Một định lý đối ngẫu

J-P.Serre

Tóm tắt nội dung

Cho X là một đa tạp giải tích phức, với chiều phức n, và V là một phân thớ vector giải tích có hạng r với cơ sở X. Bó $S(V)$ của mầm các lát cắt chỉnh hình trên V là một bó giải tích nhất quán trên X, và các nhóm đối đồng điều $H^q(X, S(V))$ đóng vai trò quan trọng trong rất nhiều bài toán; cụ thể nếu X là một đa tạp đại số xạ ảnh, V là phân thớ ứng với lớp D các ước của X (trong trường hợp này $r = 1$), chiều của các không gian vector $H^q(X, S(V))$ trùng với các dạng "siêu trù phú" (superabondances) liên quan tới định lý Riemann-Roch tổng quát (xem ở trên các Ghi chú xuất bản năm 1953 và 1954 tại Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. bởi K.Kodaira, D.C.Spencer và F.Hirzebruch).

Mặt khác ta biết rằng các lớp ước D và $K - D$ (K là lớp chuẩn tắc) đóng vai trò đối ngẫu trong định lý Riemann-Roch. Ở đây chúng tôi làm rõ kết quả này và mở rộng nó cho trường hợp một phân thớ V bất kỳ, bằng cách chứng minh, dưới các giả thiết khá tổng quát, rằng các không gian vector $H^q(X, S(V))$ và $H_*^{n-q}(X, S(\tilde{V}))$ đối ngẫu với nhau, trong đó $\tilde{V}$ chỉ một phân thớ mà xây dựng của nó tổng quát hóa cho $K - D$. Trường hợp đặc biệt của định lý này đã được chứng minh bởi H.Cartan và L.Schwartz ([10], định lý 4), và trường hợp tổng quát chỉ là một mở rộng đơn giản từ kết quả của họ.

1 Mở đầu

1.1 Tích tensor của hai bó module

Cho X là một không gian topo, và $A = \cup_{x \in X} A_x$ là bó vành trên X (với các định nghĩa về bó, chúng tôi dẫn [2] và [4]); ta giả thiết các A_x giao hoán và sở hữu một phần tử đơn vị biến thiên liên tục với x. Ta nói rằng M là một bó A-module nếu, với mọi $x \in X$, M_x được trang bị một cấu trúc module đơn vị trên A_x sao cho ánh xạ $(a, m) \mapsto a.m$, định nghĩa trên tập G các cặp (a, m), trong đó $a \in A_x$ và $m \in M_x$ với $x \in X$, là một ánh xạ liên tục từ $G \subset A \times M$ vào M.

Cho M và N là hai bó A-module. Nếu U là một tập mở của X, gọi A_U, M_U, N_U là nhóm các lát cắt của A, M, N trên U. Rõ ràng A_U là một vành giao hoán đơn vị, và M_U, N_U là các module đơn vị trên A_U. Đặt $P_U = M_U \otimes N_U$, trong đó tích tensor được lấy trên A_U; nếu $V \subset U$, ta có các đồng cấu chuẩn tắc sau :

$$A_U \longrightarrow A_V, \quad M_U \longrightarrow M_V, \quad N_U \longrightarrow N_V$$

; chúng định nghĩa, sau khi chuyển qua tích tensor, một đồng cấu từ P_U vào P_V. Tập hợp các module P_U và các đồng cấu $P_U \longrightarrow P_V$ định nghĩa một bó P (xem [2], XIV-3); và module điểm P_x là giới hạn nội xạ (với $x \in U$) của các module P_U. Vì ta có :

$$A_x = \lim_{x \in U} A_U, \quad M_x = \lim_{x \in U} M_U, \quad N_x = \lim_{x \in U} N_U$$

nên[1] P_x đẳng cấu với $M_x \otimes N_x$, với tích tensor trên A_x. Vì lý do này, bó P được gọi là tích tensor của các bó M và N và ta ký hiệu $M \otimes N$. Do A là giao hoán, nó là một A-module; khi A là bó hằng, ta thu lại được định nghĩa trong [2], XIV-10.

Các tính chất của $M \otimes_A N$ hoàn toàn tương tự với tính chất của tích tensor module :

1. Nếu M' và N' là hai bó A-module, φ (tương ứng ψ) là đồng cấu A-tuyến tính từ M vào M' (tương ứng từ N vào N'), tích tensor $\varphi \otimes \psi$ là đồng cấu từ $M \otimes_A N$ vào $M' \otimes_A N'$.

2. Mọi dãy khớp đồng cấu A-tuyến tính

$$N \longrightarrow N' \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

cảm sinh dãy khớp

$$M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N' \longrightarrow M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

3. Ta có các đẳng cấu chuẩn tắc:

$$(M \otimes_A N) \otimes_A Q \cong M \otimes_A (N \otimes_A Q), \quad M \otimes_A N \cong N \otimes_A M, \quad M \otimes_A A \cong M, \quad \text{v.v.}$$

Nếu X là một đa tạp giải tích phức, và nếu ta lấy A là bó $\mathcal{O}$ của mầm các hàm chỉnh hình trên X, thì định nghĩa bó $\mathcal{O}$-module trùng với định nghĩa của bó giải tích, được định nghĩa trong [4], n^0 5. Ngoài ra các tính chất 2 và 3 dẫn tới hệ quả trực tiếp rằng tích tensor của hai bó giải tích nhất quán là một bó giải tích nhất quán.

Cuối cùng,lưu ý rằng ta có thể định nghĩa một cách tương tự các bó $\mathrm{Tor}_p^A(M, N) = \cup_x \mathrm{Tor}_p^{A_x}(M_x, N_x)$ với mọi $p \geqslant 0$ (với định nghĩa của Tor, xem trong [5], ch. VI, §1). Tuy nhiên, định nghĩa của $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ tinh tế hơn, và không thể thực hiện nếu không có các điều kiện chặt hơn trên M. Ta sẽ không đi sâu vào vấn đề này, vì ở phần tiếp theo ta chỉ sử dụng tích tensor.

1.2 Đối đồng điều của một không gian với hệ số trong bó

(Trong mục này, ta sẽ giả thiết X là paracompact)

Cho Φ là một họ các tập con của X thỏa mãn các điều kiện sau :

1.2.1. Mọi tập trong Φ là tập đóng.

1.2.2. Mọi tập con đóng của một tập trong Φ đều thuộc Φ.

1.2.3. Mọi hợp hữu hạn của các tập trong Φ đều thuộc Φ.

[1] Do tích tensor giao hoán với giới hạn nội xạ

1.2.4. Mọi tập trong Φ đều chứa một lân cận thuộc Φ.

Nếu F là một bó trên X, khi đó ta định nghĩa được (xem [2]) các nhóm đối đồng điều của X với hệ số trong F và có giá trong Φ, ký hiệu $H^q_\Phi(X,F)$, $q = 0,1,....$ Ta nhắc lại các tính chất của chúng :

1.2.5. $H^0_\Phi(X,F)$ là nhóm các lát cắt của F với giá trong Φ.

