Phòng Phương trình vi phân

Ngay từ khi thành lập Viện Toán học năm 1970, hướng nghiên cứu Phương pháp toán lý đã được hình thành dưới sự chủ trì của GS Lê Văn Thiêm. Các vấn đề chính được quan tâm như hàm số biến phức, các hệ phương trình đạo hàm riêng trong lớp giải tích suy rộng và các vấn đề ứng dụng vào những lĩnh vực khác nhau của vật lý toán như lý thuyết thấm, cơ học đàn hồi . . . Ban đầu, nhóm nghiên cứu bao gồm các thành viên: Ngô Văn Lược, Hoàng Đình Dung, Nguyễn Văn Gia, Trần Gia Lịch, Lê Văn Thành, . . . Năm 1978 phòng Phương pháp toán lý được thành lập do GS Ngô Văn Lược làm phó phòng, rồi trưởng phòng vào năm 1981.

Cán bộ và nghiên cứu sinh phòng Phương trình vật lý toán (1998)

Từ năm 1981, trong phòng hình thành nhóm nghiên cứu về chuyên ngành phương trình đạo hàm riêng do GS Trần Đức Vân phụ trách gồm các cán bộ nghiên cứu Trần Đức Vân, Hà Tiến Ngoạn, Lê Hữu Diện. Năm 1982 nhóm này tách riêng thành nhóm nghiên cứu độc lập trực thuộc Viện và năm 1983 phòng Phương trình đạo hàm riêng được thành lập do GS Trần Đức Vân lãnh đạo.

Năm 1998 hai phòng Phương pháp toán lý và Phương trình đạo hàm riêng được sáp nhập lại và lấy tên là Phòng Phương trình vật lý toán do PGS Hà Tiến Ngoạn làm trưởng phòng. Năm 2009 phòng được đổi tên thành phòng Phương trình vi phân do GS Đinh Nho Hào làm trưởng phòng. Năm 2011-2013 GS Nguyễn Minh Trí là trưởng phòng và từ tháng 11/2013 GS Đinh Nho Hào lại làm trưởng phòng.

I. Thành phần cán bộ của phòng hiện nay như sau:

1. GS.TSKH Đinh Nho Hào;
2. TS Đào Quang Khải;
3. TS Lương Thái Hưng ;
4. TS Hoàng Thế Tuấn.

Các cán bộ của Phòng tham gia nhiều hoạt động khoa học và đào tạo: tổ chức một số hội thảo quốc tế và trong nước; tham gia giảng dạy đại học và sau đại học trong Viện cũng như nhiều trường đại học trong và ngoài nước; đào tạo nhiều cử nhân, thạc sỹ, tiến sỹ trong và ngoài nước. GS Đinh Nho Hào là phó tổng biên tập của tạp chí Acta Mathematica Vietnamica và là thành viên ban biên tập của 7 tạp chí quốc tế khác: Vietnam Journal of Mathematics, Vietnam Journal of Mathematical Applications, Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications, Applied Numerical Mathematics (ISI), Applicable Analysis, Inverse Problems in Science and Engineering (ISI), Journal of Inverse and Ill-Posed Problems (ISI).

II. Các hướng nghiên cứu chính của phòng

a) Các vấn đề của Vật lý Toán

Ngay từ những ngày đầu dưới sự lãnh đạo trực tiếp của GS Lê Văn Thiêm phòng đã hướng các nghiên cứu của Lý thuyết tựa giải tích, p-giải tích, vectơ chỉnh hình và hàm giải tích suy rộng vào các vấn đề của Cơ học, Vật lý có nhiều ý nghĩa thực tiễn như: bài toán thấm, bài toán chuyển động chất lỏng nhớt, bài toán khuyếch tán và nổ mìn định hướng. Nhiều vấn đề được đưa vào nghiên cứu như phương trình vi tích phân, phương trình cặp, lý thuyết thế vị, lý thuyết toán tử giả vi phân và các ứng dụng của chúng vào các bài toán biên hỗn hợp của các môi trường chất lỏng, chất khí, đàn hồi,... Các cán bộ của phòng đã xây dựng được một phương pháp mới dựa trên nguyên lý thác triển đối xứng của hàm giải tích để tìm nghiệm hiển của bài toán thấm có áp qua môi trường không đồng chất, đề xuất phương pháp tìm nghiệm tường minh dựa trên phương pháp hàm p-giải tích của một loạt các bài toán thấm và bài toán chuyển động của chất lỏng nhớt. Nghiên cứu lý thuyết vectơ chỉnh hình, tìm được công thức biểu diễn nghiệm và tính giải được của bài toán biên đối với vectơ chỉnh hình. Sử dụng phương pháp thặng dư của hàm giải tích và phép biến đổi Fourier đã đưa ra lời giải hiển và nghiên cứu tính chất nghiệm của nhiều bài toán khuyếch tán.

