Vi phân trong hình học đại số và hình học phức

Phạm Khoa Bằng

Ngày 18 tháng 6 năm 2020

Outline

1. Vi phân trên vành
2. Vi phân trên lược đồ
3. Vi phân trong hình học phức

Định nghĩa 1.1

Cho A là một vành giao hoán có đơn vị. Cho $A \to B$ là một A-đại số và M là một B-module. Một A **đạo hàm của** B **vào** M (*derivation*) là một A-đồng cấu tuyến tính $d : B \to M$ thỏa mãn luật Leibniz

$$d(b_1 b_2) = b_1 db_2 + b_2 db_1 \ \forall b_1, b_2 \in B \text{ và } da = 0 \ \forall a \in A$$

Định nghĩa 1.1

Cho A là một vành giao hoán có đơn vị. Cho $A \to B$ là một A-đại số và M là một B-module. Một A **đạo hàm của** B **vào** M (*derivation*) là một A-đồng cấu tuyến tính $d : B \to M$ thỏa mãn luật Leibniz

$$d(b_1 b_2) = b_1 db_2 + b_2 db_1 \ \forall b_1, b_2 \in B \text{ và } da = 0 \ \forall a \in A$$

Tập các A-đạo hàm của B vào M được kí hiệu là $\mathrm{Der}_A(B, M)$. Dễ thấy $\mathrm{Der}_A(B, \square) : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_B$ là một hàm tử.

Định nghĩa 1.1

Cho A là một vành giao hoán có đơn vị. Cho $A \to B$ là một A-đại số và M là một B-module. Một A **đạo hàm của** B **vào** M (*derivation*) là một A-đồng cấu tuyến tính $d : B \to M$ thỏa mãn luật Leibniz

$$d(b_1 b_2) = b_1 db_2 + b_2 db_1 \ \forall b_1, b_2 \in B \text{ và } da = 0 \ \forall a \in A$$

Tập các A-đạo hàm của B vào M được kí hiệu là $\mathrm{Der}_A(B, M)$. Dễ thấy $\mathrm{Der}_A(B, \square) : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_B$ là một hàm tử.

Bổ đề 1.2

Hàm tử $\mathrm{Der}_A(B, \square) : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_B$ *là một hàm tử khả diễn (representable) trái. Nói cách khác tồn tại duy nhất (sai khác một đẳng cấu) một* B*-module* $\Omega^1_{B/A}$ *sao cho ta có một đẳng cấu tự nhiên*

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, \square) \cong \mathrm{Der}_A(B, \square)$$

Module $\Omega^1_{B/A}$ được gọi là **vi phân Kähler** của B trên A.

Chứng minh.

Xét xây dựng cụ thể sau

$$\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_{b \in B} B(db) / \langle da, d(b_1 + b_2) - db_1 - db_2, d(b_1 b_2) - b_1 db_1 - b_2 db_2 \rangle$$

trong đó $b_1, b_2 \in B, a \in A$ và ánh xạ

$$\begin{aligned} d_{B/A} : B &\longrightarrow \Omega^1_{B/A} \\ b &\longmapsto [db] \end{aligned}$$

Chứng minh.

Xét xây dựng cụ thể sau

$$\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_{b\in B} B(db)/\left\langle da, d(b_1+b_2) - db_1 - db_2, d(b_1 b_2) - b_1 db_1 - b_2 db_2 \right\rangle$$

trong đó $b_1, b_2 \in B, a \in A$ và ánh xạ

$$\begin{aligned} d_{B/A} : B &\longrightarrow \Omega^1_{B/A} \\ b &\longmapsto [db] \end{aligned}$$

Khi đó mọi A-đạo hàm $d : B \to M$ đều tách được duy nhất qua $d_{B/A}$. Nói cách khác ánh xạ

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) &\longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \\ d &\longmapsto d \circ d_{B/A} \end{aligned}$$

là một đẳng cấu. $\square$

Định lí 1.3

Cho B, A' *là hai* A*-đại số, đặt* $B' = B \otimes_A A'$. *Khi đó tồn tại một đẳng cấu chính tắc của các* B'*-module* $\Omega^1_{B'/A'} \cong \Omega^1_{B/A} \otimes_B B'$.

Định lí 1.3

Cho B, A' là hai A-đại số, đặt $B' = B \otimes_A A'$. Khi đó tồn tại một đẳng cấu chính tắc của các B'-module $\Omega^1_{B'/A'} \cong \Omega^1_{B/A} \otimes_B B'$.

Chứng minh.

Đạo hàm chính tắc $d : B \to \Omega^1_{B/A}$ cảm sinh một đồng cấu

$$d' = d \otimes \mathrm{Id}_{A'} : B' \to \Omega^1_{B/A} \otimes_A A' \cong \Omega^1_{B/A} \otimes_B B'$$

khi đó ta dễ thấy $(\Omega^1_{B/A} \otimes_B B', d')$ thỏa mãn tính phổ dụng của vi phân Kähler. $\square$

Bổ đề 1.4

Cho $M' \to M \to M'' \to 0$ *là một dãy các* A*-module. Khi đó dãy này khớp khi và chỉ khi dãy cảm sinh*

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$$

là khớp với mọi A*-module* N*.*

Dãy cơ bản thứ nhất

Bổ đề 1.4

Cho $M' \to M \to M'' \to 0$ là một dãy các A-module. Khi đó dãy này khớp khi và chỉ khi dãy cảm sinh

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$$

là khớp với mọi A-module N.

Định lí 1.5

Cho B là A-đại số và C là B-đại số. Khi đó ta có dãy khớp của các C-module

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{f} \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{g} \Omega^1_{C/B} \to 0$$

trong đó $f(db \otimes c) = cdb, g(dc) = dc$.