1.2.6. $H^q_\Phi(X,F) = 0$ với $q > 0$ nếu F là bó mềm.

1.2.7. Mọi dãy khớp bó $0 \to A \to B \to C \to 0$ cảm sinh một dãy khớp đối đồng điều :

$$\dots H^q_\Phi(A,F) \to H^q_\Phi(B,F) \to H^q_\Phi(C,F) \to H^{q+1}_\Phi(A,F) \to \dots$$

Từ các tính chất trên ta dễ dàng suy ra (xem [2], XVI, XIX hoặc [10], n^0 2) :

1.2.8. Cho $0 \to F \to C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} \dots$ là một dãy khớp bó, và giả thiết rằng tất cả các $H^p_\Phi(X,C^q)$ đều bằng 0 với mọi $p > 0$ (để ý điều này đúng trong trường hợp các bó C^q là mềm). Dưới các điều kiện này, tổng trực tiếp $\bigoplus_{q\geqslant 0} H^0_\Phi(X,C^q)$, cùng với toán tử đối biên δ, là một phức được chia cấp(gradué) trong đó nhóm đối đồng điều cấp q đẳng cấu với $H^q_\Phi(X,F)$.

Khi Φ là họ tất cả các tập con đóng (tương ứng, compact) của X, ta ký hiệu $H^q(X,F)$ (tương ứng, $H^q_*(X,F)$) thay cho $H^q_\Phi(X,F)$. Hai họ tập này, quan trọng nhất trong ứng dụng, sẽ là hai họ duy nhất được xét đến trong phần 3 và 4.

2 Tổng quát hóa một định lý của Dolbeault

Ta giả thiết bắt đầu từ đây rằng X là một đa tạp giải tích phức, đếm được tới vô cùng (nên paracompact), và có chiều phức n.

2.1 Bó các dạng vi phân trên X

Ta sẽ xét các bó sau trên đa tạp X :

$\mathcal{O}$: bó các mầm hàm chỉnh hình.

Ω^p : bó mầm các dạng vi phân chỉnh hình cấp p.

$\mathcal{A}^{p,q}$: bó mầm các dạng vi phân dạng (p,q) với hệ số các hàm khả vi vô cùng.

$\mathcal{K}^{p,q}$: bó mầm các dạng vi phân dạng (p,q) với hệ số là hàm suy rộng.[2]

Tất cả các bó trên đều là bó $\mathcal{O}$-module, một cách hiển nhiên. Ta có $\Omega^0 = \mathcal{O}$, $\Omega^p \subset \mathcal{A}^{p,0}$, $\mathcal{A}^{p,q} \subset \mathcal{K}^{p,q}$. Các lát cắt của $\mathcal{K}^{p,q}$ là các *dòng* cấp (p,q), xem [8].

Ta biết rằng, nếu ω là một dạng cấp (p,q), $d\omega$ là tổng của một dạng với cấp $(p+1,q)$ và một dạng có cấp $(p,q+1)$ mà ta ký hiệu tương ứng là $\partial\omega$ và $\overline{\partial}\omega$; toán tử $\overline{\partial}$ định nghĩa một đồng cấu từ $\mathcal{A}^{p,q}$ vào $\mathcal{A}^{p+1,q}$, và từ $\mathcal{K}^{p,q}$ vào $\mathcal{K}^{p+1,q}$. Quan sát thấy rằng các đồng cấu này đều $\mathcal{O}$-tuyến tính vì $\overline{\partial} f = 0$ nếu f là một hàm chỉnh hình.

[2]Trên một đa tạp định hướng với chiều thực m, ta gọi "hàm suy rộng" là một dòng bậc 0, tức là một phần tử của đối ngẫu không gian các dạng vi phân có giá compact với bậc m (xem [8]). Định nghĩa này là cần thiết nếu ta muốn một hàm là một hàm suy rộng nói riêng.

Nếu ω là một dạng vi phân với hệ số hàm trơn dạng $(p, 0)$, điều kiện $\overline{\partial}\omega = 0$ hiển nhiên tương đương với điều kiện ω là chỉnh hình; ta có kết quả tương tự với các dòng, như một hệ quả trong [9], Ch.VI, §§6-7 chẳng hạn. Mặt khác, theo một kết quả của Grothendieck (trích dẫn trong [7]), mọi dạng ω, với hệ số hàm trơn hoặc hàm suy rộng, cấp (p, q) với $q \geqslant 1$, sao cho $\overline{\partial}\omega = 0$, đều bằng $\overline{\partial}\alpha$ trong một lân cận, với α có cấp $(p, q-1)$. Nói cách khác (xem [7]):

Mệnh đề 1. *Các dãy đồng cấu bó :*

$$0 \to \Omega^p \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots \to \mathcal{A}^{p,n} \to 0$$

và

$$0 \to \Omega^p \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{K}^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{K}^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots \to \mathcal{K}^{p,n} \to 0$$

là các dãy khớp

2.2 Phân thớ vector giải tích

Cho P là phân thớ chính giải tích, với cơ sở X, và nhóm cấu trúc G là nhóm tuyến tính phức $\mathbf{GL}_r(\mathbb{C})$. Ta lấy thớ dạng F là không gian $\mathbb{C}^r$ trên đó tác động của G là hiển nhiên, và cho $V = P \times_G F$ là phân thớ ứng với P với thớ có dạng F (nhắc lại rằng V là không gian thương của $P \times F$ với quan hệ tương đương $(p.g, f) = (p, g.f)$ với $p \in P, g \in G, f \in F$). Vì tác động của G bảo toàn cấu trúc vector của $\mathbb{C}^r$, mỗi thớ V_x của V $(x \in X)$ được trang bị một cấu trúc không gian vector phức có chiều r. Một không gian phân thớ V như thế được gọi là phân thớ vector phức với thớ vector. Nó đẳng cấu địa phương với $X \times \mathbb{C}^r$, với phép chuyển bản đồ được biểu diễn bởi các ma trận chỉnh hình nghịch đảo bậc r.

Nếu $s(x)$ là một lát cắt chỉnh hình của V trên tập mở U của X, và nếu $f(x)$ là hàm chỉnh hình trên U, hàm $f(x).s(x)$ là một lát cắt chỉnh hình của V trên U; ngoài ra,tổng hai lát cắt chỉnh hình là một lát cắt chỉnh hình. Từ đó suy ra bó $S(V)$ của mầm các lát cắt chỉnh hình của V được trang bị một cấu trúc bó giải tích; vì V đẳng cấu địa phương với $X \times \mathbb{C}^r$, bó này đẳng cấu địa phương với $\mathcal{O}^r$ và là một bó giải tích nhất quán nói riêng.

