễn trên một mặt cầu (sao cho không có hai cạnh nào giao nhau thực sự).*

Chứng minh. Sử dụng phép chiếu cầu với tâm phép chiếu tại Bắc cực: biến mặt phẳng thành mặt cầu. □

Nhận xét 2.5. *Với biểu diễn cầu, mặt không bị chặn của đồ thị phẳng ban đầu trở thành thành phần liên thông (trên mặt cầu) chứa Bắc cực. Tất cả các mặt trở nên bị chặn (và có vai trò như nhau).*

2.2 Công thức Euler

Cho dù một đồ thị phẳng có thể có nhiều biểu diễn phẳng khác nhau, tuy nhiên số mặt của một đồ thị phẳng không phụ thuộc vào biểu diễn. Cụ thể hơn,

Định lý 2.6 (Công thức Euler)**.** *Cho G là một đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, e cạnh. Giả sử f là số mặt của một biểu diễn phẳng của G. Thế thì*

$$n - e + f = 2.$$

Tổng quát hơn, với các giả thiết và kí hiệu trên, nhưng G không giả thiết liên thông nữa. Gọi k là số thành phần liên thông của G thì

$$n - e + f = k + 1.$$

Chứng minh. Trước tiên ta giả sử G liên thông. Để chứng minh công thức của Định lý, ta sẽ kiểm tra công thức cho các cây và chỉ ra rằng đại lượng $n-e+f$ không đổi khi ta thêm vào một cạnh. Điều này được suy ra từ việc mọi đồ thị liên thông được xây dựng tử cây bằng cách mỗi lần cho thêm một cạnh, hơn nữa, nếu một đồ thị phẳng G nhận được từ đồ thị G' bằng cách thêm vào một cạnh thì G' cũng là một đồ thị phẳng.

Ta kiểm tra cho cây. Chú ý rằng với một cây, $n-e=1$. Hơn nữa, với một (biểu diễn phẳng của) cây, chỉ có duy nhất một mặt, đó chính là mặt không bị chặn. Thật vậy, mọi mặt bị chặn sẽ làm xuất hiện các chu trình trên đồ thị. Như vậy, với một cây ta có $f=1$ và công thức được kiểm chứng.

Giả sử công thức ta quan tâm đúng cho một đồ thị phẳng G' với n' đỉnh, e' cạnh và f' mặt và sao cho ta có thể thêm một cạnh vào G' mà đồ thị mới G vẫn còn phẳng. Thế thì G có $n=n'$ đỉnh, $e=e'+1$ cạnh. Mặt khác, cạnh mới thêm vào chia một mặt cũ (của G') thành hai mặt mới (của G), các mặt khác không đổi. Thật vậy, giả thiết G là phẳng chứng tỏ rằng cạnh mới thêm vào không cắt bất kì cạnh nào khác của G', do đó nằm hoàn toàn trong một các mặt của G', ngoài ra, tính liên thông của G' chứng tỏ rằng không một đầu mút nào của cạnh thêm vào là cô lập. Như vậy, G có $f=f'+1$ mặt. Công thức cho G' kéo theo công thức đối với G.

Bây giờ, ta xét trường hợp tổng quát một đồ thị phẳng G với k thành phần liên thông. Bởi vì các thành phần liên thông (theo nghĩa đồ thị) là đôi một rời nhau, ta có thể biểu diễn mỗi thành phần liên thông nằm trong mặt không bị chặn của mỗi thành phần liên thông khác. Ta áp dụng công thức thiết lập ở trên cho từng thành phần liên thông rồi cộng tất cả các đẳng thức lại. Tổng của tất cả các đỉnh cũng như các mặt của mỗi thành phần liên thông lần lượt cho ta tổng số đỉnh, tổng số cạnh của G. Mặt khác, tổng số các mặt của các thành phần liên thông chính bằng số mặt của G cộng với $k-1$ bởi vì mỗi mặt bị chặn được tính đúng một lần, riêng mặt không bị chặn được tính k lần. Như vậy ta có công thức cần tìm.

□

Một đồ thị (đơn) phẳng không thể có quá nhiều cạnh so với số đỉnh. Cụ thể,

Định lý 2.7. *Cho G là một đồ thị (đơn) phẳng với $n \geq 3$ đỉnh và e cạnh. Thế thì,*

$$e \leq 3n-6.$$

Chứng minh. Theo công thức Euler, dù G là liên thông hay không, ta luôn có

$$n+f \geq e+2.$$

Lại do G là đơn,

Mỗi mặt sử dụng ít nhất 3 cạnh. Ngược lại, mỗi cạnh tham gia cho việc hình thành của 2 mặt.

Từ đó suy ra

$$3f \leq 2e.$$

Do đó $n+\frac{2}{3}e \geq e+2$ hay $e \leq 3n-6$. □

Nhận xét 2.8. *1. Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi mỗi mặt của G là một tam giác (hay biên mỗi mặt là một 3-chu trình). Một đồ thị như vậy gọi là một* **tam giác phân**.