Chứng minh.

Theo bổ đề trước ta chỉ cần chứng minh dãy sau khớp với mọi C-module N

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, N) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, N) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N)$$

Nhưng ta có công thức chuyển cơ sở $\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, N)$.

Chứng minh.

Theo bổ đề trước ta chỉ cần chứng minh dãy sau khớp với mọi C-module N

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, N) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, N) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N)$$

Nhưng ta có công thức chuyển cơ sở $\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, N)$. Do đó ta chuyển về việc chứng minh dãy sau khớp

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, N) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, N) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N) \arrow[d, "="] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}_B(C, N) \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(C, N) \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(B, N)
\end{tikzcd}$$

nhưng điều này là hiển nhiên □

Chứng minh.

Theo bổ đề trước ta chỉ cần chứng minh dãy sau khớp với mọi C-module N

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, N) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, N) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N)$$

Nhưng ta có công thức chuyển cơ sở $\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, N)$. Do đó ta chuyển về việc chứng minh dãy sau khớp

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, N) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, N) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, N) \arrow[d, "="] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}_B(C, N) \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(C, N) \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(B, N)
\end{tikzcd}$$

nhưng điều này là hiển nhiên □

Hệ quả 1.6

Với S là một tập nhân tính của B thì $\Omega^1_{S^{-1}B/A} \cong S^{-1}\Omega^1_{B/A}$.

Bổ đề 1.7

Cho R là một vành và I là một ideal. Cho N là một R-module khi đó $R/I \otimes_R N \cong N/IN$ như hai R-module. Nói riêng khi $N = I$ thì $I/I^2 \cong R/I \otimes_R I$.

Bổ đề 1.7

Cho R là một vành và I là một ideal. Cho N là một R-module khi đó $R/I \otimes_R N \cong N/IN$ như hai R-module. Nói riêng khi $N = I$ thì $I/I^2 \cong R/I \otimes_R I$.

Định lí 1.8

Cho B là một A-đại số và I là một ideal của B. Đặt $C = B/I$ khi đó ta có dãy khớp các C-module

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \to 0$$

trong đó $\delta([b]) := db \otimes 1 \ \forall b \in I$ và $\alpha(db \otimes c) = cd([b])$.

Chứng minh.

Theo bổ đề 1.7 thì $I/I^2 = I \otimes_B C$ và do đó ta chỉ cần chứng minh dãy

$$0 \to \mathrm{Der}_A(C, N) \to \mathrm{Der}_A(B, N) \to \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N) = \mathrm{Hom}_B(I, N)$$

là khớp với mọi C-module N.

Chứng minh.

Theo bổ đề 1.7 thì $I/I^2 = I \otimes_B C$ và do đó ta chỉ cần chứng minh dãy

$$0 \to \mathrm{Der}_A(C, N) \to \mathrm{Der}_A(B, N) \to \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N) = \mathrm{Hom}_B(I, N)$$

là khớp với mọi C-module N.

Ta sẽ kiểm tra tính khớp tại $\mathrm{Der}_A(B, N)$. Đồng cấu

$$\mathrm{Der}_A(B, N) \to \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N) = \mathrm{Hom}_B(I, N)$$

được mô tả cụ thể bởi $d' \mapsto d'_{|I}$. Nếu $d'_{|I} = 0$ thì hiển nhiên nó tách qua C, tức là cảm sinh một đạo hàm $d' \in \mathrm{Der}_A(C, N)$.

Chứng minh.

Theo bổ đề 1.7 thì $I/I^2 = I \otimes_B C$ và do đó ta chỉ cần chứng minh dãy

$$0 \to \mathrm{Der}_A(C, N) \to \mathrm{Der}_A(B, N) \to \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N) = \mathrm{Hom}_B(I, N)$$

là khớp với mọi C-module N.

Ta sẽ kiểm tra tính khớp tại $\mathrm{Der}_A(B, N)$. Đồng cấu

$$\mathrm{Der}_A(B, N) \to \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N) = \mathrm{Hom}_B(I, N)$$

được mô tả cụ thể bởi $d' \mapsto d'_{|I}$. Nếu $d'_{|I} = 0$ thì hiển nhiên nó tách qua C, tức là cảm sinh một đạo hàm $d' \in \mathrm{Der}_A(C, N)$.

Đồng cấu đầu tiên gửi một A-đạo hàm $C \to N$ hợp thành với phép chiếu $B \to C$ để được một đạo hàm $B \to N$ và nó là đơn cấu do $IN = 0$ (vì N là một C-module). $\square$

Ví dụ 1.9

Khi $B = A[x_1, x_2, ..., x_n]$ ta sẽ chứng minh $\Omega^1_{B/A}$ là một B-module tự do sinh bởi các kí hiệu (dx_i). Thật vậy xét một đạo hàm $d' : B \to M$. Thì do B là vành đa thức nên

$$d'f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d'x_i \ \forall f \in B$$

Ví dụ 1.9

Khi $B = A[x_1, x_2, ..., x_n]$ ta sẽ chứng minh $\Omega^1_{B/A}$ là một B-module tự do sinh bởi các kí hiệu (dx_i). Thật vậy xét một đạo hàm $d' : B \to M$. Thì do B là vành đa thức nên

$$d'f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d'x_i \ \forall f \in B$$

do đó ảnh của d' hoàn toàn xác định bởi $(d'x_i)$. Xét B-module tự do $\bigoplus_{i=1}^n B(dx_i)$ và ánh xạ

$$\begin{aligned} d : B &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} B(dx_i) \\ f &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \end{aligned}$$

khi đó cặp $(\bigoplus_{i=1}^n B(dx_i), d)$ thỏa mãn tính phổ dụng của vi phân Kähler.