Ngược lại, cho $\mathcal{F}$ là một bó giải tích đẳng cấu địa phương với $\mathcal{O}^r$. Tồn tại một phủ mở $\{U_\alpha\}$ của X và, với mọi α, một đẳng cấu φ_α từ $\mathcal{O}^r$ vào giới hạn của $\mathcal{F}$ vào U_α; $\varphi^{-\beta} \circ \varphi^\alpha$ là tự đẳng cấu của $\mathcal{O}^r$ trên $U_\alpha \cap U_\beta$, nên được định nghĩa bởi một ma trận nghịch đảo $M^{\alpha\beta}$ trên $U_\alpha \cap U_\beta$; các $M^{\alpha,\beta}$ định nghĩa một phân thớ vector V sao cho $S(V)$ đẳng cấu với $\mathcal{F}$, và ta dễ dàng thấy tính chất này đặc trưng cho V, chính xác tới đẳng cấu.

Vì thế tồn tại một song ánh giữa bó giải tích tự do địa phương với hạng r (nói cách khác, đẳng cấu địa phương với $\mathcal{O}^r$) và phân thớ vector giải tích có hạng r [3].

2.3 Dạng vi phân với hệ số trong phân thớ vector giải tích

Cho V là một phan thớ vector giải tích trên X. Ta sẽ gắn cho V các bó sau :

$$\Omega^p(V) = S(V) \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p, \;\; \mathcal{A}^{p.q}(V) = S(V) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{p.q}, \;\; \mathcal{K}^{p.q}(V) = S(V) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}^{p.q}$$

[3]Dĩ nhiên, một kết quả tương tự đúng cho phân thớ topo (trơn, giải tích thực, đại số, ...) với thớ vector.

Ta có $\Omega^0(v) = S(V)$, $\Omega^p(V) \subset \mathcal{A}^{p.0}(V)$, $\mathcal{A}^{p,q}(V) \subset \mathcal{K}^{p.q}(V)$. Một lát cắt của $\mathcal{A}^{p.q}$ được gọi là một dạng vi phân cấp $(p.q)$ với hệ số trong V; vì $S(V)$ đẳng cấu địa phương với $\mathcal{O}^r$, một dạng vi phân như thế có thể được đồng nhất địa phương với một hệ r dạng vi phân cấp $(p.q)$, theo nghĩa thông thường.

Vì $\overline{\partial}$ là một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính từ $\mathcal{A}^{p.q}$ vào $\mathcal{A}^{p.q+1}$, ta có thể định nghĩa đồng cấu

$$1 \otimes \overline{\partial} : S(V) \otimes \mathcal{A}^{p.q} \to S(V) \otimes \mathcal{A}^{p.q+1}$$

và như thế ta thu được một đồng cấu từ $\mathcal{A}^{p.q(V)}$ vào $\mathcal{A}^{p.q+1}(V)$, mà ta vẫn ký hiệu là $\overline{\partial}$. Định nghĩa tương tự cho $\mathcal{K}^{p.q}(V)$.

Mệnh đề 2. *Các dãy đồng cấu bó :*

$$0 \to \Omega^p(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,0}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots \to \mathcal{A}^{p,n}(V) \to 0$$

và

$$0 \to \Omega^p(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{K}^{p,0}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{K}^{p,1}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots \to \mathcal{K}^{p,n}(V) \to 0$$

là các dãy khớp

Mệnh đề 3. *Các bó $\mathcal{A}^{p.q}(V)$ và $\mathcal{K}^{p.q}(V)$ là các bó mềm.*

Thật vậy, nếu g là một hàm trơn trên X, ánh xạ $\omega \to g.\omega$ là một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính từ $\mathcal{A}^{p.q}$ vào chính nó, nên định nghĩa một đồng cấu từ $\mathcal{A}^{p.q}(V)$ vào chính nó; bằng cách xét một phân hoạch đơn vị $\{g_\alpha\}$, ta thấy $\mathcal{A}^{p.q}(V)$ là bó mềm; ta có điều tương tự với $\mathcal{K}^{p.q}(V)$.

2.4 Nhóm đối đồng điều của X với hệ số trong $\Omega^p(V)$

Đặt $\mathcal{A}^{p,q}_\Phi(V) = H^0_\Phi(X, \mathcal{A}^{p.q}(V))$, không gian các dạng vi phân cấp $(p.q)$, với hệ số trong V, và có giá trong họ Φ thỏa mãn các điều kiện 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4. .Toán tử vi phân $\overline{\partial}$ đưa $\mathcal{A}^{p.q}(V)$ vào $\mathcal{A}^{p.q+1}(V)$ và ta có $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$. Ta đặt $\mathcal{A}_\Phi(V) = \bigoplus_{p.q} \mathcal{A}^{p.q}_\Phi(V)$; được trang bị toán tử $\overline{\partial}$, $\mathcal{A}_\Phi(V)$ là một phức chia cấp đôi, mà ta gọi nhóm đối đồng điều song cấp (p,q) là $H^{p.q}(\mathcal{A}_\Phi(V))$. Nếu Φ là họ tất cả các tập con đóng (tương ứng compact) của X, ta sẽ viết $\mathcal{A}^{p.q}(V)$ và $\mathcal{A}(V)$ (tương ứng $\mathcal{A}^{p.q}_*(V)$ và $\mathcal{A}_*(V)$) thay cho $\mathcal{A}^{p.q}_\Phi(V)$ và $\mathcal{A}_\Phi(V)$.

Ta định nghĩa tương tự $\mathcal{K}^{p.q}_\Phi(V)$ và $\mathcal{K}_\Phi(V) = \bigoplus_{p.q} \mathcal{K}^{p.q}_\Phi(V)$.

Áp dụng 1.2.8 cho dãy khớp của mệnh đề 2 (điều này hợp lệ nhờ mệnh đề 3), ta thu được định lý sau, mở rộng của mệnh đề trong [7]. :

Định lý 4. *Cho X là một đa tạp giải tích phức đếm được ở vô cùng, V là phân thớ vector với cơ sở X và Φ là họ các tập con của X thỏa mãn các điều kiện 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 . Nhóm $H^q(X, \Omega^p(V))$ đẳng cấu với $H^{p.q}(\mathcal{A}_\Phi(V))$ cũng như $H^{p.q}(\mathcal{K}_\Phi(V))$.*

(Ngoài ra, ba nhóm trên được trang bị cấu trúc không gian vector phức, và các đẳng cấu trong định lý bảo toàn các cấu trúc này)

Hệ quả 5. *Nhóm $H^q_\Phi(X, S(V))$ đẳng cấu với $H^{0.q}(\mathcal{A}_\Phi(V))$ cũng như $H^{0.q}(\mathcal{K}_\Phi(V))$*

Ngược lại, hệ quả 5 cho phép ta thu lại được định lý 4; vì bó $\Omega^p(V)$ tự do địa phương, tồn tại một phân thớ vector W sao cho $S(W)$ đẳng cấu với $\Omega^p(V)$; ngoài ra dễ thấy phân thớ W_x của W tại $x \in X$ đẳng cấu chính tắc với $V_x \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^p D_x$, trong đó D_x chỉ đối ngẫu của không gian tiếp tuyến với X tại x. Bằng cách áp dụng hệ quả 5 cho W, ta thấy

$$H^q_\Phi(X, \Omega^p(V)) = H^q_\Phi(X, S(W))$$

đẳng cấu vói $H^{0.q}(\mathcal{A}_\Phi(W))$; để thu lại được định lý 4 , ta chỉ cần kiểm tra rằng $\mathcal{A}^{0.q}(W)$ đẳng cấu với $\mathcal{A}^{p.q}(V)$, việc này không có quá nhiều khó khăn.

