

## BẮT BIẾN

Chuyên đề Tổ hợp, 31/03/2012

**Bài 1** Trên bảng viết các số  $1, 2, \dots, 1000$ . Ở mỗi bước cho phép thay một số bằng tổng các chữ số của nó. Quá trình dừng lại khi có toàn các số có một chữ số. Hỏi số số 1 còn lại trên bảng nhiều hơn hay số số 2 còn lại trên bảng nhiều hơn?

**Bài 2** Vào năm 3000, ở Việt Nam, một nhân dân tệ (RMB) đổi được 10 đồng Việt Nam (VND). Trong khi đó, ở Trung Quốc, một VND đổi được 10 RMB. Một du khách người Nhật lúc đầu có 01 VND. Ông này có thể đi lại tùy ý giữa hai nước VN và TQ. Hỏi ông ta có thể làm cho số VND và RMB ông ta có là bằng nhau hay không?

**Bài 3** Bàn cờ  $8 \times 8$  bỏ đi hai ô ở góc đối nhau. Có thể phủ phần còn lại bởi 31 quân domino  $1 \times 2$  không? Nếu bỏ hai ô bất kì thì sao?

**Bài 4** Cho đa thức  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , có thể thực hiện một trong hai phép biến đổi:

a) Đổi chỗ  $a$  và  $c$ .

b) Đổi biến  $x$  bởi  $x + t$  với  $t \in \mathbb{R}$ .

Hỏi từ  $x^2 - 31x - 3$  có thu được  $x^2 - 20x - 12$  không? Tìm mối liên hệ của hai đa thức bậc hai  $P(x)$  và  $Q(x)$  sao cho từ đa thức này có thể thu được đa thức kia bởi hai phép biến đổi nói trên.

**Bài 5** Tô đen 09 ô của hình vuông  $10 \times 10$ . Mỗi lần tô màu đen một ô chưa tô nếu nó kề với ít nhất hai ô đen (kề được hiểu là chung cạnh). Có thể tô màu hết bàn cờ hay không? Nếu là 10 ô thì sao? Nếu là hình vuông  $n \times n$  thì lúc đầu cần tô đen ít nhất bao nhiêu ô để có thể tô đen cả bàn cờ?

**Bài 6** Cho một hoán vị của các số  $1, 2, \dots, 2012$ . Mỗi lần cho đổi chỗ hai số bất kì. Sau 2011 bước có thể quay về hoán vị ban đầu không?

**Bài 7** Trên bảng viết các số  $1, 2, 3, 4, 5$ . Mỗi bước cho phép chọn hai số  $a, b$  và thay bởi  $a + b, ab$ . Hỏi có thu được 21, 27, 64, 180, 540 hay không?

**Bài 8** Trên bảng viết số  $99 \dots 99$  (2012 lần). Mỗi bước cho phép chọn một số  $a$ , phân tích  $a$  thành tích hai số  $m, n$  và viết lên bảng  $m \pm 2, n \pm 2$  tùy ý. Ví dụ:  $a = 15, a = 3 \cdot 5$  có thể viết lên bảng  $1 = 3 - 2$  và  $7 = 5 + 2$ . Hỏi sau một số bước như vậy, có thể thu được trên bảng toàn các số 9 không?

**Bài 9** Một túi gồm 1001 viên đá. Mỗi bước chọn một túi có nhiều hơn 01 viên. Bỏ đi một viên và chia các viên còn lại thành 02 túi. Hỏi có thể làm như vậy để thu được tất cả các túi đều có 03 viên?

**Bài 10** Cho một dãy số các số tự nhiên  $A_i$  thỏa mãn

$$A_1 < 2011, A_i + A_{i+1} = A_{i+2}$$

với mọi  $i$ . Ngoài ra  $A_1 - A_n$  và  $A_2 + A_{n-1}$  chia hết cho 2011. Chứng minh rằng  $n$  là một số lẻ.

**Bài 11** Các ô vuông được xếp kề nhau tạo thành một dải hình chữ nhật vô hạn về cả hai phía. Ta xếp vào các ô vuông một số hữu hạn các viên đá. Mỗi bước, chọn hai viên đá ở cùng ô và chuyển chúng sang hai ô bên cạnh khác hướng nhau.

- Có thể sau một số hữu hạn bước quay lại vị trí ban đầu không?
- Có thể thực hiện vô hạn bước như vậy không?
- Nếu quá trình dừng lại thì trạng thái sắp xếp cuối cùng có phụ thuộc vào quá trình thực hiện các bước không?

**Bài 12** Hình tròn được chia thành 2011 hình dẻ quạt. Xếp 2012 viên kẹo vào các phần dẻ quạt. Mỗi bước, cho phép chuyển hai viên ở cùng một phần sang hai phần kề khác hướng. Chứng minh rằng đến một lúc nào đó có ít nhất 1006 phần có chứa kẹo.

**Bài 12'** Bài chia kẹo, TST 2011.

**Bài 13** Giả thiết và câu hỏi như ở bài 11, chỉ khác cách chuyển viên đá được thực hiện như sau:

- Bỏ một viên ở ô thứ  $n - 1$  và một viên ở ô thứ  $n$ , thêm vào một viên ở ô thứ  $n + 1$ .
- Bỏ hai viên ở ô thứ  $n$  và thêm một viên vào ô thứ  $n - 2$ , một viên vào ô thứ  $n + 1$ .

**Bài 14** Có 119 người ở trong 120 căn hộ. Một căn hộ được gọi là quá tải nếu có nhiều hơn 14 thành viên. Mỗi ngày, các thành viên của một căn hộ quá tải xảy ra mẫu thuẫn và chuyển sang các căn hộ khác nhau. Hỏi quá trình có buộc phải kết thúc không?

**Bài 15** Trên vòng tròn có 20 số. Cho phép chọn 3 số liên tiếp  $X, Y, Z$  và thay bởi  $X + Y, -Y, Z + Y$ . Có thể từ  $[1, 2, \dots, 10, -1, -2, \dots, -10]$  thu được  $[10, 9, \dots, 1, -10, \dots, -1]$  hay không?

**Bài 16** Giả sử tổng của 20 số là dương. Cho phép biến đổi như ở bài 15, liệu có thể thu được một bộ gồm 20 số không âm hay không?

**Bài 17** Trên vòng tròn có một số số tự nhiên. Cho 3 số liên tiếp bất kì  $X, Y, Z$ , nếu  $Y$  chẵn có thể xóa  $Y$  đi và giữ nguyên các số còn lại. Quá trình dừng lại nếu chỉ còn các số lẻ hoặc còn ít hơn 3 số. Chứng minh rằng số các số còn lại không phụ thuộc vào quá trình thực hiện phép toán.

**Bài 18** Trên vòng tròn có một số điểm Xanh, Đỏ. Cho phép thêm vào một điểm Đ và đổi màu hai điểm kề nó, hoặc bớt đi một điểm Đ và đổi màu hai điểm kề nó. Lúc đầu có hai điểm Đ và quá trình ko được phép làm cho có ít hơn hai điểm. Hỏi có thể thu được:

- a) 2 điểm X, Đ.
- b) 8 điểm Đ.
- c) 1 điểm Đ, 6 điểm X.
- d) 2 điểm X.