Ví dụ 1.10

Xét $B = A[x_1, ..., x_n]/I$ với $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ khi đó ta có

$$\begin{cases} \Omega^1_{A[x_1,x_2,...,x_n]/A} \otimes_A B \cong \bigoplus_{i=1}^n Bdx_i & \text{đổi cơ sở} \\ \end{cases}$$

Ví dụ 1.10

Xét $B = A[x_1, ..., x_n]/I$ với $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ khi đó ta có

$$\begin{cases} \Omega^1_{A[x_1,x_2,\ldots,x_n]/A} \otimes_A B \cong \bigoplus_{i=1}^n Bdx_i & \text{đổi cơ sở} \\ \Omega^1_{B/A} \cong \operatorname{coker}(I/I^2 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i=1}^n Bdx_i) & \text{dãy cơ bản thứ hai} \end{cases}$$

Ví dụ 1.10

Xét $B = A[x_1, ..., x_n]/I$ với $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ khi đó ta có

$$\begin{cases} \Omega^1_{A[x_1,x_2,...,x_n]/A} \otimes_A B \cong \bigoplus_{i=1}^n Bdx_i & \text{đổi cơ sở} \\ \Omega^1_{B/A} \cong \operatorname{coker}(I/I^2 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i=1}^n Bdx_i) & \text{dãy cơ bản thứ hai} \end{cases}$$

Theo ví dụ 1.12 thì $\delta = d \otimes 1$ và d xác định bởi

$$d([f_i]) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

Ví dụ 1.10

Xét $B = A[x_1, ..., x_n]/I$ với $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ khi đó ta có

$$\begin{cases} \Omega^1_{A[x_1,x_2,...,x_n]/A} \otimes_A B \cong \bigoplus_{i=1}^n B dx_i & \text{đổi cơ sở} \\ \Omega^1_{B/A} \cong \operatorname{coker}(I/I^2 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i=1}^n B dx_i) & \text{dãy cơ bản thứ hai} \end{cases}$$

Theo ví dụ 1.12 thì $\delta = d \otimes 1$ và d xác định bởi

$$d([f_i]) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

nên ta có thể đồng nhất $\Omega^1_{B/A}$ với **đối hạt nhân** của ma trận Jacobi

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

có nghĩa là $\Omega^1_{B/A} \cong \operatorname{coker}(\mathcal{J})$.

Ví dụ 1.11

Cho $A = k$ là một trường và $B = k[x, y, z]/\left\langle y^2 - x^2 + xyz^2 \right\rangle$ khi đó $\Omega^1_{B/k}$ là module tự do sinh bởi ba kí hiệu dx, dy, dz thỏa mãn quan hệ

$$(-2x + yz^2)dx + (2y + xz^2)dy + (2xyz)dz = 0$$

Ví dụ 1.11

Cho $A = k$ là một trường và $B = k[x, y, z]/\left\langle y^2 - x^2 + xyz^2 \right\rangle$ khi đó $\Omega^1_{B/k}$ là module tự do sinh bởi ba kí hiệu dx, dy, dz thỏa mãn quan hệ

$$(-2x + yz^2)dx + (2y + xz^2)dy + (2xyz)dz = 0$$

Ví dụ 1.12

Vi phân Kähler khác vi phân thông thường ở chỗ nó chỉ nắm bắt được các đối tượng có quan hệ đa thức với nhau. Cụ thể hơn khi trong vành các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường số thực, $R = \mathbb{R}[[x]]$ thì

$$de^x = d\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} dx = e^x dx$$

Tuy nhiên chứng minh $de^x \neq e^x dx$ là một chứng minh không tầm thường, nó đòi hỏi sử dụng bổ để Zorn.

Bổ đề 1.13

Cho A là một vành địa phương với ideal cực đại $\mathfrak{m}$. Kí hiệu $k = A/\mathfrak{m}$ là trường thặng dư. Khi đó ánh δ ở định lý 1.8 là một đẳng cấu.

Bổ đề 1.13

Cho A là một vành địa phương với ideal cực đại $\mathfrak{m}$. Kí hiệu $k = A/\mathfrak{m}$ là trường thặng dư. Khi đó ánh δ ở định lý 1.8 là một đẳng cấu.

Chứng minh.

Theo định nghĩa $\Omega^1_{(A/\mathfrak{m})/k} = \Omega^1_{k/k} = 0$ nên từ dãy khớp cơ bản thứ hai ta có

$$\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega^1_{R/k} \otimes_R k$$

là một toàn cấu. Do đó ta cần chứng minh nó là đơn cấu. Đây là hai không gian vector nên ta chỉ cần chứng minh đối ngẫu của δ là toàn cấu. Nói cách khác ta cần có $\delta^* : \mathrm{Hom}_k(\Omega^1_{A/k} \otimes_A k, k) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$ là toàn cấu. Tuy nhiên

$$\mathrm{Hom}_k(\Omega^1_{A/k} \otimes_A k, k) \cong \mathrm{Hom}_k(\Omega^1_{A/k}, \mathrm{Hom}_k(k, k)) \cong \mathrm{Hom}_k(\Omega^1_{A/k}, k) \cong \mathrm{Der}_k(A, k)$$

Với mọi $\phi \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$ ta định nghĩa $d : A \to k, d(a) = \phi([m])$ trong đó $a = x + m \in k \oplus \mathfrak{m} = A$. □

Định lí 2.1

Cho $f : X \to Y$ là một cấu xạ giữa các lược đồ khi đó tồn tại duy nhất một bó tựa nhất quán $\Omega^1_{X/Y}$ trên X thỏa mãn với mọi tập mở affine V của Y và mọi tập mở affine U của $f^{-1}(V)$ ta có

$$\Omega^1_{X/Y} \mid U \cong (\Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)})^{\sim} \quad (\Omega^1_{X/Y})_x \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \ \forall x \in U$$