Hệ quả 6. $H^q_\Phi(X, \Omega^p(V)) = 0$ *với* $q > n$*, nếu* n *là chiều phức của* X*.*

2.5 Lưu ý

Nếu $\mathcal{F}$ là bó giải tích bất kỳ, ta có thể hình thành dãy :

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{0.0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{0.1} \to \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{0.n} \to 0$$

Nếu ta có thể chứng minh đây là dãy khớp, ta có thể thu được một phép giải của $\mathcal{F}$ với bó mềm (xem 1.2.8) và khi đó định lý 4 cùng với các hệ quả của nó được mở rộng cho các bó giải tích. Không may, việc đây là một dãy khớp hoàn toàn không hiển nhiên; ta có thể nghĩ đến việc chứng minh nó bằng cách chứng minh $\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{A}^{0,0}_x) = 0$ với mọi $p \geqslant 1$, nhưng vấn đề này xem ra khó.

3 Định lý đối ngẫu

3.1 Topo trên không gian $\mathcal{A}^{p,q}(V)$

Ta sẽ định nghiã một họ nửa chuẩn[4] trên không gian $A^{p.q}(V)$ các lát cắt của $\mathcal{A}^{p.q}(V)$.

Xét hệ (K, φ, ψ, k) thỏa mãn các điều kiện sau

3.1.1. K là tập compact của X .

3.1.2. φ là một phép đồng phôi giải tích từ lân cận U của K vào một tập mở trong $\mathbb{C}^r$.

3.1.3. ψ là một đẳng cấu từ $\pi^{-1}(U)$ vào $U \times \mathbb{C}^r$, π chỉ một phép chiếu từ V vào X.

3.1.4. k là một chuỗi $2n$ số tự nhiên $\geqslant 0 : r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n$.

Nếu ω là một phần tử của $A^{p.q}(V)$, giới hạn của ω vào U có thể được đồng nhất (thông qua ψ) với một hệ r dạng vi phân cấp $(p.q)$ trên U, hệ này lại có thể được đồng nhất (thông qua φ) với một hệ gồm $r.C^p_n C^q_n = N$ hàm trơn trên $\varphi(U)$; ta ký hiệu các hàm này là $\omega_{i,\varphi,\psi}, 1 \leqslant i \leqslant N$. Cho D^k là toán tử vi phân $\frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n+s_1+\cdots+s_N}}{\partial z_1^{r_1}\ldots\partial z_n^{r_n}\partial \bar{z}_1^{s_1}\ldots\partial \bar{z}_n^{s_n}}$. Ta đặt :

$$p_{K,\varphi,\psi,k}(\omega) = \sup_{z\in\varphi(K)} \sup_{1\leqslant i\leqslant N} \left|D^k \omega_{i,\varphi,\psi}(z)\right|$$

[4]Xem [1], mà chúng tôi dẫn tới về tất cả những gì liên quan đến không gian vector topo

Các hàm $p_{K,\varphi,\psi,k}$ là các nửa chuẩn; khi xét tất cả các bộ (K,φ,ψ,k) có thể, các nửa chuẩn này định nghĩa một topo tách (Hausdorff, n.d) trên $A^{p,q}(V)$. Dễ thấy topo này không thay đổi khi ta chỉ giới hạn xét họ các compact K_α mà phần trong của chúng phủ X, và, với mỗi phần tử α , một cặp $(\varphi_\alpha,\psi_\alpha)$ thỏa mãn 3.1.2 và 3.1.3 .Topo của $A^{p.q}(V)$ có thể được định nghĩa bằng một họ đếm được các nửa chuẩn: một topo như thế có thể metric hóa được.

Một dãy ω^n các phần tử của $A^{p,q}(V)$ tiến về 0 đối với topo trên nếu tại lân cận của mọi điểm thuộc X, các N hàm biểu diễn địa phương của ω^n hội tụ đều về 0, cũng như tất cả các đạo hàm riêng của chúng. Vậy nên ta có thể nói rằng topo của $A^{p,q}(V)$ là topo hội tụ đều địa phương (hay trên tất cả các compact, khái niệm này tương đương) của mỗi đạo hàm . Không gian $A^{p,q}(V)$ hoàn toàn giống với không gian E của Schwartz ([9], tr.88); ta kiểm tra được rằng, giống như E, không gian này đầy đủ, hay nói cách khác, nó là không gian Fréchet.

3.2 Đối ngẫu topo của $A^{p,q}(V)$

Ta biết rằng đối ngẫu topo của E có thể được đồng nhất với không gian các hàm suy rộng với giá compact (xem [9], t.89, định lý XXV). Ta sẽ mở rộng kết quả này cho $A^{p.q}(V)$.

Cho V^* là phân thớ đối ngẫu của V : nếu V được định nghĩa bằng phân thớ chính P, ta có thể định nghĩa V^* như là không gian gắn với P, với thớ dạng $\mathbb{C}^r$, mà trên đó $GL_r(\mathbb{C})$ tác động như biểu diễn đối thành phần (contragrédiente) của biểu diễn thông thường; hoặc nữa, nếu V được định nghĩa với các phép chuyển bản đồ là các ma trận chỉnh hình $M^{\alpha\beta}$, ta có thể định nghĩa V^* bằng các ma trận đối thành phần $\check{M}^{\alpha\beta} = {}^t(M^{\alpha\beta})^{-1}$.

