

## **Giáo sư Lê Văn Thiêm** **Viện trưởng đầu tiên của Viện Toán học**

Giáo sư Lê Văn Thiêm thuộc thế hệ những nhà trí thức cách mạng đầu tiên mà cuộc đời và sự nghiệp đều ít nhiều chịu ảnh hưởng trực tiếp của Bác Hồ. Giáo sư là một nhân cách lớn, một nhà khoa học lớn: thẳng thắn, trung thực, giản dị, khiêm tốn; yêu thương tôn trọng đồng nghiệp; nâng đỡ thế hệ trẻ; toàn tâm toàn ý suốt đời phục vụ sự nghiệp khoa học và giáo dục, phục vụ cách mạng. Ông sinh ngày 29-3-1918 tại xã Trung Lễ, huyện Đức Thọ (Hà Tĩnh) trong một gia đình nhà nho yêu nước, hiếu học. Ngay từ khi còn nhỏ Lê Văn Thiêm đã chăm chỉ học hành ở quê nhà và sau đó tiếp tục vào học ở trường Quốc học Quy Nhơn.



*GS Lê Văn Thiêm (1950)*

Năm 1937, do học tập xuất sắc, anh thanh niên Lê Văn Thiêm giành được học bổng đi học đại học ở Pháp, thi đậu vào Trường sư phạm cao cấp

Paris, một trường đại học nổi tiếng vì đã đào tạo nhiều nhà khoa học hàng đầu trong nhiều lĩnh vực. Năm 1943, Lê Văn Thiêm nhận học bổng Humboldt của Đức đến làm luận án tiến sĩ tại Đại học Göttingen. Anh bảo vệ luận án về đề tài diện Riemann dưới sự hướng dẫn của Wittich năm 1945.

Năm 1946, được tin phái đoàn Chính phủ Việt Nam Dân chủ Cộng hòa đến Paris, anh Thiêm đã tự nguyện làm một số việc giúp phái đoàn và tập hợp anh em Việt kiều đi đón Chủ tịch Hồ Chí Minh. Anh Thiêm được đồng chí Phạm Văn Đồng giao nhiệm vụ sang Bỉ liên hệ giao dịch mua vũ khí mang về nước, anh đã giúp việc cho phái đoàn đại diện của Việt Nam tại Pháp, tham gia in bài và viết bài cho tờ báo của liên hiệp Việt kiều. Năm 1948 anh là đại diện Việt Nam đầu tiên dự hội nghị hòa bình thế giới tại Ba Lan. Năm 1949, anh nhận học vị tiến sĩ quốc gia về toán học tại Pháp, và sau đó giảng dạy ở Zurich (Thụy Sĩ). Cuối năm 1949, khi tài năng toán học nở rộ, tiến sĩ Lê Văn Thiêm nghe theo lời kêu gọi của Chủ tịch Hồ Chí Minh trở về đất nước, tham gia công tác ở Sở Giáo dục Nam bộ. Tháng 3-1950 anh được kết nạp vào Đảng, mà người giới thiệu là đồng chí Lê Duẩn. Từ một trí thức yêu nước nông nản, Giáo sư Lê Văn Thiêm đã trở thành một chiến sĩ cộng sản. Giáo sư còn là đại biểu Quốc hội của nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa khóa 2 và khóa 3. Giáo sư Lê Văn Thiêm là tác giả khoảng 20 công trình nghiên cứu khoa học công bố ở trong và ngoài nước, trong đó có hai cuốn sách chuyên khảo. Giáo sư Lê Văn Thiêm đã có những đóng góp to lớn trong khoa học trên cả ba lĩnh vực: nghiên cứu cơ bản, nghiên cứu ứng dụng và triển khai ứng dụng.

- Nghiên cứu cơ bản: Trong luận án tiến sĩ của mình, ông đã giải quyết một trường hợp quan trọng của bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna. Kết quả này gây tiếng vang không chỉ vì bản thân bài toán, mà còn vì Lê Văn Thiêm là người đầu tiên sử dụng phương pháp không gian Teichmüller vào bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna. Hơn 20 năm sau, bài toán đó được Drasin giải quyết trọn vẹn cũng chính bằng phương pháp đó. Trong những bài tổng quan gần đây, tên tuổi Giáo sư Lê Văn Thiêm vẫn luôn được nhắc đến như là người mở đường cho một hướng nghiên cứu quan trọng.