Ngoài các phương pháp chính xác đối với các bài toán biên, nhiều phương pháp xấp xỉ cũng được nghiên cứu như: biểu diễn tổng, sai phân hữu hạn, phần tử hữu hạn, xấp xỉ đa thức hoặc phân thức hữu tỷ. Nhờ đó hàng loạt các bài toán được giải quyết như: bài toán thấm có biên tự do, dòng chảy một chiều hoặc nhiều chiều, khuyếch tán xói lòng sông, chuyển động của sóng va đập, sóng gián đoạn khi vỡ đập. Đặc biệt, việc kết hợp phương pháp sai phân và phương pháp giải tích đã giúp cho việc nghiên cứu một số lớp bài toán biên đối với phương trình loại elliptic, parabolic, các phương trình phi tuyến với dữ kiện không trơn độ cao phù hợp với các bài toán thực tế như: bài toán ô nhiễm môi trường không khí, nước, truyền nhiệt,. . .

Trong khi giải quyết các bài toán ứng dụng, phòng đã hợp tác chặt chẽ với các cơ quan như Viện nghiên cứu Khoa học Thủy Lợi, Đại học Thủy Lợi, Bộ Điện lực, Ban Sông Đà. Dưới đây là một số vấn đề và các hợp đồng nghiên cứu mà Phòng đã góp phần đáng kể trong việc thực hiện:

- Nổ mìn định hướng lấy nguyên liệu đá ở các mỏ Núi Voi (Thái Nguyên), Phủ Lý, Đồng Mỏ. Nổ mìn định hướng để nạo vết kênh Nhà Lê ở Thanh Hóa. Lập bảng bộc phá nổ định hướng cho công binh;

- Tính toán khuyếch tán, xói dòng chảy sau đập thủy điện, tính lan truyền sóng gián đoạn khi vỡ đập;

- Tính toán thấm qua đập đất và bê tông, tính lượng tổn thất nước qua hồ chứa và xác định độ an toàn của đập;

- Tính toán mức độ ô nhiễm nước ở hồ thủy điện Trị An và trên sông Sài Gòn sau đập thủy điện.

Dưới sự chủ trì của GS Lê Văn Thiêm phòng đã biên soạn sách chuyên đề: Một số vấn đề toán học của chuyển động nước thấm, trường Đại học Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh, xuất bản năm 1978.

Nhiều kết quả đạt được trong lý thuyết phương trình tích phân cặp và phương trình chuỗi, phương trình tích phân kỳ dị cũng như các phép biến đổi tích phân và toán tử giả vi phân. Các nghiên cứu lý thuyết này đã được ứng dụng vào các bài toán trong lý thuyết đàn hồi cũng như các bài toán giá trị biên hỗn hợp của vật lý toán.

b) Phương trình cấp vô hạn và toán tử giả vi phân giải tích

Đại đa số các nghiên cứu trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng liên quan tới phương trình cấp hữu hạn. Song, nhiều bài toán trong thực tiễn cũng như trong lý thuyết đưa đến việc nghiên cứu các loại phương trình cấp vô hạn. Đây là loại phương trình mà trong đó chứa đạo hàm mọi cấp của ẩn hàm. Một lớp phương trình rất quan trọng được xét, đó là phương trình elliptic cấp vô hạn. Cùng với phương trình này các phương trình tiến hóa cấp vô hạn loại hyperbolic và parabolic cũng được xét tương ứng.

