Đối ngẫu Serre

Nghiêm Trần Trung

2020

Mục lục

Mở đầu

Quy ước :

- D là ước trên một diện Riemann
- Ω : bó vi phân chỉnh hình.
- Ω_D : bó vi phân phân hình với $(\omega) + D \geq 0$.
- $\mathcal{O}$: bó hàm chỉnh hình.
- $\mathcal{O}_D$: bó hàm phân hình với $(f) + D \geq 0$
- $\mathcal{A}$: bó vi phân trơn.

Đối ngẫu Serre cho diện Riemann

Cho X là một diện Riemann compact liên thông. Khi đó

$$H^0(\Omega_{-D}) \cong H^1(\mathcal{O}_D)^*$$

Đối ngẫu Serre cho diện Riemann

Cho X là một diện Riemann compact liên thông. Khi đó

$$H^0(\Omega_{-D}) \cong H^1(\mathcal{O}_D)^*$$

Đối ngẫu Serre tổng quát

Cho X là đa tạp phức có chiều phức n và $E \mapsto X$ là phân thớ vector chỉnh hình trên X. Khi đó tồn tại đẳng cấu :

$$\sigma : H^q(X, \Omega^p(E))^* \mapsto H_c^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(E^*))$$

với H_c là đối đồng điều với giá compact.

Sơ lược chứng minh (cho đối ngẫu diện Riemann):

Xây dựng ánh xạ thặng dư Res

Xây dựng ánh xạ thặng dư $\mathrm{Res} : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$. Với mọi $\eta \in H^1(\Omega) = \mathcal{A}^2(X)/d\mathcal{A}^{1,0}(X)$, tồn tại $\tau \in \mathcal{A}^2(X)$ sao cho:

$$\mathrm{Res}(\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int_X \tau$$

Sơ lược chứng minh (cho đối ngẫu diện Riemann):

Xây dựng ánh xạ thặng dư Res

Xây dựng ánh xạ thặng dư $\mathrm{Res} : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$. Với mọi $\eta \in H^1(\Omega) = \mathcal{A}^2(X)/d\mathcal{A}^{1,0}(X)$, tồn tại $\tau \in \mathcal{A}^2(X)$ sao cho:

$$\mathrm{Res}(\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int_X \tau$$

Xây dựng đẳng cấu đối ngẫu

Ánh xạ song tuyến tính $H^0(\Omega_{-D}) \times H^1(\mathcal{O}_D) \mapsto H^1(\Omega) \overset{\mathrm{Res}}{\mapsto} \mathbb{C}$ cảm ứng đẳng cấu $i_D : H^0(\Omega_{-D}) \mapsto H^1(\mathcal{O}_D)^*$

Xây dựng ánh xạ thặng dư

- Gọi $\mathcal{M}^1$ là bó vi phân phân hình. $U = (U_i)_i$ phủ mở của X và $\mu = (\omega_i)_i \in C^0(U, \mathcal{M}^1)$ sao cho đối biên $\delta\mu = \omega_j - \omega_i \in Z^1(U, \Omega)$, hay $\omega_j - \omega_i$ chỉnh hình. Nói cách khác, ω_i, ω_j có cùng phần chính.

Xây dựng ánh xạ thặng dư

- Gọi $\mathcal{M}^1$ là bó vi phân phân hình. $U = (U_i)_i$ phủ mở của X và $\mu = (\omega_i)_i \in C^0(U, \mathcal{M}^1)$ sao cho đối biên $\delta\mu = \omega_j - \omega_i \in Z^1(U, \Omega)$, hay $\omega_j - \omega_i$ chỉnh hình. Nói cách khác, ω_i, ω_j có cùng phần chính.
- $\forall\ P \in U_i$, ta định nghĩa được $\mathrm{res}_P\mu = \mathrm{res}_P\omega_i$ và :

$$\mathrm{Res}(\eta) = \sum_{P \in X} \mathrm{res}_P\mu$$

với $\eta = [\delta\mu] \in H^1(\Omega)$. Res được định nghĩa tốt vì ω_i, ω_j có cùng phần chính trên $U_i \cap U_j$

Xây dựng ánh xạ thặng dư

Mở rộng Res lên $H^1(\Omega)$

- Do $\eta = [\delta\mu] = [(\omega_i - \omega_j)] \in Z^1(U, \Omega) \subset Z^1(U, \mathcal{A}^{1,0}) \subset B^1(U, \mathcal{A}^{1,0})$ (do $H^1(X, \mathcal{A}^{1.0}) = 0$) , nên $\omega_i - \omega_j = \sigma_i - \sigma_j$, với $\sigma_i \in \mathcal{A}^{1,0}(U_i) \Longrightarrow$ dán $d\sigma_i$ thành $\tau \in \mathcal{A}^2(X)$