- Nghiên cứu ứng dụng: Giáo sư Lê Văn Thiêm là người đầu tiên giải được tường minh bài toán thẩm qua hai lớp đất bằng phương pháp sử dụng “nguyên lý đối xứng” của giải tích phức. Cho đến trước khi công trình của Giáo sư Lê Văn Thiêm ra đời, khoảng năm 1970, người ta chỉ biết tìm nghiệm gần đúng. Cho đến nay, đây vẫn là phương pháp duy nhất được biết để giải đúng bài toán. Phương pháp này đã được trình bày trong nhiều sách chuyên khảo nổi tiếng của thế giới về lĩnh vực này.

- Triển khai ứng dụng: Ông đã lãnh đạo một nhóm các nhà toán học áp dụng phương pháp nở mình định hướng nhằm phục vụ cho giao thông

thời chiến, phá núi làm kho xăng dầu, lấy đá xây dựng khu gang thép Thái Nguyên, đã cùng cộng sự của mình nghiên cứu xây dựng mô hình toán học và bộ chương trình giải các bài toán dòng chảy, phục vụ việc thiết kế và thi công công trình thủy điện Hòa Bình và quy hoạch đồng bằng sông Cửu Long.

Trong sự nghiệp giáo dục và đào tạo, Giáo sư Lê Văn Thiêm đã có những đóng góp lớn lao. Từ bưng biền Nam bộ, ông được cử ra chiến khu Việt Bắc để thành lập Trường Khoa học cơ bản, rồi làm hiệu trưởng của Trường Khoa học cơ bản và Trường Sư phạm cao cấp (1950-1954), giám đốc Trường Đại học sư phạm khoa học (1954-1956), phó hiệu trưởng Trường Đại học tổng hợp Hà Nội (1956-1970).

Năm 1970, trước yêu cầu mới của sự nghiệp phát triển khoa học, Giáo sư Lê Văn Thiêm nhận nhiệm vụ xây dựng Viện Toán học và làm Viện trưởng đầu tiên của Viện. Thời gian làm việc ở Viện Toán học (1970-1980), ông đã có công rất lớn trong việc xây dựng Viện. Bốn mươi năm qua, Viện Toán học đã trưởng thành vượt bậc. Khi thành lập, Viện chỉ có 15 cán bộ nghiên cứu với 3 phó tiến sĩ, ngày nay đã có 16 giáo sư, 14 phó giáo sư, 18 tiến sĩ khoa học và 37 tiến sĩ (chưa kể các giáo sư, phó giáo sư, tiến sĩ khoa học hay tiến sĩ đã nghỉ hưu hay chuyển đi cơ quan khác)<sup>1</sup>.



*Ảnh chụp GS Lê Văn Thiêm (người đứng thứ hai từ bên trái) năm 1981*

Nhiều cán bộ của Viện trở thành những nhà toán học có tên tuổi trên

1. Tính đến năm 2020 Viện Toán học đã có tổng cộng 31 GS và hơn 30 PGS.

thế giới với những nhóm nghiên cứu được quốc tế thừa nhận. Hàng nghìn công trình toán học được công bố ở các tạp chí hàng đầu thế giới, hàng chục cuốn sách chuyên khảo được các nhà xuất bản có tiếng ấn hành<sup>2</sup>. Đó là kết quả nghiên cứu khoa học của Viện, trong đó có sự đóng góp tích cực của giáo sư Lê Văn Thiêm và các học trò của ông. Noi gương Giáo sư, các cán bộ của Viện đã tích cực tham gia ứng dụng toán học vào đời sống, đã và đang thực hiện nhiều hợp đồng kinh tế và khoa học với hàm lượng toán học cao, góp phần giải quyết những vấn đề của thực tiễn đặt ra. Viện cũng trở thành một trung tâm mạnh về đào tạo đội ngũ cán bộ có trình độ cao. Cho đến nay, 139 nghiên cứu sinh đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ, 14 người bảo vệ thành công luận án tiến sĩ khoa học, nhiều nghiên cứu sinh và học viên cao học đang học tập và nghiên cứu tại Viện<sup>3</sup>. Do những thành tích về nghiên cứu, ứng dụng và đào tạo toán học, Viện đã được nhà nước tặng Huân chương Lao động hạng nhất và Huân chương Độc lập hạng ba<sup>4</sup>; hai cán bộ của Viện, Giáo sư Lê Văn Thiêm và Giáo sư Hoàng Tụy, được nhận giải thưởng Hồ Chí Minh đợt I<sup>5</sup>. Nhiều cán bộ của Viện được nhận các danh hiệu danh dự và giải thưởng quốc gia và quốc tế. Giáo sư Lê Văn Thiêm được tặng các huân chương cao quý của nhà nước: Huân chương Độc lập hạng nhất, Huân chương Lao động hạng nhất, Huân chương Kháng chiến hạng nhì, Huân chương Kháng chiến chống Mỹ cứu nước hạng nhất.