Để khảo sát các phương trình cấp vô hạn, một vấn đề quan trọng được đặt ra là nghiên cứu các không gian năng lượng Sobolev cấp vô hạn tương ứng. Trong nhiều công trình của Trần Đức Vân và các cộng sự như Hà Huy Bảng, Trịnh Ngọc Minh, Đinh Nho Hào, Nguyễn Sĩ Minh, Nguyễn Sĩ Anh Tuấn đã xây dựng được lý thuyết không gian hàm cấp vô hạn, lý thuyết các bài toán đối với phương trình cấp vô hạn và lý thuyết toán tử giả vi phân với ký hiệu giải tích. Đã đặc trưng được điều kiện cần và đủ để các không gian Sobolev cấp vô hạn là không tầm thường, tức là chứa các hàm số khác không. Các định lý nhúng và định lý về vết của không gian Sobolev cấp vô hạn cũng được mô tả trong nhiều trường hợp. Các nghiên cứu này đặt nền tảng cho việc phát triển lý thuyết các bài toán biên và các bài toán biên hỗn hợp đối với phương trình cấp vô hạn, thậm trí với độ phi tuyến rất cao, đồng thời cũng giúp cho việc nghiên cứu các phương trình giả vi phân trong miền thực và miền phức. Dựa trên các phương pháp quen biết của lý thuyết phương trình vi phân phi tuyến như chính quy hóa, đơn điệu,... đã xây dựng được phương pháp chứng minh các định lý tồn tại và duy nhất nghiệm của các bài toán biên đối với phương trình cấp vô hạn suy biến với hệ số biến đổi bất kỳ. Đã thu được một số kết quả xung quanh các bài toán biên của các phương trình vi phân phi tuyến cấp vô hạn với các hệ số biến đổi như đa thức. Mặt khác, toán tử vi phân tuyến tính cấp vô hạn là biểu diễn địa phương của toán tử giả vi phân với ký hiệu giải tích. Do đó các định lý định tính của bài toán Cauchy và bài toán biên đối với phương trình giả vi phân đã được thiết lập. Trên cơ sở các kết quả định tính trong các không gian Sobolev cấp hữu hạn và các toán tử vi phân cấp vô hạn tác động bất biến trong chúng, đã đưa ra phương pháp xấp xỉ giải các bài toán khác nhau đối với phương trình giả vi phân. Các kết quả chính của hướng nghiên cứu phương trình cấp vô hạn được đúc kết trong sách chuyên khảo của Trần Đức Vân và Đinh Nho Hào: Diferential Operators of Infinite Order with Real Arguments and Their Applications, World Scientific Publ. Co., Inc., River Edge, NJ, 1994, 240pp.

c) Phương trình đạo hàm riêng phi tuyến

Đến nay Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng tuyến tính đã có những bước phát triển cao, thậm chí trong nhiều lĩnh vực các kết quả đã ở dạng khá hoàn thiện. Song lớp phương trình phi tuyến là lớp thường gặp trong các ứng dụng, nhưng các kết quả còn rời rạc, ít được hệ thống. Lớp phương trình phi tuyến cấp một cổ điển đã được nghiên cứu từ gần một trăm năm nay và ngày nay càng xuất hiện nhiều loại mới trong Cơ học, Vật lý, Điều khiển tối ưu, Trò chơi vi phân và các bài toán cực trị.

Để tìm nghiệm trơn của bài toán Cauchy cho phương trình phi tuyến cấp một đã từ lâu người ra đã dùng phương pháp đặc trưng cổ điển, tức là đưa bài toán về việc giải một hệ phương trình vi phân thường. Song nghiệm trơn tìm bằng phương pháp này chỉ tồn tại một cách địa phương, bởi vì khi các đường đặc trưng cắt nhau thì xuất hiện sự gián đoạn của nghiệm và đạo hàm của nó. Để tìm nghiệm toàn cục người ta đã đưa vào xét các lớp nghiệm suy rộng khác nhau như nghiệm Lipschitz, nghiệm nhớt, nghiệm minimax,. . ..

Mỗi loại nghiệm suy rộng có ưu điểm và nhược điểm của nó. Đối với bài toán Cauchy nghiệm cổ điển là duy nhất, song không tồn tại toàn cục, còn nghiệm Lipschitz tồn tại toàn cục, nhưng không duy nhất. Chính vì vậy S. N. Kruzhkov đã đưa ra một vấn đề mở: tìm lớp nghiệm trung gian giữa cổ điển và Lipschitz sao cho đảm bảo tồn tại toàn cục và tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy. Để giải quyết vấn đề này Trần Đức Vân đã đưa ra lớp nghiệm tựa cổ điển, tức là lớp nghiệm khả vi theo x với hầu hết biến thời gian t. Bằng việc phát triển phương pháp đặc trưng cổ điển, trên cơ sở giải tích đa trị, vấn đề mở nêu trên của Kruzhkov đã được giải quyết trong các công trình của Trần Đức Vân và Nguyễn Duy Thái Sơn.