Xây dựng ánh xạ thặng dư

Mở rộng Res lên $H^1(\Omega)$

- Do $\eta = [\delta\mu] = [(\omega_i - \omega_j)] \in Z^1(U, \Omega) \subset Z^1(U, \mathcal{A}^{1,0}) \subset B^1(U, \mathcal{A}^{1,0})$ (do $H^1(X, \mathcal{A}^{1.0}) = 0$) , nên $\omega_i - \omega_j = \sigma_i - \sigma_j$, với $\sigma_i \in \mathcal{A}^{1,0}(U_i) \implies$ dán $d\sigma_i$ thành $\tau \in \mathcal{A}^2(X)$
- Gọi $A = \cup_k a_k$ là các cực của μ. Khi đó Trên $X' = X - A$, ta dán $\sigma_i - \omega_i$ thành $\xi \in \mathcal{A}^{1,0}(X')$ sao cho $d\xi = \tau$

Xây dựng ánh xạ thặng dư

Mở rộng Res lên $H^1(\Omega)$

- Do $\eta = [\delta\mu] = [(\omega_i - \omega_j)] \in Z^1(U, \Omega) \subset Z^1(U, \mathcal{A}^{1,0}) \subset B^1(U, \mathcal{A}^{1,0})$ (do $H^1(X, \mathcal{A}^{1.0}) = 0$) , nên $\omega_i - \omega_j = \sigma_i - \sigma_j$, với $\sigma_i \in \mathcal{A}^{1,0}(U_i) \implies$ dán $d\sigma_i$ thành $\tau \in \mathcal{A}^2(X)$
- Gọi $A = \cup_k a_k$ là các cực của μ. Khi đó Trên $X' = X - A$, ta dán $\sigma_i - \omega_i$ thành $\xi \in \mathcal{A}^{1,0}(X')$ sao cho $d\xi = \tau$
- $f_k \in C^\infty$ sao cho $f_k = 1$ tại lân cận của a_k và 0 ở ngoài. Đặt $f = \sum_k f_k$ và $g = 1 - f$, khi đó $\tau = d(f\xi) + d(g\xi)$.

Xây dựng ánh xạ thặng dư

Mở rộng Res lên $H^1(\Omega)$

- Do $\eta = [\delta\mu] = [(\omega_i - \omega_j)] \in Z^1(U, \Omega) \subset Z^1(U, \mathcal{A}^{1,0}) \subset B^1(U, \mathcal{A}^{1,0})$ (do $H^1(X, \mathcal{A}^{1.0}) = 0$) , nên $\omega_i - \omega_j = \sigma_i - \sigma_j$, với $\sigma_i \in \mathcal{A}^{1,0}(U_i) \implies$ dán $d\sigma_i$ thành $\tau \in \mathcal{A}^2(X)$
- Gọi $A = \cup_k a_k$ là các cực của μ. Khi đó Trên $X' = X - A$, ta dán $\sigma_i - \omega_i$ thành $\xi \in \mathcal{A}^{1,0}(X')$ sao cho $d\xi = \tau$
- $f_k \in C^\infty$ sao cho $f_k = 1$ tại lân cận của a_k và 0 ở ngoài. Đặt $f = \sum_k f_k$ và $g = 1 - f$, khi đó $\tau = d(f\xi) + d(g\xi)$.
- Mở rộng $d(f\xi)$ lên X : tại lân cận $a_k \in U_{i(k)}$ ta có $d(f\xi) = d\xi = \tau = d\sigma_{i(k)}$. Mở rộng $g\xi$ lên X : do $g\xi = 0$ gần a_k nên $g\xi$ mở rộng lên X.

Xây dựng ánh xạ thặng dư

- Ta có $\tau = d(g\xi) + \sum_k d(f_k\xi)$.
- Áp dụng liên tục công thức Stokes :

$$\int_X d(g\xi) = 0$$

và

$$\int_X \tau = \int_X \sum_k df_k \sigma_{i(k)} - df_k \omega_{i(k)} = \sum_k \int_{D(a_k,\epsilon)} \omega_{i(k)}$$
$$= 2i\pi \sum_X \mathrm{res}_P \mu = 2i\pi \mathrm{Res}(\eta)$$

Xây dựng đẳng cấu đối ngẫu

Ta xây dựng được ánh xạ Res : $H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ (định nghĩa tốt theo công thức Stokes) $\Longrightarrow$ Mở rộng Res lên $H^1(\Omega)$: $\mathrm{Res}(\mu) = \mathrm{Res}([\delta\mu])$