Với mọi $x \in X$, tồn tại một dạng song tuyến tính chính tắc trên $V_x \times V_x^*$, làm cho hai không gian này đối ngẫu với nhau (tên gọi "phân thớ đối ngẫu" là vì vậy); nó định nghĩa một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính từ $S(V) \otimes_{\mathcal{O}} S(V^*)$ vào $\mathcal{O}$; mặt khác, phép lấy tích ngoài định nghĩa một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính từ $\mathcal{A}^{p.q} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}^{p'.q'}$ vào $\mathcal{K}^{p+p',q+q'}$, với q và q' là các số nguyên $\geqslant 0$ bất kỳ. Từ đó bằng cách chuyển qua tích tensor ta có đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính

$$\epsilon : \mathcal{A}^{p.q}(V) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}^{p.q}(V) \to \mathcal{K}^{p+p',q+q'}$$

Nếu $\omega \in A^{p.q}(V)$ và $T \in K_*^{p',q'}(V^*)$, ảnh của $\omega \otimes T$ bởi ϵ sẽ được ký hiệu $\omega \wedge T$; đó là một phần tử của $K_*^{p+p',q+q'}$, nghĩa là một dòng với giá compact có dạng $(p+p',q+q')$. Nếu ta lấy một bản đồ địa phương trên V và bản đồ tương ứng trên V^*, dạng ω đồng nhất với r dạng ω_i, dòng T với r dòng T_i, và $\omega \wedge T$ bằng $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge T_i$. Nói riêng, lấy $p' = n-p, q' = n-q$. Khi đó $\omega \wedge T$ là một dòng có giá compact có dạng (n,n), mà ta có thể lấy tích phân trên X (X được định hướng tự nhiên bởi cấu trúc phức). Ta đặt

$$\langle \omega, T \rangle = \int_X \omega \wedge T$$

Cho T cố định, ánh xạ $\omega \to \langle \omega, T \rangle$ là một dạng tuyến tính trên $A^{p.q}(V)$ mà ta ký hiệu là L_T.

Mệnh đề 7. *Ánh xạ $T \to L_T$ là đẳng cấu từ $K_*^{n-p,n-q}(V^*)$ vào đối ngẫu topo của $A^{p.q}(V)$* [5].

[5] Mệnh đề này là trường hợp đặc biệt của một kết quả đúng với mọi phân thớ trơn V : đối ngẫu

Ta có ngay rằng $L_T = 0$ suy ra $T = 0$. Do đó ta phải chứng minh : a) L_T liên tục, b) mọi dạng tuyến tính liên tục L trên $A^{p.q}(V)$ có dạng L_T.

Chọn một phủ mở hữu hạn địa phương $\{U_\alpha\}$ của X đủ nhỏ sao cho V tầm thường trên mỗi U_α và U_α compact tương đối. Cho $\{\theta_\alpha\}$ là phân hoạch đơn vị trơn ứng với U_α.

Đầu tiên ta chứng minh tính liên tục của ω. Cho $\{\omega^n\}$ là một dãy phần tử thuộc $A^{p.q}(V)$ tiến tới 0. Với mọi α, dãy $\theta_\alpha\omega^n$ tiến tới 0, và giá của các dạng này nằm nguyên trong một tập compact cố định trong U_α; biểu diễn địa phương của $\theta_\alpha\omega \wedge T$ viết như ở trên cho thấy $\langle\theta_\alpha\omega^n, T\rangle$ tiến tới 0. Mặt khác, tập H các chỉ số α sao cho U_α giao với giá của T là hữu hạn, do tính compact của giá. Kết quả là $\langle\omega^n, T\rangle = \sum_{\alpha\in H}\langle\theta_\alpha\omega, T\rangle$ tiến tới 0, và L_T là một dạng tuyến tính liên tục.

Ngược lại, cho L là một dạng tuyến tính liên tục trên $A^{p.q}(V)$. Cho ω^n là một dãy phần tử thuộc $A^{p.q}(V)$, tiến về 0, sao cho giá của ω^n được chứa trong một tập compact trong U_α. Hiển nhiên $L(\omega^n)$ tiến tới 0. Nhưng mỗi ω^n được xác định trên U_α bởi một hệ r dạng vi phân cấp $(p.q)$ có giá compact, và ta biết rằng không gian đối ngẫu của không gian các dạng vi phân có giá compact cấp $(p.q)$ (được trang bị topo như trên, tương tự với không gian $\mathcal{D}$ của Schwartz) là không gian các dòng dạng $(n-p, n-q)$ (xem [8] , trong đó mệnh đề này được lấy làm định nghĩa của dòng). Do đó tồn tại, với mỗi α, một lát cắt T_α của $\mathcal{K}^{n-p,n-q}(V^*)$ trên U_α, sao cho $\int_{U_\alpha}\omega\wedge T_\alpha = L(\omega)$ với mọi ω. Rõ ràng $T_\alpha = T_\beta$ trên $U_\alpha \cap U_\beta$, nói cách khác T_α là giới hạn vào U_α của một lát cắt T của $\mathcal{K}^{n-p,n-q}(V^*)$ trên X; tính liên tục của L cho thấy $T_\alpha = 0$ ngoài một tập hữu hạn các α, nghĩa là T có giá compact. Cuối cùng, với mọi $\omega \in A^{p.q}(V)$, ta có

$$L(\omega) = \sum_\alpha L(\theta_\alpha\omega) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha}\theta_\alpha\omega\wedge T = \int_X \omega\wedge T = L_T(\omega)$$

đpcm. Kể từ lúc này, ta sẽ đồng nhất $K_*^{n-p,n-q}(V^*)$ với đối ngẫu topo của $A^{p.q}(V)$ thông qua ánh xạ $T \to L_T$.

Mệnh đề 8. *Ánh xạ tuyến tính $\overline{\partial} : A^{p.q}(V) \to A^{p.q+1}(V)$ liên tục và chuyển vị của nó là* $(-1)^{p+q+1}\overline{\partial} : K_*^{n-p,n-q-1}(V) \to K_*^{n-p,n-q}(V^*)$

Cho $\omega \in A^{p.q}(V)$ và $T \in K_*^{n-p,n-q-1}(V^*)$. Ta có

$$d(\omega\wedge T) = \overline{\partial}(\omega\wedge T) = \overline{\partial}\omega\wedge T + (-1)^{p+q}\omega\wedge\overline{\partial}T$$

và do $\int_X d(\omega\wedge T) = 0$, ta suy ra :

$$\langle\overline{\partial}\omega, T\rangle + (-1)^{p+q}\langle\omega, \overline{\partial}T\rangle = 0$$

điều này hoàn tất chứng minh mệnh đề (tính liên tục của $\overline{\partial}$ là hiển nhiên).

3.3 Chứng minh định lý đối ngẫu

Ý nghĩa của các mệnh đề 7 và 8 là đối ngẫu topo của phức $A(V)$ đẳng cấu với phức $K_*(V^*)$. Để đi từ đây tới nhóm đối đồng điều của các phức này, ta sẽ sử dụng bổ đề sau :

của không gian các lát cắt trơn của V đẳng cấu với không gian các dòng có bậc tối đa, với hệ số trong phân thớ đối ngẫu của V, với giá compact.

Bổ đề 9. *Cho L, M, N là các không gian Fréchet, và $u : L \to M$, $v : M \to N$, hai đồng cấu [6] tuyến tính sao cho $v \circ u = 0$. Gọi L^*, M^*, N^* là đối ngẫu topo của L, M, N, và ${}^t u, {}^t v$ là các ánh xạ chuyển vị của u và v. Đặt $C = v^{-1}(0)$ và $B = u(L)$, $H = C/B$, và $C' = {}^t u^{-1}(0)$, $B' = {}^t v(N^*)$, $H' = C'/B'$.*

Khi đó H là một không gian Fréchet với đối ngẫu topo đẳng cấu với H'.