Giáo sư Lê Văn Thiêm còn có đóng góp quan trọng trong việc hợp tác quốc tế giữa các nhà toán học Việt Nam với các nhà toán học thế giới. Ông đã đưa Hội Toán học Việt Nam tham gia Hội Toán học quốc tế với tư cách là một thành viên chính thức, đưa Viện Toán học tham gia Trung tâm toán học Banach tại Ba Lan. Nhờ mối quan hệ tốt và có uy tín khoa học của ông, nhiều nhà toán học có tên tuổi thế giới đã đến Việt Nam và nhiệt tình giúp đỡ cộng tác với các nhà toán học Việt Nam. Tinh thần tận tụy vì sự nghiệp khoa học, giáo dục và đạo đức trong sáng của ông sống mãi trong lòng các thế hệ toán học Việt Nam.

*(Viết đầu năm 2010)*

---

2. Tính đến năm 2020, cán bộ Viện Toán đã có trên 3600 công bố.

3. Tính đến năm 2020 đã có tổng cộng 176 luận án tiến sĩ bảo vệ thành công và 17 luận án TSKH bảo vệ thành công.

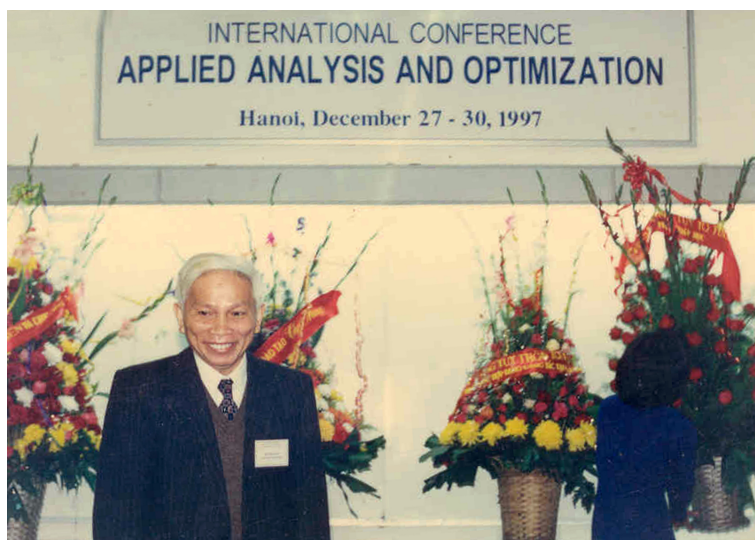
4. Năm 2010 Viện Toán học được tặng Huân chương độc lập Hạng nhì.

5. Năm 2017 nhóm các GS Ngô Việt Trung, Nguyễn Tự Cường, Lê Tuấn Hoa được nhận giải thưởng Hồ Chí Minh về Khoa học và Công nghệ.