Định lí 2.1

Cho $f : X \to Y$ là một cấu xạ giữa các lược đồ khi đó tồn tại duy nhất một bó tựa nhất quán $\Omega^1_{X/Y}$ trên X thỏa mãn với mọi tập mở affine V của Y và mọi tập mở affine U của $f^{-1}(V)$ ta có

$$\Omega^1_{X/Y} \mid U \cong (\Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)})^{\sim} \quad (\Omega^1_{X/Y})_x \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \ \forall x \in U$$

ngoài ra ta còn có một cách nhìn thông qua cấu xạ đường chéo

$$\Delta : X \to X \times_Y X$$

ở đây $X \cong \Delta(X)$ và $\Delta(X)$ là *locally closed* trong $X \times_Y X$, nói cách khác tồn tại một tập mở W sao cho $\Delta(X) \subset W$ và $\Delta(X)$ đóng trong W.

Định lí 2.1

Cho $f : X \to Y$ là một cấu xạ giữa các lược đồ khi đó tồn tại duy nhất một bó tựa nhất quán $\Omega^1_{X/Y}$ trên X thỏa mãn với mọi tập mở affine V của Y và mọi tập mở affine U của $f^{-1}(V)$ ta có

$$\Omega^1_{X/Y} \mid U \cong (\Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)})^{\sim} \quad (\Omega^1_{X/Y})_x \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \ \forall x \in U$$

ngoài ra ta còn có một cách nhìn thông qua cấu xạ đường chéo

$$\Delta : X \to X \times_Y X$$

ở đây $X \cong \Delta(X)$ và $\Delta(X)$ là *locally closed* trong $X \times_Y X$, nói cách khác tồn tại một tập mở W sao cho $\Delta(X) \subset W$ và $\Delta(X)$ đóng trong W. Khi đó ta có

$$\Omega^1_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

trong đó $\mathcal{I}$ là bó các ideal định nghĩa $\Delta(X)$ trong W.

Định lí 2.2 (Dãy khớp cơ bản thứ nhất)

Cho $f : X \to Y, Y \to Z$ *là hai cấu xạ lược đồ. Khi đó tồn tại một dãy khớp các bó*

$$f^*\Omega^1_{Y/Z} \to \Omega^1_{X/Z} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

Định lí 2.2 (Dãy khớp cơ bản thứ nhất)

Cho $f : X \to Y, Y \to Z$ *là hai cấu xạ lược đồ. Khi đó tồn tại một dãy khớp các bó*

$$f^*\Omega^1_{Y/Z} \to \Omega^1_{X/Z} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

Định lí 2.3 (Dãy khớp cơ bản thứ hai)

Cho Z *là một lược đồ con đóng của lược đồ* X *và* $\mathcal{I}$ *là bó các ideal định nghĩa* Z*,* $f : X \to Y$ *là một cấu xạ các lược đồ. Khi đó ta có một dãy khớp các bó*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega^1_{Z/Y} \to 0$$

Cố định một trường đóng đại số k

Định nghĩa 2.4

Một đa tạp đại số X trên k được gọi là **không kì dị** (*nonsingular*) nếu mọi vành địa phương của nó là vành địa phương chính quy ($\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$). Khi đó

$$\omega_X := \bigwedge^{\dim X} \Omega^1_{X/k} \text{ và } \mathcal{T}_X := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$$

được gọi là **bó chính tắc** (*canonical sheaf*) và **bó tiếp xúc** (*tangent sheaf*).

Một số bó đặc biệt

Cố định một trường đóng đại số k

Định nghĩa 2.4

Một đa tạp đại số X trên k được gọi là **không kì dị** (*nonsingular*) nếu mọi vành địa phương của nó là vành địa phương chính quy ($\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$). Khi đó

$$\omega_X := \bigwedge^{\dim X} \Omega^1_{X/k} \text{ và } \mathcal{T}_X := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$$

được gọi là **bó chính tắc** (*canonical sheaf*) và **bó tiếp xúc** (*tangent sheaf*).

Định nghĩa 2.5

Cho Y là một đa tạp đại số con (đóng) của đa tạp đại số trơn X trên k. Kí hiệu $\mathcal{I}$ là bó các ideal sinh ra Y. Ta định nghĩa

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \text{ và } \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$$

là **bó đối chuẩn** (*conormal sheaf*) và **bó chuẩn tắc** (*normal sheaf*) trên Y.

Công thức "adjunction"

Theo dãy khớp cơ bản thứ hai của lược đồ:

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega^1_{Z/Y} \to 0 \ \forall \ f : X \to Y$$

Công thức "adjunction"

Theo dãy khớp cơ bản thứ hai của lược đồ:

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega^1_{Z/Y} \to 0 \ \forall\ f : X \to Y$$

nếu ở đây $Y = \operatorname{Spec}(k)$ và $Z = Y$ là đa tạp con đóng của X thì ta có dãy

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_{Y/k} \to 0$$

Công thức "adjunction"

Theo dãy khớp cơ bản thứ hai của lược đồ:

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega^1_{Z/Y} \to 0 \ \forall\, f : X \to Y$$

nếu ở đây $Y = \operatorname{Spec}(k)$ và $Z = Y$ là đa tạp con đóng của X thì ta có dãy

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_{Y/k} \to 0$$

Định lí 2.6 (Hartshorne, II.8.17)

Khi Y là đa tạp đại số con đóng trơn của đa tạp đại số trơn X trên k thì

(i) $\Omega^1_{Y/k}$ *là tự do địa phương*

(ii) *Dãy khớp đối chuẩn là khớp trái*

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_{Y/k} \to 0$$

Định lí 2.7 (Dãy khớp Euler)