Xây dựng đẳng cấu đối ngẫu

Ta xây dựng được ánh xạ Res : $H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ (định nghĩa tốt theo công thức Stokes) $\Longrightarrow$ Mở rộng Res lên $H^1(\Omega)$: $\text{Res}(\mu) = \text{Res}([\delta\mu])$

Xây dựng đẳng cấu đối ngẫu

- Ta có ánh xạ song tuyến tính

$$\begin{array}{cccccc} H^0(\Omega_{-D}) \times H^1(\mathcal{O}_D) & \longrightarrow & H^1(\Omega) & & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega, \xi) & \longrightarrow & (\omega\xi) = \eta & & \longrightarrow & \text{Res}(\eta) \end{array}$$

Xây dựng đẳng cấu đối ngẫu

Ta xây dựng được ánh xạ Res : $H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ (định nghĩa tốt theo công thức Stokes) $\Longrightarrow$ Mở rộng Res lên $H^1(\Omega)$: $\mathrm{Res}(\mu) = \mathrm{Res}([\delta\mu])$

Xây dựng đẳng cấu đối ngẫu

- Ta có ánh xạ song tuyến tính

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\Omega_{-D}) \times H^1(\mathcal{O}_D) & \longrightarrow & H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega, \xi) & \longrightarrow & (\omega\xi) = \eta & \longrightarrow & \mathrm{Res}(\eta) \end{array}$$

- Ta có cấu xạ cảm ứng :

$$i_D : H^0(\Omega_{-D}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_D)^*$$
$$\omega \longrightarrow (\xi \longrightarrow \langle \omega, \xi \rangle = \mathrm{Res}(\omega\xi))$$

Tính đơn ánh của i_D

- Lấy $a \in X$ sao cho $D(a) = 0$ và (U_0, z) bản đồ tại a, $z(a) = 0$ và $D|_{U_0} = 0$.

Tính đơn ánh của i_D

- Lấy $a \in X$ sao cho $D(a) = 0$ và (U_0, z) bản đồ tại a, $z(a) = 0$ và $D|_{U_0} = 0$.
- Trên U_0 đủ nhỏ, $\omega = fdz$, f không có không điểm . Trên $U = (U_0, U_1 = X - \{a\})$, lấy $\eta = (g_0, g_1) \in C^0(U, \mathcal{M})$ với $g_0 = 1/zf(z)$, $g_1 = 0$.

Tính đơn ánh của i_D

- Lấy $a \in X$ sao cho $D(a) = 0$ và (U_0, z) bản đồ tại a, $z(a) = 0$ và $D|_{U_0} = 0$.
- Trên U_0 đủ nhỏ, $\omega = fdz$, f không có không điểm . Trên $U = (U_0, U_1 = X - \{a\})$, lấy $\eta = (g_0, g_1) \in C^0(U, \mathcal{M})$ với $g_0 = 1/zf(z)$, $g_1 = 0$.
- Khi đó

$$i_D(\omega)(\delta\eta) = \mathrm{Res}[\delta\omega\eta] = \mathrm{Res}(\omega\eta) = \mathrm{Res}(dz/z, 0) = 1$$

suy ra i_D đơn ánh

Tính toàn ánh của i_D

- Với mọi $\lambda \neq 0, \lambda \in H^1(\mathcal{O}_D)$, ta chứng minh nếu nhân λ với $\psi \in H^0(\mathcal{O}_{n(P)}) = \mathcal{L}(n(P))$ với n đủ lớn, ta có $\psi\lambda = i_{D_n}(\omega)$ với $D_n = D - n(P), \omega \in \Omega_{-D_n}$. Khi đó $\omega/\psi \in \Omega_{-D}$ và $i_D(\omega/\psi) = \lambda$

Tính toàn ánh của i_D

- Với mọi $\lambda \neq 0, \lambda \in H^1(\mathcal{O}_D)$, ta chứng minh nếu nhân λ với $\psi \in H^0(\mathcal{O}_{n(P)}) = \mathcal{L}(n(P))$ với n đủ lớn, ta có $\psi\lambda = i_{D_n}(\omega)$ với $D_n = D - n(P), \omega \in \Omega_{-D_n}$. Khi đó $\omega/\psi \in \Omega_{-D}$ và $i_D(\omega/\psi) = \lambda$
- Từ dãy khớp $(\mathcal{O}_{D_n}, \mathcal{O}_D, \mathrm{ct})$, ta có đơn ánh $H^1(\mathcal{O}_D)^* \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}_{D_n})^*$, và đơn ánh λ^*

$$H^0(\mathcal{O}_{n(P)}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{D_n})^*$$
$$\psi \longrightarrow \lambda\psi$$