## Giáo sư Hoàng Tụy

### 1. Vài nét tiểu sử

GS Hoàng Tụy sinh năm 1927 tại huyện Điện Bàn, tỉnh Quảng Nam. Lúc nhỏ ông học tiểu học ở trường làng, mấy năm đầu học trung học phổ thông ở Huế. Sau đó ông tự học là chính. Từ 1947 đến 1951, ông dạy trung học phổ thông và chuyên khoa ở Quảng Ngãi. Từ 1951 đến 1956, ông dạy Sư phạm Trung cấp Khu học xá Trung ương rồi về Bộ Giáo dục phụ trách việc chuẩn bị cho cải cách giáo dục và công tác biên soạn chương trình và sách giáo khoa cho hệ thống giáo dục phổ thông mới. Từ 1956 ông là cán bộ giảng dạy Đại học Sư phạm và Đại học Tổng hợp Hà Nội. Năm 1957 - 1959 ông thực tập khoa học tại Matxcova. Từ 1959 đến 1970, ông là uỷ viên Ban Toán Lý Hoá, rồi Ban Toán, Uỷ ban Khoa học Nhà Nước. Từ năm 1961 đến 1968 ông làm Chủ nhiệm Khoa Toán Lý, rồi Khoa Toán Cơ, Đại học Tổng hợp Hà Nội. Từ 1968 đến 1970, ông phụ trách Thư ký vụ Ban Toán, Uỷ ban Khoa học Nhà nước, trưởng phòng Toán (tiền thân của Viện Toán học) và cùng với GS Lê Văn Thiêm thành lập Viện Toán học và Hội Toán học Việt Nam. Ông đã làm Phó Chủ tịch Hội đồng khoa học và lãnh đạo phòng Tối ưu cho đến năm 1979. Từ năm 1966 ông đã được mời làm báo cáo mời toàn thể hoặc ở tiểu ban tại nhiều hội nghị quốc tế lớn, đồng thời tham gia Hội đồng biên tập một số tạp chí quốc tế chuyên ngành quan trọng.



GS Hoàng Tụy

Ông là uỷ viên Hội đồng Khoa học Trung tâm Banach từ 1976 đến 1989, uỷ viên Ban Trao đổi và Hợp tác quốc tế, Hội Toán học quốc tế khóa 1978

-1985. Năm 1980, ông được phong học hàm Giáo sư. Từ năm 1980 đến năm 1990, ông làm Viện trưởng Viện Toán học. Ông đã được tặng bằng Tiến sỹ danh dự của ĐH Linkoping (Thụy Điển) năm 1995, và của Học viện Quốc gia Khoa học ứng dụng Rouen (Pháp) năm 2007. Ông là tác giả của trên 170 công trình khoa học được đăng tải trên các tạp chí quốc tế có uy tín, trong đó có 3 quyển sách chuyên khảo do Springer hoặc Kluwer xuất bản và nay đã thành những nguồn tham khảo chính về tối ưu toàn cục. Năm 1996, ông được nhà nước trao tặng giải thưởng Hồ Chí Minh về Khoa học Kỹ thuật. Năm 2011, ông là người đầu tiên được tặng Giải thưởng Caratheodory.

## 2. Thành tựu khoa học

GS Hoàng Tụy đã nghiên cứu trong nhiều lĩnh vực. Nhưng đóng góp lớn nhất của ông, được biết đến nhiều nhất trên quốc tế, có ý nghĩa lâu bền và in dấu đậm nét đối với sự phát triển của ngành toán học tối ưu là các nghiên cứu về Tối ưu toàn cục tất định. Dưới đây là những nét tiêu biểu về các nghiên cứu ấy, chủ yếu về một số lĩnh vực chính liên quan đến Tối ưu.

**Hàm thực:** 5 công trình nghiên cứu về cấu trúc các hàm đo được đăng ở các tạp chí trung ương của Liên Xô những năm 59-60 (Math. Sbornik, Ivestya AN SSSR, DAN SSSR) đã làm rõ cấu trúc đối xứng của mọi hàm đo được ở địa phương hầu khắp nơi. Những kết quả này có mối liên hệ với việc xây dựng các hàm fractal ngày nay đang được chú ý nhờ lý thuyết fractal hiện đại. Đồng thời phong thái hàm thực cũng đã ảnh hưởng rõ đến các nghiên cứu về sau của ông trên các lĩnh vực khác.

**Giải tích lồi:** xuất phát từ mối quan tâm ứng dụng vào Tối ưu, các nghiên cứu của GS Hoàng Tụy xoay quanh ba trục lớn: 1) định lý Hahn-Banach và bất đẳng thức lồi; 2) định lý điểm bất động và bất đẳng thức phi tuyến; 3) minimax. Cụ thể hơn:

- 1972: trong công trình đăng ở *Dissertationes Mathematicae*, đã xác lập sự tương đương giữa nhiều nguyên lý cơ bản khác nhau của Giải tích lồi, đặc biệt đã phát biểu một định lý bất tương thích cho các bất đẳng thức lồi trừu tượng mà về sau R. B. Holmes trong cuốn “*Geometric Functional Analysis and its Applications*”, 1975, đã đặt tên là Tụy Inconsistency Theorem và coi là một nguyên lý rất tổng quát của Giải tích lồi, từ đó dễ dàng suy ra hầu hết các biến thể quan trọng khác của định lý Hahn-Banach. Trước đó, trong các công trình về bất đẳng thức (*Colloquium Mathematicum* 1964) đã đưa ra khái niệm giả lồi (pseudo-convexity), về sau trở thành một khái niệm quen thuộc trong Toán học.