Cho A là một vành, $Y = \operatorname{Spec}(A), X = \mathbb{P}^n_A$. Khi đó tồn tại một dãy khớp các bó trên X

$$0 \to \Omega_{X/Y} \to \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to 0$$

Định lí 2.7 (Dãy khớp Euler)

Cho A là một vành, $Y = \operatorname{Spec}(A), X = \mathbb{P}^n_A$. Khi đó tồn tại một dãy khớp các bó trên X

$$0 \to \Omega_{X/Y} \to \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to 0$$

Giả sử ta có một dãy khớp các phân thớ vector

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

khi đó dãy khớp này cảm sinh một đẳng cấu $\bigwedge^{\dim \mathcal{G}} \mathcal{G} \cong \bigwedge^{\dim \mathcal{F}} \mathcal{F} \otimes \bigwedge^{\dim \mathcal{H}} \mathcal{H}$ do đó một hệ quả của định lý trên là

Định lí 2.7 (Dãy khớp Euler)

Cho A là một vành, $Y = \operatorname{Spec}(A), X = \mathbb{P}^n_A$. Khi đó tồn tại một dãy khớp các bó trên X

$$0 \to \Omega_{X/Y} \to \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to 0$$

Giả sử ta có một dãy khớp các phân thớ vector

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

khi đó dãy khớp này cảm sinh một đẳng cấu $\bigwedge^{\dim \mathcal{G}} \mathcal{G} \cong \bigwedge^{\dim \mathcal{F}} \mathcal{F} \otimes \bigwedge^{\dim \mathcal{H}} \mathcal{H}$ do đó một hệ quả của định lý trên là

Hệ quả 2.8

Cho $X = \mathbf{P}^n_k$ khi đó $\omega_X \cong \mathcal{O}(-n-1)$.

Định lí 2.9

Cho Y là một đa tạp con đóng không kì dị với đối chiều r của một đa tạp đại số X không kì dị trên trường đóng đại số k. Khi đó

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$$

Công thức "adjunction"

Định lí 2.9

Cho Y là một đa tạp con đóng không kì dị với đối chiều r của một đa tạp đại số X không kì dị trên trường đóng đại số k. Khi đó

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$$

Chứng minh.

Theo định lý 2.6 thì ta có dãy khớp

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_{Y/k} \to 0$$

Định lí 2.9

Cho Y là một đa tạp con đóng không kì dị với đối chiều r của một đa tạp đại số X không kì dị trên trường đóng đại số k. Khi đó

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$$

Chứng minh.

Theo định lý 2.6 thì ta có dãy khớp

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_{Y/k} \to 0$$

Ta lấy dãy khớp của phân thớ định thức

$$0 \to \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to \det(\Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y) \to \det(\Omega^1_{Y/k}) \to 0$$

$$\Rightarrow \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \otimes \omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{O}_Y$$

Lấy đối ngẫu và lưu ý $Hom(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{O}_Y$ ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

$\omega_X \cong \mathcal{O}(-n-1)$

Chứng minh.

Trước tiên ta xem hàm dán (*clutching function*) trên từng phần giao của các tập mở chính tắc $U_i \cap U_j$ là gì. Để đơn giản ta chỉ xét $U_0 \cap U_1$ với các tọa độ affine $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ và $(x_{01}, x_{21}, ..., x_{n1})$, trong đó $x_{ij} = x_i/x_j$. Khi đó

$$dx_{10} \wedge dx_{20} \wedge ... \wedge dx_{n0}$$

là một cơ sở trên U_0.

$\omega_X \cong \mathcal{O}(-n-1)$

Chứng minh.

Trước tiên ta xem hàm dán (*clutching function*) trên từng phần giao của các tập mở chính tắc $U_i \cap U_j$ là gì. Để đơn giản ta chỉ xét $U_0 \cap U_1$ với các tọa độ affine $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ và $(x_{01}, x_{21}, ..., x_{n1})$, trong đó $x_{ij} = x_i/x_j$. Khi đó

$$dx_{10} \wedge dx_{20} \wedge ... \wedge dx_{n0}$$

là một cơ sở trên U_0.

$$\begin{aligned} dx_{10} \wedge dx_{20} \wedge ... \wedge dx_{n0} &= d\left(\frac{1}{x_{01}}\right) \wedge d\left(\frac{x_{21}}{x_{01}}\right) \wedge ... \wedge d\left(\frac{x_{n1}}{x_{01}}\right) \\ &= -\frac{dx_{01}}{x_{01}^2} \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} \left(\frac{dx_{i1}}{x_{01}} - \frac{x_{i1}}{x_{01}^2} dx_{01}\right) \\ &= -\frac{1}{x_{01}^{n+1}} dx_{01} \wedge dx_{21} \wedge ... \wedge dx_{n1} \end{aligned}$$

Chứng minh.