2. Nói riêng, mọi đồ thị phẳng trên n đỉnh có ít hơn $3n$ cạnh.

Trong cùng mạch ý tưởng trên và giữ các kí hiệu quen thuộc, ta có

Mệnh đề 2.9. . *Giả sử G là một đồ thị đơn, phẳng và không chứa 3-chu trình. Thế thi*

$$e \leq 2n - 4.$$

Chứng minh. Lặp lại chứng minh của kết quả trên cùng với nhận xét sau đây: nếu G không có 3-chu trình thì mỗi mặt được tạo thành từ ít nhất 4 cạnh và do đó

$$4f \leq 2e.$$

□

Ta lưu ý kết quả quan trọng sau.

Mệnh đề 2.10. *Mọi đồ thị liên thông, phẳng trên một tập hữu hạn đỉnh có một đỉnh bậc ≤ 5.*

Chứng minh. Gọi δ là bậc nhỏ nhất của một đồ thị phẳng $G = (V, E)$. Thế thì, nếu $|V| \geq 3$

$$\delta|V| \leq \sum_{A \in V} \deg(A) = 2|E| \leq 2(3|V| - 6).$$

Do đó $\delta \leq 6 - \frac{12}{|V|}$ và $\delta \leq 5$. Các trường hợp $|V| = 1, 2$ là tầm thường. □

Ta có hai ví dụ quan trọng về đồ thị không phẳng.

Định lý 2.11. *Đồ thị K_5 không phải là phẳng.*

Chứng minh. Áp dụng Mệnh đề 2.7.

□

Định lý 2.12. *Đồ thị $K_{3,3}$ không phải là một đồ thị phẳng.*

Chứng minh. Đồ thị $K_{3,3}$ là một đồ thị có 6 đỉnh và 9 cạnh. Hơn nữa do $K_{3,3}$ là một đồ thị 2 phần nên không có 3 chu trình. Áp dụng Mệnh đề 2.9 ta có điều cần chứng minh. □

Ta vừa thấy rằng công thức Euler và các hệ quả của nó cho ta một số điều kiện cần để một đồ thị là phẳng. Nhưng nó không giúp ta trong việc khẳng định một đồ thị là phẳng. Câu hỏi về tính phẳng của một đồ thị có thể được giải quyết hoàn toàn bằng một số thuật toán. Tuy nhiên, ta sẽ đưa điều kiện mang tính lý thuyết sau đây bởi Kuratowski. Theo những gì ta thiết lập ở trên, các đồ thị $K_{3,3}$ và K_5 không phải là đồ thị phẳng. Từ đây, ta dễ dàng suy ra rằng **các đồ thị chứa một chia nhỏ của đồ thị $K_{3,3}$ hay $K_{5,5}$ không phải là đồ thị phẳng**. Khẳng định đảo cũng đúng, đó chính là nội dung của Định lý Kuratowski.

Định lý 2.13 (Kuratowski)**.** *Một đồ thị là phẳng khi và chỉ khi không chứa một chia nhỏ của $K_{3,3}$ hay K_5.*

Chứng minh. Ta chấp nhận kết quả này. □

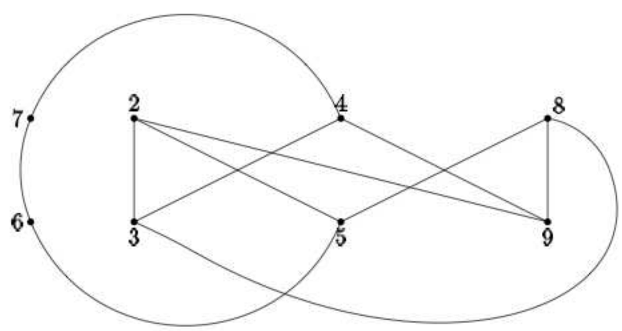
Ví dụ 2.14. *Với n là một số nguyên dương, kí hiệu G_n là đồ thị trên tập $\{1, 2, \dots, n\}$ và hai đỉnh $a \neq b$ được nối với nhau nếu $a + b$ là một số nguyên tố. Xác định các giá trị n sao cho G_n là phẳng.*

Chứng minh. G_n phẳng khi và chỉ khi $n \leq 8$. Bởi vì G_m là đồ thị con của G_n nếu $m \leq n$ nên khẳng định được chứng minh nếu ta chỉ ra

- G_8 là phẳng;
- G_9 không phẳng.

Bạn đọc tự vẽ một biểu diễn phẳng của G_8.

Còn G_9 không phẳng vì chứa một chia nhỏ của $K_{3,3}$ như được chỉ ra tại biểu diễn sau đây.



□

2.3 Các khối đa diện đều

Các đỉnh và các cạnh của một khối đa diện lồi có thể được coi như một đồ thị phẳng (biểu diễn cầu của một đồ thị phẳng). Ta có các quan sát đơn giản sau đây. Gọi n, e, f lần lượt là số đỉnh, số cạnh và số mặt của một đa diện lồi P.