Trước đây nghiệm minimax chỉ được nghiên cứu cho lớp phương trình mà Hamiltonian không phụ thuộc thời gian t. Loại nghiệm này đã được mở rộng cho lớp phương trình mà Hamiltonian của nó có thể phụ thuộc vào thời gian t, đồng thời được giả thiết là đo được theo t. Để nghiên cứu trường hợp mở rộng này hàng loạt các vấn đề kỹ thuật trong chứng minh được đặt ra và được khắc phục với sự trợ giúp của giải tích đa trị. Lớp nghiệm nhớt đã được mở rộng nghiên cứu đối với các lớp phương trình đa thời gian và lớp phương trình trong đó Hamiltonian có thể chứa cả biến độc lập và ẩn hàm. Trong trường hợp này công thức biểu diễn nghiệm có sự thay đổi và mở rộng tương ứng.

Đối với lớp nghiệm Lipschitz các nghiên cứu đều xoay quanh việc mở rộng các công thức cổ điển của Hopf cho các trường hợp dữ kiện Cauchy là cực tiểu của họ các hàm lồi, Hamiltonian là hàm lõm-lồi,. . .

Các kết quả cơ bản trong hướng này đã được nghiên cứu trong các công trình của Trần Đức Vân và các cộng sự Hà Tiến Ngoạn, Nguyễn Duy Thái Sơn, Nguyễn Hoàng, Nguyễn Đắc Liêm, Lê Văn Hạp, Mai Đức Thành và được trình bày, đúc kết trong quyển sách chuyên khảo của Tran Duc Van, Mikio Tsuji and Nguyen Duy Thai Son, The Chracteristic Method and Its Generalizations for First-Order Nonlinear Partial Differntial Equations, Chapman & Hall/ CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 101, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 1999, 256pp.

Nghiên cứu công thức dạng Hopf-Lax-Oleinik cho nghiệm toàn cục Lipschitz và nghiệm nhớt đối với bài toán Cauchy cho phương trình Hamilton-Jacobi với dữ kiện ban đầu lõm-lồi hoặc không lõm, không lồi, cho loại phương trình dạng luật bảo toàn và cho phương trình Hamilton-Jacobi đa thời gian. Các kết quả chính được tổng kết trong quyển sách chuyên khảo: Tran Duc Van, Hopf-Lax-Oleinik-type Formulas for Solutions to First-Order Nonlinear Partial Differential Equations, Vietnam Academy of Science and Technology Publisher, Hanoi 2006.

Phòng Phương trình vi phân (2020)

Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất của các loại nghiệm nhớt của bài toán biên và của bài toán Cauchy đối với các loại phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp hai vô hạn biến trong đó các biến được xét trong một số không gian Hilbert.

Ngoài phương trình phi tuyến cấp một nêu trên, một loại phương trình phi tuyến cấp hai dạng khá đặc biệt được nghiên cứu, đó là phương trình Monge-Ampère hyperbolic với hai biến độc lập. Trên cơ sở giả thiết về sự tồn tại hai tích phân đầu độc lập, bài toán Cauchy cho phương trình trên có thể được giải bằng phương pháp đặc trưng cổ điển của Goursat-Darboux. Song, một kết quả của M. Tsuji và Hà Tiến Ngoạn đã chỉ ra rằng tuyệt đại đa số các phương trình Monge-Ampère của mặt cong với độ cong Gauss âm đều không thỏa mãn giả thiết trên. Do đó một phương pháp mới giải bài toán Cauchy cho phương trình Monge-Ampère hyperbolic đã được đề xuất: bài toán được đưa về giải bài toán Cauchy cho một hệ năm phương trình á tuyến tính cấp một với năm ẩn hàm.