Vì u là đồng cấu, $B = u(L)$ đầy đủ, nên đóng, và H là một không gian Fréchet. (xem [1],tr.34).

Mặt khác cho $c' \in C'$, và h là phần tử của H' định nghĩa bởi c'. Theo định nghĩa, c' là một dạng tuyến tính liên tục trên M, bằng không trên B, nên định nghĩa một dạng tuyến tính liên tục trên H chỉ phụ thuộc vào h'. Nếu dạng tuyến tính này triệt tiêu, c' triệt tiêu trên C, nên thuộc ${}^t v(N^*) = B'$, vì v là một đồng cấu, nói cách khác $h' = 0$.

Ngược lại, mọi dạng tuyến tính λ liên tục trên H, có thể được đồng nhất với một dạng tuyến tính liên tục trên C và triệt tiêu trên B; theo định lý Hahn-Banach ([1],tr.111) ta có thể mở rộng dạng tuyến tính lên M; và như thế thu được một phần tử c' của C',và từ đó một phần tử h' của H', và ngay lập tức ta có rằng dạng tuyến tính định nghĩa bởi h' trên H không là gì khác ngoài λ, điều này kết thúc chứng minh rằng H' đẳng cấu với đối ngẫu topo của H.

Ta sẽ ứng dụng bổ đề trên với $L = A^{p,q-1}(V), M = A^{p.q}(V), N = A^{p.q+1}(V)$, và $u = \overline{\partial}$, $v = \overline{\partial}$. Theo mệnh đề 7, ta có :

$$L^* = K_*^{n-p,n-q+1}(V^*), \quad M^* = K_*^{n-p,n-q}(V^*), \quad N^* = K_*^{n-p,n-q-1}(V^*)$$

và theo mệnh đề 8, ${}^t u = (-1)^{p+q}\overline{\partial}, {}^t v = (-1)^{p+q+1}\overline{\partial}$. Mặt khác, định lý 4 cho thấy :

$$H = H^q(X, \Omega^p(V)), \quad \text{và} \quad H' = H_*^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*)).$$

Từ đó bằng cách áp dụng bổ đề 9 :

Định lý 10. *Cho X là một đa tạp giải tích phức, đếm được ở vô cùng, với chiều phức n, và cho V là một phân thớ vector giải tích với cơ sở X. Giả sử hai ánh xạ tuyến tính :*

$$A^{p.q-1}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p.q}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p.q+1}(V)$$

là các đồng cấu. Khi đó đối ngẫu topo của không gian Fréchet $H^q(X, \Omega^p(V))$ đẳng cấu chính tắc với $H_*^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*))$.

Với $p = 0$ (trường hợp mà ta luôn có thể đưa về, như ta đã thấy ở), định lý 10 cho thấy $H^q(X, S(V))$ đối ngẫu với $H_*^{n-q}(X, \Omega^n(V^*))$. Mặt khác $\Omega^n(V^*)$ tự do địa phương, nên đẳng cấu vói $S(\tilde{V})$, với $\tilde{V}$ chỉ phân thớ vector với thớ $\tilde{V}_x$ tại một điểm $x \in X$ đẳng cấu chính tắc $V_x^* \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^n D_x$, với các ký hiệu ở phần 2.4. Ta quan sát thấy $\tilde{\tilde{V}} = V$. Từ đó ta có thể phát biểu :

Hệ quả 11. *Giả sử hai ánh xạ tuyến tính :*

$$A^{0.q-1}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{0,q}(V) \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{0.q+1}(V)$$

là các đồng cấu. Khi đó đối ngẫu topo của không gian Fréchet $H^q(X, S(V))$ đẳng cấu chính tắc với $H_*^{n-q}(X, S(\tilde{V}))$.

[6] Xem N.Bourbaki, Top.Gén., Chap. III, §2. (n.d : "đồng cấu" ở đây nghĩa là ánh xạ liên tục, có ảnh đóng)

3.4 Một tiêu chuẩn

Để áp dụng được định lý đối ngẫu, điều kiện cần là phải chứng minh $\overline{\partial}$ là một đồng cấu. Đây là một tiêu chuẩn giúp ta khẳng định điều đó :

Mệnh đề 12. *Nếu chiều của $H^q(X, \Omega^p(V))$ là hữu hạn, ánh xạ $\overline{\partial} : A^{p.q-1}(V) \to A^{p,q}(V)$ là một đồng cấu.*

Goi $C^{p.q}(V)$ là hạch của $\overline{\partial} : A^{p.q}(V) \to A^{p,q+1}(V)$; vì $\overline{\partial}$ liên tục, $C^{p.q}(V)$ đóng, nên là một không gian Fréchet. Giả thiết đã cho tương đương với việc $\overline{\partial}(A^{p,q-1}(V))$ là một không gian con với đối chiều hữu hạn của $C^{p.q}(V)$, ta thấy mệnh đề 12 là trường hợp đặc biệt của kết quả sau :

Bổ đề 13. *Cho u là ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian Fréchet L vào không gian Fréchet M. Nếu $u(L)$ là một không gian con với đối chiều hữu hạn của M, ánh xạ u là một đồng cấu.*

Chứng minh. [7] Cho P là phần bù đại số của $u(L)$ trong M, và cho v là ánh xạ từ $L \times P$ vào M định nghĩa bởi :

$$v(x, y) = u(x) + y, \quad \text{nếu} \quad x \in L,\ y \in P$$

Ánh xạ v là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $L \times P$ vào M, mà P là một không gian Hausdorff với chiều hữu hạn, nên $L \times P$ là một không gian Fréchet. Định lý Banach ([1], tr.34) cho thấy v là một đồng cấu, từ đó ta lập tức có u là một đồng cấu. □

3.5 Ứng dụng cho đa tạp Stein

Định lý 14. *Cho X là một đa tạp Stein, với số chiều phức n, và cho V là một phân thớ vector giải tích với cơ sở X. Ta có $H^q_*(X, \Omega^p(V)) = 0$ với $q \neq n$, và $H^n_*(X, \Omega^p(V))$ đẳng cấu với đối ngẫu topo của $H^0(X, \Omega^{n-p}(V^*))$.*

(Khi V là phân thớ tầm thường $X \times \mathbb{C}$, ta thu lại được định lý 4 trong).

Thật vậy, theo định lý B cho các đa tạp Stein (xem [3], [4]), ta có $H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*) = 0$ với $q \neq n$, điều này chứng minh (theo mệnh đề 12) rằng $\overline{\partial}$ luôn là một đồng cấu. Bằng cách áp dụng định lý 10 cho V^* và $n - p$ lần lượt thay cho V và p , ta thu được kết quả đã cho.