- 1974: Phát biểu định lý minimax tổng quát trong không gian topo, mạnh hơn các định lý của Sion và Wu wen-tsun trước đó. Điều đặc biệt là

chứng minh dựa trên ý tưởng hoàn toàn mới, chỉ dùng lý thuyết tập hợp, và độc lập đối với các dạng nguyên lý tách và nguyên lý bất động mà trước đó các chứng minh truyền thống đều dùng. Trong cuốn “Approaches to the theory of optimization” (Cambridge University Press 1980) J. Ponstein đánh giá chứng minh nói trên là một trong vài chứng minh đẹp đẽ nhất của Giải tích lồi.

- 1975-76: Lý thuyết và phương pháp tính điểm bất động: đề xuất một trong các thuật toán đầu tiên kiểu thứ nguyên thay đổi, đưa ra khái niệm tập nguyên thủy tổng quát sau này đã được ứng dụng trong một số nghiên cứu kinh tế.

**Tối ưu:** Cùng với những cố gắng ứng dụng Vận trù học và Toán kinh tế, các nghiên cứu về Tối ưu và các bài toán cực trị bắt đầu phát triển từ những năm đầu thập kỷ 60. Do hoàn cảnh đất nước lúc bấy giờ, một số công trình về quy hoạch lồi và đồ thị có giá trị, nhưng không được công bố kịp thời trên quốc tế (như thuật toán thu hẹp chính tắc xây dựng năm 62 chính là phương pháp out-of-kilter mà mấy năm sau mới xuất hiện và có thời đã phổ cập ở nước ngoài). Tuy nhiên, vẫn có những công trình vượt qua được thể cô lập ấy để đến với cộng đồng quốc tế và gây tiếng vang:

*A. Công trình mở đường:* Công trình về quy hoạch lồi với ràng buộc tuyến tính đăng trong DAN SSSR 1964 đã đánh dấu sự ra đời của lý thuyết tối ưu toàn cục tất định. Trước đó bài toán này được G. Dantzig cảnh báo như một bài toán “khó tự bản chất” (intrinsically difficult) nên không mấy ai nghĩ tới nghiên cứu. Nhờ đưa ra một số ý tưởng mới, mà đặc biệt là phương pháp cắt độc đáo sau này được gọi là Tuy’s cut, và phương pháp chia nón thời ấy còn mới lạ (vì chưa có phương pháp nhánh cận), nên đã mở ra triển vọng xử lý các khó khăn bản chất của Tối ưu toàn cục. Cả quá trình phát triển về sau của Lý thuyết tối ưu toàn cục cho thấy, bài toán qui hoạch lồi chính là bài toán cơ bản nhất, thường gặp nhất và thực chất nằm bên trong mọi bài toán tối ưu toàn cục khác. Đồng thời các ý tưởng chính và phương pháp mới đề xuất trong công trình đó đã được áp dụng chẳng những trong Tối ưu toàn cục mà cả trong Tối ưu tổ hợp, và sau này đã phát triển thành những khái niệm và phương pháp có tính chất kinh điển. Sau công trình mở đường và nền tảng đó, Lý thuyết tối ưu toàn cục tất định đã phát triển ngày càng mạnh mẽ và hiện đang thu hút một tập thể đông đảo các nhà nghiên cứu trên toàn thế giới. Việt Nam được coi là quê hương của ngành này trước hết là do công trình đó.