Trước tiên ta xem hàm dán (*clutching function*) trên từng phần giao của các tập mở chính tắc $U_i \cap U_j$ là gì. Để đơn giản ta chỉ xét $U_0 \cap U_1$ với các tọa độ affine $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ và $(x_{01}, x_{21}, ..., x_{n1})$, trong đó $x_{ij} = x_i/x_j$. Khi đó

$$dx_{10} \wedge dx_{20} \wedge ... \wedge dx_{n0}$$

là một cơ sở trên U_0.

$$\begin{aligned} dx_{10} \wedge dx_{20} \wedge ... \wedge dx_{n0} &= d\left(\frac{1}{x_{01}}\right) \wedge d\left(\frac{x_{21}}{x_{01}}\right) \wedge ... \wedge d\left(\frac{x_{n1}}{x_{01}}\right) \\ &= -\frac{dx_{01}}{x_{01}^2} \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} \left(\frac{dx_{i1}}{x_{01}} - \frac{x_{i1}}{x_{01}^2} dx_{01}\right) \\ &= -\frac{1}{x_{01}^{n+1}} dx_{01} \wedge dx_{21} \wedge ... \wedge dx_{n1} \end{aligned}$$

để ý rằng $x_{01} = x_0/x_1$ và $\mathcal{O}(n+1)(U_i) = x_i^{n+1}\mathcal{O}(U_i)$ nên đây $\pm x_0^{n+1}/x_1^{n+1}$ chính là hàm dán chung. $\square$

Định lí 2.10 (Serre duality for projective spaces)

Cho $X = \mathbf{P}_k^n$ *với* k *là một trường (không nhất thiết đóng đại số). Khi đó*

(i) $H^n(X, \omega_X) \cong k$ *- đồng thời cố định một đẳng cấu như vậy.*

Định lí 2.10 (Serre duality for projective spaces)

Cho $X = \mathbf{P}^n_k$ *với* k *là một trường (không nhất thiết đóng đại số). Khi đó*

(i) $H^n(X, \omega_X) \cong k$ *- đồng thời cố định một đẳng cấu như vậy.*

(ii) *Với mọi bó nhất quán* $\mathcal{F}$ *trên* X*, phép ghép cặp tự nhiên*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \omega_X) \cong k$$

là một phép ghép không suy biến (non-degenerate).

Định lí 2.10 (Serre duality for projective spaces)

Cho $X = \mathbf{P}_k^n$ *với* k *là một trường (không nhất thiết đóng đại số). Khi đó*

(i) $H^n(X, \omega_X) \cong k$ *- đồng thời cố định một đẳng cấu như vậy.*

(ii) *Với mọi bó nhất quán* $\mathcal{F}$ *trên* X*, phép ghép cặp tự nhiên*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \omega_X) \cong k$$

là một phép ghép không suy biến (non-degenerate).

Định lí 2.11 (Serre)

Cho X *là một đa tạp xạ ảnh trơn (nonsingular projective variety) với chiều* n *trên trường* k*. Với mỗi* $p = \overline{0, n}$ *kí hiệu* $\Omega^p = \bigwedge^p \Omega_{X/k}$ *là bó các* p*-dạng vi phân. Khi đó với mọi* $p, q = \overline{0, n}$ *ta có một đẳng cấu tự nhiên*

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H^{n-p}(X, \Omega^{n-p})^\vee$$

Định lí 2.10 (Serre duality for projective spaces)

Cho $X = \mathbf{P}_k^n$ *với* k *là một trường (không nhất thiết đóng đại số). Khi đó*

(i) $H^n(X, \omega_X) \cong k$ *- đồng thời cố định một đẳng cấu như vậy.*

(ii) *Với mọi bó nhất quán* $\mathcal{F}$ *trên* X*, phép ghép cặp tự nhiên*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \omega_X) \cong k$$

là một phép ghép không suy biến (non-degenerate).

Định lí 2.11 (Serre)

Cho X *là một đa tạp xạ ảnh trơn (nonsingular projective variety) với chiều* n *trên trường* k*. Với mỗi* $p = \overline{0, n}$ *kí hiệu* $\Omega^p = \bigwedge^p \Omega_{X/k}$ *là bó các* p*-dạng vi phân. Khi đó với mọi* $p, q = \overline{0, n}$ *ta có một đẳng cấu tự nhiên*

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H^{n-p}(X, \Omega^{n-p})^\vee$$

Các số $h^{p,q} = \dim_k H^q(X, \Omega^p)$ là các **số Hodge** và là các bất biến song hữu tỷ quan trọng. Dễ thấy $h^{p,q} = h^{n-p,n-p}$.

Định lí 2.12 (Kodaira-Nakano)

Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn n chiều trên $\mathbb{C}$. Nếu $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường giàu (ample) trên X thì

(a) $H^q(X, \mathcal{L} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q > n.$

(b) $H^q(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q < n.$

Định lí 2.12 (Kodaira-Nakano)

Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn n chiều trên $\mathbb{C}$. Nếu $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường giàu (ample) trên X thì

(a) $H^q(X, \mathcal{L} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q > n$.

(b) $H^q(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q < n$.

Chú thích. Định lý triệt tiêu Kodaira-Nakako

1. Đến năm 1987 chỉ được chứng minh bằng công cụ của giải tích phức thông qua nguyên lý GAGA.

Định lí 2.12 (Kodaira-Nakano)

Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn n chiều trên $\mathbb{C}$. Nếu $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường giàu (ample) trên X thì

(a) $H^q(X, \mathcal{L} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q > n.$

(b) $H^q(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q < n.$

Chú thích. Định lý triệt tiêu Kodaira-Nakako

1. Đến năm 1987 chỉ được chứng minh bằng công cụ của giải tích phức thông qua nguyên lý GAGA.
2. Có chứng minh thuần túy đại số đầu tiên vào 1987 bởi Deligne và Illusie.

Định lí 2.12 (Kodaira-Nakano)

Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn n chiều trên $\mathbb{C}$. Nếu $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường giàu (ample) trên X thì

(a) $H^q(X, \mathcal{L} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q > n.$

(b) $H^q(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \bigwedge^p \Omega_{X/k}) = 0 \ \forall p + q < n.$

Chú thích. Định lý triệt tiêu Kodaira-Nakako

1. Đến năm 1987 chỉ được chứng minh bằng công cụ của giải tích phức thông qua nguyên lý GAGA.
2. Có chứng minh thuần túy đại số đầu tiên vào 1987 bởi Deligne và Illusie.
3. Vẫn đúng cho trường có đặc số 0 nhưng sai cho trường đặc số dương (Raynaud).