Ta lưu ý rằng topo của $H^0(X, \Omega^{n-p}(V^*))$ là topo *hội tụ compact.*

Hệ quả 15. *Cho K là một tập con compact của X và s là lát cắt chỉnh hình của V trên $X - K$. Nếu $n \geqslant 2$, tồn tại một lát cắt chỉnh hình của V trên toàn bộ X và trùng với s bên ngoài một tập compact $K' \supset K$.*

Chứng minh giống hệt với chứng minh trong [10], $n^0 13$, trong trường hợp V là tầm thường.

[7] Chứng minh này là của L.Schwartz

3.6 Ứng dụng cho đa tạp compact

Nếu X là một đa tạp giải tích phức compact, ta biết (xem [6]) rằng số chiều của $H^q(X, \mathcal{F})$ hữu hạn với bó giải tích nhất quán $\mathcal{F}$ bất kỳ. Do đó ta có thể áp dụng tiêu chuẩn của mệnh đề 12, và như vậy thu được (với $H^q_*(X, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F})$ do X compact) :

Định lý 16. *Cho X là một đa tạp giải tích compact với số chiều phức n và V là một phân thớ vector giải tích với cơ sở X. Khi đó các không gian vector*

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \quad \text{và} \quad H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*))$$

đối ngẫu với nhau; nói riêng, các không gian này có cùng chiều.

Với $p = 0$:

Hệ quả 17. *$H^q(X, S(V))$ và $H^{n-q}(X, S(V))$ có cùng chiều.*

3.7 Một ví dụ trong đó $\overline{\partial}$ không là đồng cấu

Cho $Y = \mathbb{C}^2$, và F là một tập con đóng, liên thông, và không compact trong Y. Đặt $X = Y - F$. Bằng cách áp dụng dãy khớp đối đồng điều (xem [2] , XVII-4), ta thu được dãy khớp :

$$H^0_*(F, \mathcal{O}) \to H^1_*(X, \mathcal{O}) \to H^1_*(Y, \mathcal{O})$$

Theo định lý 4 trong (hay định lý 14 ở trên),

$$H^1_*(Y, \mathcal{O}) = 0,$$

và theo giả thiết đã cho trên F, $H^0_*(F, \mathcal{O}) = 0$. Do đó $H^1_*(X, \mathcal{O}) = 0$. Chọn F sao cho X không là một miền chỉnh hình (chỉ cần chọn F là một đường thẳng thực chẳng hạn). Theo một kết quả của H.Cartan (xem [6], tr.65, ghi chú 7), ta có $H^1(X, \mathcal{O}) \neq 0$ nhưng mặt khác $H^1_*(X, \Omega^2) = H^1_*(X, \mathcal{O}) = 0$ như ta vừa thấy. Định lý 10 chứng minh rằng $\overline{\partial}$ không là đồng cấu.

Hành vi của $\overline{\partial}$ do đó tương đối khác với hành vi của ∂, bởi ∂ luôn là một đồng cấu (thật vậy, không gian con các đối biên được đặc trưng bởi tính triệt tiêu của các chu kỳ, do đó đóng).

3.8 Diễn giải đối ngẫu giữa $H^q(X, \Omega^p(V))$ và $H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V^*))$

Ta sẽ đưa ra một diễn giải thuần túy đối đồng điều của dạng song tuyến tính định nghĩa bởi tích vô hướng $\langle \omega, T \rangle$ trên

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \times H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V^*)).$$

Đối ngẫu giữa V và V^* định nghĩa (xem 3.2) một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính $S(V) \otimes_{\mathcal{O}} S(V^*) \to \mathcal{O}$; mặt khác, tích ngoài định nghĩa một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính : $\Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{n-p} \to \Omega^n$; bằng cách chuyển qua tích tensor, ta thu được một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính : $\Omega^p(V) \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{n-p}(V^*) \to \Omega^n$, từ đó một đồng cấu $\mathcal{O}$-tuyến tính : $\Omega^p(V) \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{n-p}(V^*) \to Z^n$, với Z^n chỉ bó mầm các dạng vi phân đóng bậc n.

Nhưng một đồng cấu như thế cảm sinh một tích cup (xem [2] ,XVII-9), ở đây là một ánh xạ song tuyến tính từ

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \times H_*^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*)) \quad \text{vào} \quad H_*^n(X, Z^n)$$

Vì $H_*^n(X, Z^n) = H_*^{2n}(X, \mathbb{C})$ (xem chứng minh định lý de Rham trong [6]), và bản thân $H_*^{2n}(X, \mathbb{C})$ đẳng cấu với $\mathbb{C}$ nếu X liên thông (điều ta có thể giả sử), do đó ta thu được một dạng song tuyến tính với giá trị phức trên $H^q(X, \Omega^p(V)) \times H_*^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*))$, và không khó để chứng minh rằng nó trùng với ánh xạ song tuyến tính định nghĩa ở trên nữa.

4 Ứng dụng cho ước

4.1 Phân thớ ứng với ước

Cho D là một ước của đa tạp X. Tại một điểm $x \in X$, D bằng với ước của một hàm g_x phân hình tại x, không đồng nhất 0, và định nghĩa chính xác tới một phép nhân với một phần tử nghịch đảo của $\mathcal{O}_x$. Cho $\mathcal{L}(D)_x$ là các hàm f phân hình trên một lân cận của x sao cho $g_x.f$ chỉnh hình tại x. Hợp các $\mathcal{L}(D)_x$ tạo thành bó con $\mathcal{L}(D)$ của bó mầm các hàm phân hình trên X. Bó này đẳng cấu địa phương với $\mathcal{O}$, nên đẳng cấu với $S(V_D)$, trong đó V_D là một phân thớ vector giải tích có hạng 1 với cơ sở X. Ta kiểm tra ngay được rằng, nếu D và D' tương đương tuyến tính với nhau (nghĩa là nếu $D - D'$ là ước (f) của một hàm phân hình f trên toàn bộ X), khi đó $\mathcal{L}(D)$ và $\mathcal{L}(D')$ đẳng cấu với nhau, do đó V_D và $V_{D'}$ cũng vậy; ngược lại nếu V_D và $V_{D'}$ đẳng cấu với nhau, D và D' tương đương tuyến tính . Cuối cùng V_{-D} đẳng cấu với V_D^*, và $V_{D+D'}$ đẳng cấu với $V_D \otimes V_{D'}$ [8].

Tương tự cho $\Omega^p(D)_x$ là tập các dạng vi phân ω, bậc p, phân hình trên một lân cận của x, sao cho $g_x.\omega$ chỉnh hình tại x. Hợp các $\Omega^p(D)_x$ tạo thành một bó con của bó các dạng vi phân phân hình bậc p trên X. Ta có $\Omega^p(D) = \mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p = S(V_D) \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p = \Omega^p(V_D)$. Từ đó bằng cách áp dụng định lý 16 cho phân thớ V_D :

Định lý 18. *Cho X là một đa tạp giải tích phức compact, có chiều phức n, cho D là ước của X. Khi đó các không gian vector $H^q(X, \Omega^p(D))$ và $H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(-D))$ đối ngẫu với nhau.*

Với $p = 0$, ta có đẳng cấu giữa :

$$H^q(X, \mathcal{L}(D)) \quad \text{và} \quad H^{n-q}(X, \Omega^n(-D))$$

Nói riêng, $H^n(X, \mathcal{L}(D))$ đẳng cấu với đối ngẫu của $H^0(X, \Omega^n(-D))$, không gian các dạng vi phân phân hình bậc n với ước $\geqslant D$.