*B. Bước phát triển tiếp theo: tối ưu d.c.* Đến giữa thập niên 80 qui hoạch lồi đã trở thành một đề tài được nhiều người nghiên cứu và ứng dụng. Song

các kết quả chưa liên kết thành hệ thống chặt chẽ, và có những vấn đề quan trọng (như sự hội tụ của một số thuật toán cơ bản) chưa được xử lý thỏa đáng do chưa xác lập được đầy đủ căn cứ lý thuyết. Để có thể tiến xa hơn, cần phải xây dựng một khung toán học vững chắc cho các nghiên cứu tối ưu toàn cục bao quát những lớp bài toán rộng hơn quy hoạch lồi. Đó là lý do thúc đẩy sự ra đời Lý thuyết tối ưu d.c. vào khoảng 1985. Dựa trên cấu trúc toán học sinh ra bởi các hiệu hai hàm lồi và hiệu hai tập lồi, Lý thuyết d.c. thu tóm được trong một mô hình thống nhất hầu hết các bài toán tối ưu toàn cục có thể gặp, do đó đề ra các khái niệm, nguyên lý, phương pháp, công cụ thống nhất, giúp cho việc nghiên cứu được thuận lợi hơn và tận dụng hiệu quả hơn các thành tựu tin học hiện đại theo đà phát triển của kỹ thuật tính toán điện tử. Cấu trúc d.c. tỏ ra là một cấu trúc rất thích hợp cho sự nghiên cứu cực trị, và là sự mở rộng tự nhiên của cấu trúc lồi vốn là cấu trúc nền tảng trong các bài toán tối ưu lồi và tối ưu địa phương đã được nghiên cứu kỹ trong nhiều thập kỷ qua, do đó có thể tận dụng triệt để hơn các tính chất của tập lồi và hàm lồi đã biết, đồng thời thấy rõ những gì cần bổ sung vào Giải tích lồi để đáp ứng tốt hơn các yêu cầu tối ưu toàn cục. Hàng loạt các kết quả mới đã thu được về:

1) Giải tích d.c.: các định lý biểu diễn d.c. tổng quát, các tính chất cực trị của hàm d.c., điều kiện tối ưu tổng quát, phân loại chuẩn tắc các bài toán tối ưu toàn cục dựa trên cấu trúc d.c., v.v. ;

2) Tiêu chuẩn hoá các phương pháp và thuật toán tổng quát (phương pháp cắt và xấp xỉ ngoài, xấp xỉ trong, nhánh cận, phân rã). Đặc biệt, cách phân nhánh và chia nhỏ không gian (lý thuyết về các phép chia vét kiệt, nửa vét kiệt, các phép chia chuẩn tắc); các điều kiện hội tụ (trong phép xấp xỉ ngoài, phương pháp nhánh cận, sự tương thích của phép tính cận với phép chia), lý thuyết về các bài toán thấp hạng;

3) Các phương pháp và thuật toán giải các lớp bài toán d.c. thường gặp trong các ứng dụng (các bài toán tối ưu trên mạng, các bài toán định vị, các bài toán về điều khiển ổn định, quy hoạch toàn phương và bất đẳng thức ma trận);

4) Độ phức tạp các bài toán tối ưu toàn cục (nổi bật là kết quả về độ phức tạp đa thức của các bài toán về luồng trên mạng với số yếu tố phi tuyến cố định trước).

Các đóng góp cơ bản đó đã đem lại trật tự, tầm nhìn và quan điểm nhất quán, cung cấp các công cụ nghiên cứu có hiệu lực, đồng thời xác lập các vấn đề và các hướng nghiên cứu chính cho toàn bộ lý thuyết tối ưu toàn cục tất định suốt nhiều năm qua, đặt nó trong mối quan hệ khăng khít với các lý



thuyết tối ưu toán học đã có. Với trên một trăm công trình và ba chuyên khảo trình bày chi tiết các thành tựu đó, với hàng chục báo cáo mời và báo cáo toàn thể ở các hội nghị quốc tế lớn, với vai trò tham gia sáng lập, biên tập, và cố vấn biên tập tạp chí JOGO (Journal of Global Optimization) và một số tạp chí quốc tế khác về tối ưu (Mathematical Programming, Optimization, Forum of Nonlinear Analysis), GS Hoàng Tuy thực sự đã được cộng đồng quốc tế coi là người dẫn đầu (leader) lĩnh vực tối ưu toàn cục, như lời tựa của số báo JOGO dành riêng để tặng ông nhân dịp ngày sinh thứ 70. Ba chuyên khảo đã xuất bản là:

1) R. Horst & H. Tuy: “Global Optimization - deterministic approaches” Springer 1990, tái bản 1993 và 1996, cho đến nay vẫn là sách dẫn chiếu kinh điển về lĩnh vực tối ưu toàn cục tất định.