Cho X là một đa tạp phức.

Định nghĩa 3.1

Một **phân thớ chỉnh hình** r chiều trên X là một đa tạp phức E cùng với một ánh xạ chỉnh hình $\pi : E \to X$ thỏa mãn $\pi^{-1}(x) = E(x)$ là một không gian vector phức r chiều và tồn tại một phủ mở $X = \bigcup U_i$ sao cho tồn tại các ánh xạ song chỉnh hình $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$ giao hoán với các phép chiếu trên U_i mà ánh xạ cảm sinh $\pi^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{C}^r$ là một đẳng cấu tuyến tính.

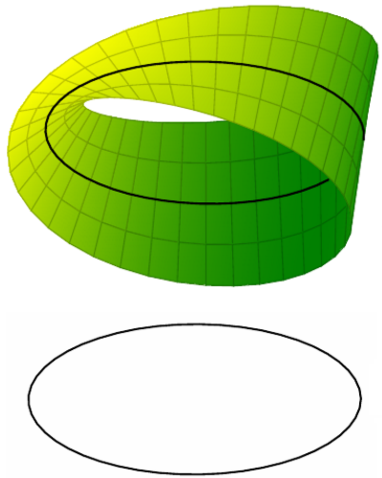
Đặt $\psi_{ij}(x) = (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(x, \Box) : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r \ \forall x \in U_i \cap U_j$. Khi đó một phân thớ chỉnh hình thường được mô tả bằng bộ dữ liệu $(U_i, \psi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}))$ thỏa mãn các điều kiện chu trình (*cocycle conditions*)

(i) $\psi_{ii} = I \ \forall i$.

(ii) $\psi_{ij}\psi_{jk}\psi_{ki} = I \ \forall i, j, k$ thỏa mãn $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$.

Ví dụ 3.2

Cho E là một phân thớ khi đó phân thớ đối ngẫu E^* của nó được mô tả với các chu trình $(U_i, (\psi_{ij}^t)^{-1})$.



Hình 1: Phân thớ trên dải Mobius

Định nghĩa 3.3

Một lát cắt trên một tập mở $U \subset X$ của phân thớ (E, π, X) là một ánh xạ chỉnh hình $p : U \to X$ sao cho $\pi \circ p = \mathrm{id}_U$.

Bổ đề 3.4

Cho $(X, \mathcal{O})$ *là một đa tạp phức liên thông với bó các hàm chỉnh hình* $\mathcal{O}_X$*. Khi đó có một tương ứng* $1-1$ *giữa lớp các phân thớ chỉnh hình và các bó tự do địa phương hạng hạng hữu hạn (locally free sheaves of finite rank)* $\mathcal{O}_X$*-module trên* X*.*

Một số tương đương

Bổ đề 3.4

Cho $(X, \mathcal{O})$ *là một đa tạp phức liên thông với bó các hàm chỉnh hình* $\mathcal{O}_X$*. Khi đó có một tương ứng* $1-1$ *giữa lớp các phân thớ chỉnh hình và các bó tự do địa phương hạng hạng hữu hạn (locally free sheaves of finite rank)* $\mathcal{O}_X$*-module trên* X*.*

Định lí 3.5 (Serre-Swan)

Cho X *là một không gian compact Hausdorff với vành các thực liên tục* $C(X) = C(X, \mathbb{R})$*. Khi đó phạm trù các phân thớ vector thực là tương đương với phạm trù các module xạ ảnh hữu hạn sinh trên vành* $C(X)$*.*

Một số tương đương

Bổ đề 3.4

Cho $(X, \mathcal{O})$ *là một đa tạp phức liên thông với bó các hàm chỉnh hình* $\mathcal{O}_X$*. Khi đó có một tương ứng* $1-1$ *giữa lớp các phân thớ chỉnh hình và các bó tự do địa phương hạng hạng hữu hạn (locally free sheaves of finite rank)* $\mathcal{O}_X$*-module trên* X*.*

Định lí 3.5 (Serre-Swan)

Cho X *là một không gian compact Hausdorff với vành các thực liên tục* $C(X) = C(X, \mathbb{R})$*. Khi đó phạm trù các phân thớ vector thực là tương đương với phạm trù các module xạ ảnh hữu hạn sinh trên vành* $C(X)$*.*

Định lí 3.6 (Serre's GAGA)

Phạm trù các phân thớ vector chỉnh hình trên một đa tạp xạ ảnh trơn (xem như một đa tạp phức) là tương đương với phạm trù các phân thớ vector đại số trên X*, nói cách khác là các bó tự do địa phương hạng hữu hạn.*

Cho X là một đa tạp phức với một họ bản đồ địa phương

$$X = \bigcup U_i, \phi_i : U_i \cong \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$$

ta có cách ánh xạ chuyển (*transition functions*)

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j) \ \forall i, j$$

cảm sinh ra các Jacobian $J(\phi_{ij})(\phi_i(z)) := \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial z_l}(\phi_j(z))\right)_{k,l}$.

Định nghĩa 3.7

Phân thớ tiếp xúc chỉnh hình $\mathcal{T}_X$ được định nghĩa là phân thớ với bộ chu trình $(U_i, \psi_{ij} := J(\phi_{ij})(\phi_i))$. **Phân thớ đối tiếp xúc** $\Omega_X := \mathcal{T}_X^*$ và **phân thớ định thức** $K_X = \det(X) := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$.

Định lí 3.8

Trên $X = \mathbb{P}^n$ *tồn tại một dãy khớp tự nhiên*

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

trong đó $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(-1)^*$ *và* $\mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-1) = \{(l, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in l\}$.

