Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch và ứng dụng

Đặng Tuấn Hiệp

Đại học Đà Lạt

02/07/2020

Nội dung

1. Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch
2. Lớp đặc trưng
3. Ứng dụng
   - Đặc trưng Euler của phân thớ Tango

Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch

Cho X là một đa tạp đại số xạ ảnh trơn và E là một phân thớ vectơ trên X. Ký hiệu

- $n = \dim(X)$ và $r = \mathrm{rank}(E)$.
- $\chi(X, E) =$ đặc trưng Euler của E trên X.
- $\mathrm{ch}(E) =$ đặc trưng Chern của E.
- $\mathrm{td}(X) = \mathrm{td}(T_X) =$ lớp Todd của X.
- $T_X =$ phân thớ tiếp xúc trên X.

Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch

$$\chi(X, E) = \int_X \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(X).$$

Phân thớ vectơ và bó tự do địa phương

Mệnh đề

Có một tương ứng $1-1$ giữa

$$\{\text{phân thớ vectơ}\} \leftrightarrow \{\text{bó tự do địa phương}\}.$$

Chứng minh.

Xem Mục 7.3, Bài giảng của Gathmann. $\square$

A. Gathmann, *Algebraic Geometry*, Class Notes TU Kaiserslautern, 2003.

Đặc trưng Euler

Định nghĩa

$$\chi(X, E) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h^i(X, E),$$

trong đó

$$h^i(X, E) = \dim H^i(X, E).$$

Vấn đề

Tìm một công thức "Hình học đại số" cho $\chi(X, E)$.

Công thức Riemann-Roch ($n = r = 1$)

Cho X là một đường cong xạ ảnh trơn. Khi đó, với mọi "divisor" D trên X, ta có

$$h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - g,$$

trong đó g là giống của X và

$$h^i(D) = h^i(X, \mathcal{O}_X(D)).$$

Chu trình (Cycle)

Định nghĩa

Cho $0 \leq k \leq n$ là một số nguyên. Một *chu trình k chiều* trên X là tổng hình thức $\sum_i n_i Y_i$, trong đó $n_i \in \mathbb{Z}$ và Y_i là các đa tạp con k chiều của X.

Ký hiệu $Z_k(X) = \{\text{Chu trình } k \text{ chiều trên X}\}$.

Nhận xét

$Z_k(X)$ là nhóm giao hoán tự do sinh bởi các đa tạp con k chiều của X.

Nhóm Chow

Cho $W \subset X$ là một đa tạp con $k+1$ chiều và $\varphi \neq 0$ là một hàm hữu tỉ trên W.

Định nghĩa

$$\operatorname{div}(\varphi) = \sum_{V} \operatorname{ord}_V(\varphi) V \in Z_k(X),$$

tổng chạy trên tất cả các đa tạp con k chiều V của W.

Ký hiệu $B_k(X) = \{\operatorname{div}(\varphi)\}$.

Nhận xét

$B_k(X)$ là nhóm con của $Z_k(X)$.

Nhóm Chow

Định nghĩa

Nhóm Chow thứ k là nhóm thương

$$A_k(X) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}.$$

Đặc biệt $A_n(X) \cong \mathbb{Z}$, với phần tử sinh là X.
Nếu $n = 1$, thì $Z_0(X) = \mathrm{Div}(X)$ và $A_0(X) = \mathrm{Pic}(X)$.

Vành Chow

Ký hiệu

$$A(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} A_k(X).$$

Phép nhân được xác định như sau: $[Y] \cdot [Z] = [Y \cap Z]$.

Ví dụ

Vành Chow của $\mathbb{P}^n$ là

$$A(\mathbb{P}^n) = \frac{\mathbb{Z}[h]}{\langle h^{n+1} \rangle},$$

trong đó h là lớp chu trình của một siêu phẳng trên $\mathbb{P}^n$.

Bậc của lớp chu trình 0 chiều

Giả sử

$$c = \sum_i n_i[P_i] \in A_0(X).$$

Khi đó

$$\int_X c = \sum_i n_i.$$

Ví dụ

$$\int_{\mathbb{P}^n} h^n = 1.$$

Lớp đặc trưng

Lớp Chern

Các lớp Chern $c_i(E)$ là các đa thức đối xứng cơ bản theo r biến $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, mỗi α_i được gọi là một nghiệm Chern của E, tức là

$$\begin{aligned} c_0(E) &= 1, \\ c_1(E) &= \sum_{1 \le i \le r} \alpha_i, \\ &\ldots \\ c_r(E) &= \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r. \end{aligned}$$

Đặc trưng Chern và lớp Todd

Ta có thể định nghĩa *đặc trưng Chern* và *lớp Todd* của phân thớ vectơ E như sau:

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^{r} e^{\alpha_i},$$

và

$$\mathrm{td}(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{1 - e^{-\alpha_i}}.$$

Chú ý rằng

$$\mathrm{ch}(E), \mathrm{td}(E) \in A(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Đặc trưng Chern và lớp Todd

Giả sử E và F là hai phân thớ vectơ trên X. Khi đó

- $\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{ch}(F)$,
- $\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F)$,
- $\mathrm{td}(E \oplus F) = \mathrm{td}(E) \cdot \mathrm{td}(F)$.

Ứng dụng

Phân thớ Tango

Phân thớ Tango trên $\mathbb{P}^n$

Xét các dãy khớp của các phân thớ vectơ sau:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow \Lambda^{n-2} T_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus\binom{n+1}{n-1}}$$
$$\longrightarrow \Lambda^{n-1} T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0.$$

Đặt

$$E = ((\Lambda^{n-2} T_{\mathbb{P}^n}(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))^*.$$

Phân thớ Tango trên $\mathbb{P}^n$

Xét các dãy khớp của các phân thớ vectơ sau:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(\binom{n}{2}-n)} \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow E' \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

Định lý (Tango, 1976)

T là phân thớ vectơ hạng $n-1$ trên $\mathbb{P}^n$ và không tách được.

Đặc trưng Chern của F

Mệnh đề

Lớp Chern thứ k của T là

$$c_k(T) = \left[\binom{n+k}{k} - 2\binom{n+k-1}{k-1}\right] h^k.$$

Mệnh đề

Đặc trưng Chern của T là

$$\mathrm{ch}(T) = (n-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k - (-1)^k(n+1)}{k!} h^k.$$

Lớp Todd của $\mathbb{P}^n$

Xét dãy khớp Euler trên $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0,$$

trong đó $T_{\mathbb{P}^n}$ là phân thớ tiếp xúc của $\mathbb{P}^n$.

$$\mathrm{td}(T_{\mathbb{P}^n}) = \mathrm{td}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{n+1} = \left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^{n+1}.$$

Lớp Todd của $\mathbb{P}^n$

Do đó

$$td(\mathbb{P}^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} S_k(n) h^k,$$

trong đó $S_k(n)$ là các số Stirling, tức là hệ số trong khai triển của đa thức

$$R_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} S_k(n) x^k.$$

Đặc trưng Euler của T

Định lý (H.-Công-Vân)

Đặc trưng Euler của T trên $\mathbb{P}^n$ là

$$\chi(\mathbb{P}^n, T) = 2n - 1.$$

Phân thớ Tango trên đa tạp Grassmann

Ký hiệu $G(k, n)$ là đa tạp Grassmann của các không gian con k chiều trong một không gian vectơ n chiều.

Costa-Marchesi-Miró-Roig (2016) xây dựng phân thớ Tango T trên $G(k, n)$.

Vấn đề

Tính toán

$$\chi(G(k, n), T).$$

Cảm ơn mọi người lắng nghe!