2) H. Konno, P.T. Thach & H. Tuy: “Optimization on Low Rank Nonconvex Structures”, Kluwer 1997, chuyên khảo về lý thuyết các bài toán phi tuyến bậc thấp là lớp bài toán thường gặp và có cấu trúc dễ khai thác.

3) H. Tuy: “Convex Analysis and Global Optimization”, Kluwer 1998, phát triển giáo trình Tiến Sĩ đã giảng ở Áo, Thụy Điển, và Canada.

*C. Từ năm 2000: Tối ưu đơn điệu.* Mặc dù vẻ đẹp của Lý thuyết tối ưu d.c. nó có những hạn chế vì chỉ tập trung khai thác tính chất lồi hoặc lồi đảo. Trong thực tế có nhiều hàm chỉ đơn điệu mà không rõ rệt lồi, lõm hay d.c. Tính chất đơn điệu lại rất phổ biến, có thể còn thường gặp hơn tính chất d.c. Vì vậy đã ra đời Lý thuyết tối ưu đơn điệu mà nội dung đã được báo cáo ở nhiều hội thảo, xêmina quốc tế và được trình bày trong một loạt công trình đã công bố trên các tạp chí Vietnam Journal of Math., SIOPT, JOGO, Optimization, và kỷ yếu một số hội nghị. Cũng như cấu trúc d.c., cấu trúc đơn điệu (nói đúng hơn là cấu trúc sinh bởi các hiệu các hàm đơn điệu) tiềm ẩn trong hầu hết các bài toán tối ưu toàn cục, và có một số tính chất có thể khai thác để xây dựng những thuật toán hữu hiệu. Đồng thời phương pháp mới có ưu điểm là dễ thực hiện tính toán hơn, và các thử nghiệm trên nhiều bài toán khó cho thấy khả năng vượt trội của nó so với các phương pháp khác hiện biết.

Trong giai đoạn này, GS Hoàng Tuy khởi xướng một số hướng nghiên cứu lớn có ý nghĩa lý thuyết và thực tiễn của tối ưu toàn cục: 1) phương pháp phân rã để tiếp cận những bài toán cỡ lớn; 2) vấn đề ổn định tính toán (robustness) trong các phương pháp giải tối ưu toàn cục với ràng buộc không lồi; 3) sử dụng các thành tựu hiện đại về quy hoạch lồi, đặc biệt là các thuật toán giải các bài toán quy hoạch toàn phương nửa xác định (SDP) để tăng hiệu quả các tính toán tối ưu toàn cục; 4) tối ưu đơn điệu rời rạc.

**Vận trù học, lý thuyết hệ thống và các ứng dụng:** Bên cạnh các thành tựu lý thuyết và thuật toán, cũng đã có nhiều nghiên cứu vận dụng vận trù học, lý thuyết hệ thống vào các vấn đề thực tế trong quản lý kinh tế xã hội. Song do nhiều nguyên nhân, những cố gắng này chưa mang lại những kết quả mong đợi, mặc dù ta đã có một số cán bộ có trình độ hiểu biết tốt về các lĩnh vực này và cũng đã có thời gian các khoa học này đã được áp dụng khá thành công ngay trong nước.

Ngoài các sách chuyên khảo do các nhà xuất bản quốc tế in và đã kể trên, GS Hoàng Tụy cũng là tác giả một số sách, bài báo, tiếng Việt. Trong số đó có “Lý thuyết quy hoạch tuyến tính” 1967, “Giải tích hiện đại” (1965, in lại lần thứ ba, 1979), "Hàm thực và Giải tích hàm" (hiệu đính và bổ sung từ cuốn "Giải tích hiện đại", in hai lần vào các năm 2003 và 2005), và “Phân tích hệ thống và ứng dụng” 1987. Những sách này cũng đã đóng góp nhiều vào việc nghiên cứu và đào tạo trong nước. Trong những năm cuối cùng, GS Hoàng Tụy chủ yếu dành nhiều thời gian để hoàn thành quyển chuyên khảo "Convex Analysis and Global Optimization" do nhà xuất bản Springer ấn hành. Giáo sư Hoàng Tụy đã ra đi, nhưng những đóng góp to lớn của Giáo sư sẽ còn mãi mãi đồng hành với các thế hệ sau của cộng đồng toán học.

*(Viết năm 2010 và bổ sung 2015, 2020)*