Định lí 3.8

Trên $X = \mathbb{P}^n$ tồn tại một dãy khớp tự nhiên

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

trong đó $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(-1)^*$ *và* $\mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-1) = \left\{(l, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in l\right\}$.

Định lí 3.9

Cho Y là một đa tạp con đóng của đa tạp phức X. Khi đó phân thớ định thức của Y đẳng cấu chính tắc với phân thớ $K_{X|Y} \otimes \det(\mathcal{N}_{Y/X})$.

Các dạng vi phân kiểu (p, q)

Cho U là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, khi đó ta định nghĩa các dạng vi phân khả vi với hệ số phức

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}(U) := \Omega^k_{\mathbb{R}}(U) \otimes \mathbb{C}$$

Cho U là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, khi đó ta định nghĩa các dạng vi phân khả vi với hệ số phức

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}(U) := \Omega^k_{\mathbb{R}}(U) \otimes \mathbb{C}$$

Một dạng vi phân $\in \Omega^k_{\mathbb{C}}(U)$ **kiểu** (p, q) có biểu diễn địa phương

$$\omega = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_q j_1 \ldots j_q} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q} \in \Omega^{p,q}_{\mathbb{C}}(U)$$

trong đó $z_i = x_i + \mathbf{i} dy_i, dz_i = dx_i + \mathbf{i} dy_i, d\overline{z}_i = d\overline{x}_i + \mathbf{i} d\overline{y}_i$

Các dạng vi phân kiểu (p, q)

Cho U là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, khi đó ta định nghĩa các dạng vi phân khả vi với hệ số phức

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}(U) := \Omega^k_{\mathbb{R}}(U) \otimes \mathbb{C}$$

Một dạng vi phân $\in \Omega^k_{\mathbb{C}}(U)$ **kiểu** (p, q) có biểu diễn địa phương

$$\omega = \sum \alpha_{i_1 \dots i_q j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_q} \in \Omega^{p,q}_{\mathbb{C}}(U)$$

trong đó $z_i = x_i + \mathbf{i} dy_i, dz_i = dx_i + \mathbf{i} dy_i, d\overline{z}_i = d\overline{x}_i + \mathbf{i} d\overline{y}_i$

$$\partial(\alpha dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_q}) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

$$\overline{\partial}(\alpha dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_q}) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

Một dạng vi phân kiểu (p, q) được gọi là **chỉnh hình** nếu $\overline{\partial}(\omega) = 0$.

Các dạng vi phân kiểu (p, q)

Với mọi đa tạp phức n chiều X ta có một xích phức các bó

$$\Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,n} \to 0$$

Bó $\Omega^p := \mathrm{Ker}(\Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1})$ gọi là **bó các dạng chỉnh hình**.

Với mọi đa tạp phức n chiều X ta có một xích phức các bó

$$\Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,n} \to 0$$

Bó $\Omega^p := \mathrm{Ker}(\Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1})$ gọi là **bó các dạng chỉnh hình**.

Bổ đề Poincare-Grothendieck nói rằng phức trên là một giải thức của Ω^p và

Định lí 3.10 (Dolbeault)

Nếu X là một đa tạp phức khi đó ta có một đẳng cấu

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \frac{\mathrm{Ker}(\Omega^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q+1})}{\mathrm{Im}(\Omega^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q})}$$

Với mọi đa tạp phức n chiều X ta có một xích phức các bó

$$\Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,n} \rightarrow 0$$

Bó $\Omega^p := \mathrm{Ker}(\Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1})$ gọi là **bó các dạng chỉnh hình**.

Bổ đề Poincare-Grothendieck nói rằng phức trên là một giải thức của Ω^p và

Định lí 3.10 (Dolbeault)

Nếu X là một đa tạp phức khi đó ta có một đẳng cấu

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \frac{\mathrm{Ker}(\Omega^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q+1})}{\mathrm{Im}(\Omega^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q})}$$

Tương tự trường hợp đại số ta định nghĩa các số Hodge $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega^p)$.

Định lí 3.11 (Serre-Kodaira)

Cho X là một đa tạp phức n chiều và $E \to X$ là một phân thớ chỉnh hình trên X. Khi đó tồn tại một đẳng cấu liên hợp phức

$$\sigma : H^q(X, \Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(E^*))$$

trong đó E^* là phân thớ đối ngẫu của E.

Định lí 3.11 (Serre-Kodaira)

Cho X là một đa tạp phức n chiều và $E \to X$ là một phân thớ chỉnh hình trên X. Khi đó tồn tại một đẳng cấu liên hợp phức

$$\sigma : H^q(X, \Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(E^*))$$

trong đó E^* là phân thớ đối ngẫu của E.

Định lí 3.12 (Kodaira)

Cho L là một phân thớ đường dương (positive line bundle) trên một đa tạp Kähler compact n chiều X. Khi đó

$$H^q(X, L \otimes \Omega^p_X) = 0 \ \forall p + q > n$$

Cảm ơn mọi người đã lắng nghe!

Tài liệu tham khảo

1. Daniel Huybrechts, *Complex Geometry - An Introduction*, Springer (2004). Universitext.
2. Hartshorne, Robin (1977), *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 52, New York, Heidelberg.
3. Karoubi, Max (1978), *K-theory: An introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag.
4. Q.Liu, *Algebraic Geometry and Algebraic Curves*, R. Erné trans., Oxford Grad. Texts in Math. 6, Oxford U.P., Oxford, 2002.
5. Wells, R. O., Jr., *Differential Analysis on Complex Manifolds*, 2d ed, Graduate Texts in Mathematics, 65, Springer-Verlag, New York, 1980.