Bài toán Cauchy cho phương trình Monge-Ampère hyperbolic cấp hai với số chiều bất kỳ được nghiên cứu bằng cách đưa về bài toán Cauchy tương ứng cho hệ phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp một dạng chính tắc. Trên cơ sở đó đã đưa ra điều kiện không đặc trưng của bài toán được xét. Với sự trợ giúp của Maple đã chứng minh được tính hyperbolic yếu của hệ phương trình đạo hàm riêng cấp một nói trên khi số chiều nhỏ hơn hoặc bằng năm và chỉ ra rằng tính hyperbolic mạnh chỉ xảy ra trong trường hợp số chiều bằng hai. Tính hyperbolic yếu của hệ phương trình trong trường hợp số chiều lớn hơn năm rất khó kiểm tra, do khối lượng tính toán quá lớn. Trong trường hợp hai chiều đã nghiên cứu tính giải được của bài toán Cauchy cho hệ phương trình hyperbolic yếu và từ đó nhận được các kết quả về tính giải được của bài toán Cauchy cho phương trình Monge-Ampère cổ điển hyperbolic yếu. Tính giải được của bài toán Cauchy cho phương trình Monge-Ampère hyperbolic khi số chiều lớn hơn hai mới chỉ được nghiên cứu trong một số trường hợp đặc biệt.

d) Phương trình elliptic suy biến

Một trong các vấn đề lớn của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng là nghiên cứu độ trơn của nghiệm phụ thuộc vào độ trơn của các dữ kiện đã cho. Ở đây độ trơn của hàm được hiểu là không gian hàm với độ trơn như không gian các hàm khả vi liên tục tới cấp nào đó, không gian Sobolev, không gian các hàm khả vi vô hạn lần, không gian các hàm giải tích, ... mà hàm đó thuộc vào. Các phương trình elliptic với hệ số khả vi vô hạn lần có tính chất là nếu dữ kiện đã cho khả vi vô hạn lần thì nghiệm cũng khả vi vô hạn lần (tính chất này được gọi là tính hypoelliptic). Hà Tiến Ngoạn đã chỉ ra một điều kiện cần cho tính hypoelliptic của phương trình elliptic cấp hai suy biến với dạng đặc trưng đổi dấu. Trong một loạt công trình của Nguyễn Minh Trí một số các điều kiện đủ khác nhau cho tính hypoelliptic của các toán tử nửa tuyến tính suy biến cấp cao, tính hypoelliptic Gevrey đã được chứng minh cho các phương trình nửa tuyến tính Grushin, phương trình nửa tuyến tính Mizohata, phương trình giả vi phân với đặc tính bội, đồng thời xây dựng một số công thức hiển cho nghiệm cơ bản của các toán tử hypoelliptic suy biến. Ngoài ra, Nguyễn Minh Trí chỉ ra rằng, cũng như trong trường hợp elliptic, bài toán biên cho các phương trình elliptic suy biến cũng sinh ra các số mũ tới hạn. Số mũ tới hạn này phụ thuộc vào độ suy biến của toán tử được xét. Những kết quả này đã được một số nhà toán học khác phát triển theo nhiều hướng khác nhau.

e) Phương trình tiến hóa

Gần đây các phương trình không dừng có chứa toán tử elliptic suy biến cũng đã bắt đầu được nghiên cứu. Đã chứng minh được sự tại toàn cục và khảo sát dáng điệu tiệm cận của nghiệm. Chứng minh được sự tồn tại của các tập hút toàn cục. Đã đạt được một số kết quả bước đầu trong nghiên cứu các phương trình tiến hóa xuất hiện trong cơ học như phương trình Navier-Stokes. Đ. Q. Khải và N. M. Trí đã thiết lập được sự tồn tại nghiệm toàn cục trong các không gian Sobolev tới hạn nếu như giả thiết điều kiện ban đầu đủ nhỏ. Mặc dù hiện nay đã có rất nhiều nghiên cứu cho phương trình Navier-Stokes nhưng những câu hỏi mở cơ bản vẫn chưa được trả lời thỏa đáng.

f) Nghiên cứu định tính

Cùng với các cộng sự (Truyen Nguyen, Ovidiu Savin), Lê Quang Nẫm đã nghiên cứu tính trơn tại biên và toàn cục của nghiệm của các phương trình Monge-Ampère, Monge-Ampère tuyến tính hóa và các ứng dụng của chúng trong các phương trình đạo hàm riêng hình học, phi tuyến, bậc bốn. Các phương trình này xuất phát từ những bài toán nền tảng như phương trình mặt cong cực đại affine trong hình học affine và bài toán về sự tồn tại Kahler metric với độ cong hằng số trong hình học phức. Các kết quả đạt được cung cấp các đánh giá tại biên và toàn cục cho lý thuyết phương trình đạo hàm riêng suy biến và kỳ dị, nhưng bất biến dưới tác động của các nhóm affine. Các kết quả này tương tự như các đánh giá kinh điển của Krylov-Safonov, Cordes-Nirenberg, Calderon-Zygmund,. . .Một cách ngắn gọn, các kết quả kinh điển vừa kể trên yêu cầu mỗi trị riêng của ma trận hệ số của phương trình đạo hàm riêng elliptic tuyến tính bậc hai bị chặn trên và dưới bởi hai số thực dương. Trong các công trình của Lê Quang Nẫm và các cộng sự chỉ cần tích các trị riêng của ma trận hệ số bị chặn trên và dưới bởi hai số thực dương.