Nếu tồn tại các dạng vi phân phân hình ω bậc n không đồng nhất không (trường hợp này luôn xảy ra nếu X là đại số chẳng hạn), ước (ω) của chúng luôn tương đương tuyến tính và lớp K của chúng được gọi là lớp chuẩn tắc của X. Từ đó ta có $\mathcal{L}(K) = \Omega^n$, do đó $\mathcal{L}(K - D) = \Omega^n(-D)$ (cũng có thể viết dưới dạng $\tilde{V}_D = V_{K-D}$), và như vậy ta thu được :

Hệ quả 19. *Nếu lớp chính tắc K được định nghĩa tốt, các không gian vector $H^q(X, \mathcal{L}(D))$ và $H^{n-q}(X, \mathcal{L}(K - D))$ đối ngẫu với nhau.*

[8] Đẳng cấu giữa phân thớ và ước này là của *A.Weil*; xem [11], chẳng hạn

4.2 Ứng dụng : định lý Riemann-Roch trên một đường cong

Cho X là một đa tạp giải tích phức compact, liên thông, có chiều 1. Gọi $D = \sum_{P \in X} n_P.P$ là một ước của X, với n_P là các số nguyên bằng không ngoài một số hữu hạn trong số chúng. Ta đặt :

$$h^0(D) = \dim H^0(X, \mathcal{L}(D)), \quad h^1(D) = \dim H^1(X, \mathcal{L}(D)), \quad \deg(D) = \sum_{P \in X} n_P$$

Bổ đề 20. *Số nguyên $h^0(D) - h^1(D) - \deg(D)$ không phụ thuộc vào D.*

Ta chỉ cần chứng minh rằng số nguyên này không thay đổi nếu ta thay D bởi $D + P$ với P là một điểm bất kỳ của X. Nhưng $\mathcal{L}(D)$ là bó con của $\mathcal{L}(D+P)$; cho $\mathcal{Q}$ là bó thương $\mathcal{L}(D+P)/\mathcal{L}(D)$. Ta có $\mathcal{Q}_x = 0$ nếu $x \neq P$, và $\mathcal{Q}_x = \mathbb{C}$ nếu $x = P$, như ta có thể thấy trực tiếp. Vì thế $H^0(X, \mathcal{Q}) = \mathbb{C}$ và $H^q(X, \mathcal{Q}) = 0$ nếu $q > 0$. Dãy khớp bó $0 \to \mathcal{L}(D) \to \mathcal{L}(D+P) \to \mathcal{Q} \to 0$ cảm sinh một dãy khớp đối đồng điều :

$$0 \to H^0(X, \mathcal{L}(D)) \to H^0(X, \mathcal{L}(D+P)) \to \mathbb{C} \to H^1(X, \mathcal{L}(D)) \to H^1(X, \mathcal{L}(D+P)) \to 0$$

Từ đó bằng cách tính tổng xen kẽ các chiều :

$$h^0(D) - h^0(D+P) + 1 - h^1(D) + h^1(D+P) = 0$$

điều này hiển nhiên dẫn tới:

$$h^0(D) - h^1(D) - \deg(D) = h^0(D+P) - h^1(D+P) - \deg(D+P)$$

đ.p.c.m. Với $D = 0$, $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}$, nên $h^0(D) = 1$, vì X liên thông. Ta đặt $h^1(\mathcal{O}) = g$; đây là *giống* của X. Bổ đề 20 có thể được viết dưới dạng tương đương :

Hệ quả 21. $h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - g$

Mà $H^0(X, \mathcal{L}(D))$ là không gian vector các hàm phân hình f sao cho $(f) \geqslant -D$; do đó $h^0(D)$ trùng với số nguyên thường được ký hiệu là $\ell(D)$.

Mặt khác, định lý 18 cho thấy $h^1(D)$ bằng với số chiều $i(D)$ của $H^0(X, \Omega^1(-D))$, không gian các dạng vi phân phân hình ω sao cho $(\omega) \geqslant D$.

Đưa các biểu thức này vào bổ đề 21, ta thu được :

Định lý 22. *(Riemann-Roch)* $l(D) - i(D) = \deg(D) + 1 - g$

Nhận xét. *1) Như ta đã biết, từ định lý Riemann-Roch, ta có kết quả là X sở hữu "đủ" các hàm và dạng phân hình; cụ thể, lớp chỉnh tắc K của X được định nghĩa và ta có $i(D) = \ell(K - D)$, từ đó có công thức thông dụng :*

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

2) Giống g được định nghĩa là $h^1(0) = i(0)$, nghĩa là chiều của không gian vector các dạng vi phân chỉnh hình. Không khó để chứng minh rằng nó bằng với một nửa số Betti đầu tiên của X : điều này là kết quả của, hoặc lý thuyết các dạng điều hòa, hoặc, đơn giản hơn, của dãy khớp đối đồng điều định nghĩa bởi chuỗi khớp bó : $0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to 0$ (ta tính tổng xen kẽ các chiều, và thu được rằng $2 - 2g$ bằng với đặc số Euler-Poincaré của X, từ đó có kết quả cần tìm).

Tài liệu

[1] *N.Bourbaki*, Livre V, Espaces vectoriels topologiques, Chap. I-II. Paris. Hermann, 1953.

[2] *H.Cartan*, Séminaire E.N.S, 1950-1951.

[3] *H.Cartan*, Séminaire E.N.S, 1951-1952.

[4] *H.Cartan*, Varíétés analytiques complexes et cohomologiques, 1951-1952.

[5] *H.Cartan, S.Eilenberg*, Homological Algebra, Princeton Math. Ser., n^0.19

[6] *H.Cartan et J.P.Serre*, Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C.-R.Acad.Sci.Paris 237 (1953), p.128-130.

[7] *P. Dolbeault*, Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, C.-R.Acad.Sci.Paris 236 (1953), p.175-177.

[8] *G. de Rham and K.Kodaira*, Harmonic Integrals, Institute for Advanced Study, 1950.

[9] *L. Schwartz*, Théorie des Distributions, I-II. Paris, Hermann, 1950-1951.

[10] *J.-P.Serre*, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque de Bruxelles, 1953, p.57-68.

[11] *A. Weil*, Fibre spaces in Algebraic Geometry (Notes by A.Wallace). University of Chicago 1952.

Người dịch : Nghiêm Trần Trung. Các chú thích kết thúc bằng "n.d." là của người dịch.