1. Bậc của mỗi đỉnh ≥ 3 (nếu không sẽ không tạo thành *khối*!);
2. $n - e + f = 2$. Nói cách khác **công thức Euler cho đa diện lồi**;
3. Công thức tổng các bậc $2e = \sum_{A;A \text{ là đỉnh của } P} \deg P$ được mở rộng thành
$$\sum_{A;A \text{ là đỉnh của } P} \deg P = 2e = \sum_k k f_k.$$
Trong đó f_k là số các k-mặt của đa diện (các mặt là các k-giác, nói riêng tổng lấy trên các $k \geq 3$). Điều này được suy ra từ sự kiện mỗi cạnh là giao của đúng hai mặt.

Ta có thể định nghĩa một khối đa diện (lồi) đều là một đa diện (lồi) mà mỗi mặt là một đa giác đều kích thước bằng nhau và mỗi đỉnh có bậc như nhau.

Việc phân loại các đa diện đều được biết đến từ lâu bởi Platon.

Định lý 2.15. *Có tất cả* 5 *loại khối đa diện đều.*

Chứng minh. Có thể coi một khối đa diện đều như một đồ thị G phẳng trên n đỉnh, mỗi đỉnh có bậc k, mỗi mặt có biên là một chu trình độ dài l (số cạnh của đa giác đều). Gọi f là số mặt, e là số cạnh. Thế thì ta có các công thức sau.

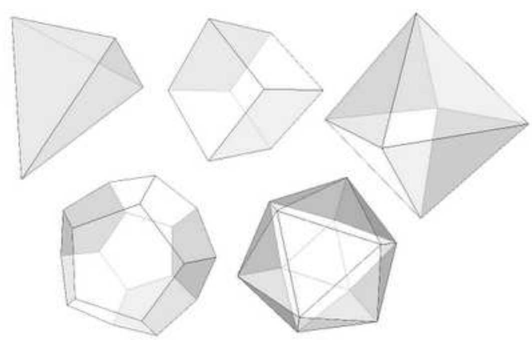
$$kn = 2e = lf.$$

Vậy $n = \frac{2e}{k}, l = \frac{2e}{l}$. Lắp các công thức này vào công thức Euler ta có

$$e\left(\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{l}\right) = 2.$$

Nói riêng $\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{l} > 0$, hay $(k-2)(l-2) < 4$.

Mặt khác chú ý rằng $k \geq 3, l \geq 3$. Kết hợp với bất đẳng thức $(k-2)(l-2) < 4$ ta suy ra $3 \leq k, l \leq 5$. Thử lại ta thấy các bộ thỏa mãn các bất đẳng thức trên là $(k,l) = (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$. Đảo lại, ứng với các giá trị này ta có các đa diện đều: tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối thập nhị diện đều (mười hai mặt) và nhị thập diện (hai mươi mặt) đều.



□

2.4 Bài tập

Bài tập 20. *Xứ Hồ có* 7 *cái hồ. Các hồ được nối với nhau bởi* 10 *kênh đào sao cho một người có thể đi thuyền từ một hồ bất kì đến một hồ bất kì khác. Hỏi Xứ Hồ có cả thảy bao nhiêu đảo ?*

Bài tập 21. *Có* 2012 *điểm nằm bên trong một hình vuông. Một số điểm này Các được nối với nhau cũng như được nối với* 4 *đỉnh của hình vuông sao cho hình vuông được chia thành các tam giác. Có bao nhiêu tam giác được tạo thành ?*

Bài tập 22. *Người ta chia một hình thất giác lồi thành các hình gồm các ngũ giác lồi và các lục giác lồi. Biết rằng mỗi đỉnh của thất giác ban đầu thuộc ít nhất hai đa giác nhỏ hơn. Chứng minh rằng tổng số các ngũ giác và lục giác không ít hơn* 13.

Bài tập 23. *Có* 11 *thành phố được kết nối đôi một bởi hoặc đường ô tô, hoặc đường tàu hỏa (hoạt động theo cả hai chiều). Chứng minh rằng có ít nhất một giao lộ giữa hai đường ô tô hoặc giữa hai đường tàu.*

Bài tập 24. *Tồn tại hay không một đa diện lồi* 2011 *đỉnh,* 4019 *cạnh và không có mặt nào là một tam giác ?*

Bài tập 25. *Chứng minh rằng mọi đa diện lồi không có mặt là tứ giác hay ngũ giác phải có ít nhất* 4 *mặt tam giác.*

Bài tập 26. *Cho một đa diện lồi P với tất cả các mặt là tam giác. Mỗi đỉnh có bậc ≥ 5 (có ít nhất* 5 *cạnh kề), ngoài ra không có hai đỉnh bậc* 5 *nào kề nhau. Chứng minh rằng đa diện P có một mặt với các đỉnh bậc tương ứng là $5, 6$ và* 6.

Bài tập 27. *Xét một đa diện lồi không có hai cạnh song song cũng như không có cạnh nào song song với bất kì mặt nào ngoài hai kề nó. Hai điểm của đa diện được gọi là đối cực nếu tồn tại hai mặt phẳng song song, đi qua hai điểm đó sao cho đa diện đã cho nằm giữa hai mặt phẳng này. Gọi A là số cặp đỉnh đối cực, B số cặp trung điểm các cạnh đối cực. Biểu diễn $A - B$ theo số cạnh, đỉnh và mặt của đa diện.*