Trong lĩnh vực Giải tích Hình học (Geometric Analysis), Natasa Sesum và Lê Quang Nẫm nghiên cứu dòng độ cong trung bình (mean curvature flow) và dòng Ricci (Ricci flow). Các kết quả đạt được trong lĩnh vực này bao gồm: tìm ra các điều kiện tối ưu để nới rộng dòng độ cong trung bình và dòng Ricci, phát hiện ra gap theorem for self-shrinkers, và hiểu sâu bản chất của các kỳ dị có thể xảy ra khi dòng độ cong trung bình hoặc dòng Ricci không thể nới rộng được.

Ngoài ra, cùng với các cộng sự (Gilles Francfort, Sylvia Serfaty) Lê Quang Nẫm đã nhận được một số kết quả về giới hạn mặt phân giới ngặt (sharp-interface limits) cho các phương trình Cahn-Hilliard và biến thể không địa phương của nó là phương trình Ohta-Kawasaki, phương trình Ginzburg-Landau và phiếm hàm Mumford-Shah.

g) Bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh

Bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh thường xuyên xuất hiện trong lĩnh vực khác nhau của khoa học, công nghệ, địa vật lý, y học, ... Đây là những bài toán khó, vì tính không ổn định của nghiệm cũng như tính phi tuyến cao, số chiều lớn của bài toán. Các nghiên cứu tập trung vào các bài toán ngược khác nhau cho phương trình dạng parabolic và elliptic cũng như ứng dụng chúng vào trong các vấn đề thực tế. Hài hòa giữa nghiên cứu định tính (lý thuyết giải tích của vấn đề) và định lượng (đưa ra các phương pháp số hữu hiệu để giải bài toán) là một đặc thù của hướng nghiên cứu này. Đã đánh giá được độ lớn của vật ẩn từ các đo đạc trên biên (bài toán ngược EIT). Đã đưa ra các kết quả về tính giải được của bài toán truyền nhiệt ngược, phát triển các phương pháp số hữu hiệu để giải các bài toán này. Nhận được một số kết quả về bài toán xác định hệ số trong phương trình parabolic và elliptic với quan sát trên biên hoặc trên toàn miền, cũng như đưa ra các phương pháp số hữu hiệu và ổn định để giải các bài toán này. Đưa ra các phương pháp hữu hiệu để nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình elliptic, bài toán parabolic ngược thời gian. Đưa ra phương pháp làm trơn tổng quát (mollification method) để giải các bài toán đặt không chỉnh trong không gian Banach. Đây là một phương pháp kiến thiết, nên ngoài việc cho đánh giá ổn định dạng Hölder, nó còn đưa ra phương pháp số rất hữu hiệu để giải các bài toán đặt không chỉnh. Một số kết quả kể trên được tổng kết trong sách chuyên khảo của Đinh Nho Hào “Methods for Inverse Heat Conduction Problems”, Lang, Frankfurt/ Main, Bern, New York, Paris, 1998, 249 p. Ngoài ra, một số kết quả về bài toán tán xạ ngược cũng như các kết quả về bài toán ngược trong lý thuyết truyền nhiệt đã nhận được và ứng dụng vào việc dò mìn sát thương. Phương pháp bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh cũng đã được sử dụng vào các vấn đề sôi động của xử lý ảnh, thị giác máy tính, học máy và lý thuyết dự báo.

Nguyễn Anh Tú đã sử dụng kỹ thuật các đánh giá Carleman để đánh giá định tính nghiệm của phương trình parabolic và elliptic với hệ số Lipschitz, cũng như một số đánh giá cận dưới cho các phương trình này. Ngoài ra còn nhận được một số đánh giá tiên nghiệm cho dòng độ cong trung bình Lagrangian cũng như chứng minh được tính đặt chỉnh cho phương trình mKdV trong các không gian hàm kiểu Sobolev.

(Đinh Nho Hào)