- Ta có $\dim(\mathrm{im}\lambda^*) \geq n + cte$, và $\dim(\mathrm{im} i_{D_n}) \geq n + cte$. Với $n > \deg(D)$, $h^0(\mathcal{O}_{D_n}) = 0$, $h^1(\mathcal{O}_{D_n}) = n - \deg(D) + g - 1 = n + cte$ (R-R) do đó $\mathrm{im}\lambda^* \cap \mathrm{im} i_{D_n} \neq \emptyset$ $\square$

- Serre chứng minh định lý đối ngẫu cho đa tạp giải tích (không nhất thiết compact), với $\overline{\partial}$ có ảnh đóng, và sử dụng đối đồng điều có giá compact.

- Serre chứng minh định lý đối ngẫu cho đa tạp giải tích (không nhất thiết compact), với $\overline{\partial}$ có ảnh đóng, và sử dụng đối đồng điều có giá compact.
- Định lý đối ngẫu tổng quát là hệ quả của đẳng cấu giữa: i) đối ngẫu topo của không gian Frechet các dạng vi phân với hệ số trơn và ii) dạng vi phân có hệ số hàm suy rộng với giá compact.

- Serre chứng minh định lý đối ngẫu cho đa tạp giải tích (không nhất thiết compact), với $\overline{\partial}$ có ảnh đóng, và sử dụng đối đồng điều có giá compact.
- Định lý đối ngẫu tổng quát là hệ quả của đẳng cấu giữa: i) đối ngẫu topo của không gian Frechet các dạng vi phân với hệ số trơn và ii) dạng vi phân có hệ số hàm suy rộng với giá compact.
- Định lý đối ngẫu cho đa tạp compact là hệ quả trực tiếp của định lý *de Rham-Hodge* (trình bày ở bài sau) cho các dạng điều hòa. (i.e các dạng ψ sao cho $\Delta_{\overline{\partial}}\psi = (\overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial})\psi = 0$

Một số khái niệm về dòng

Gọi $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ là không gian các q dạng trơn với giá compact, được trang bị topo C^∞ ($\omega_n \to 0$ nếu giá của ω_n compact, các hàm trơn thành phần hội tụ về 0 cũng như đạo hàm của chúng).

Một số khái niệm về dòng

Gọi $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ là không gian các q dạng trơn với giá compact, được trang bị topo C^∞ ($\omega_n \to 0$ nếu giá của ω_n compact, các hàm trơn thành phần hội tụ về 0 cũng như đạo hàm của chúng).

Định nghĩa về dòng

Không gian đối ngẫu topo của $A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$ là không gian các dòng bậc q, ký hiệu $K^q(\mathbb{R}^n)$

Một số khái niệm về dòng

Gọi $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ là không gian các q dạng trơn với giá compact, được trang bị topo C^∞ ($\omega_n \to 0$ nếu giá của ω_n compact, các hàm trơn thành phần hội tụ về 0 cũng như đạo hàm của chúng).

Định nghĩa về dòng

Không gian đối ngẫu topo của $A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$ là không gian các dòng bậc q, ký hiệu $K^q(\mathbb{R}^n)$

Ta định nghĩa tương tự dòng bậc $(p.q)$ trên một đa tạp phức và bó dòng $\mathcal{K}^{p,q}$.

Một số khái niệm về dòng

Gọi $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ là không gian các q dạng trơn với giá compact, được trang bị topo C^∞ ($\omega_n \to 0$ nếu giá của ω_n compact, các hàm trơn thành phần hội tụ về 0 cũng như đạo hàm của chúng).

Định nghĩa về dòng

Không gian đối ngẫu topo của $A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$ là không gian các dòng bậc q, ký hiệu $K^q(\mathbb{R}^n)$

Ta định nghĩa tương tự dòng bậc $(p.q)$ trên một đa tạp phức và bó dòng $\mathcal{K}^{p,q}$. Lý thuyết dòng được khởi xướng bởi de Rham để hợp nhất việc xét các dạng trơn và các xích vào một lý thuyết.

Một số khái niệm về dòng

Gọi $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ là không gian các q dạng trơn với giá compact, được trang bị topo C^∞ ($\omega_n \to 0$ nếu giá của ω_n compact, các hàm trơn thành phần hội tụ về 0 cũng như đạo hàm của chúng).

Định nghĩa về dòng

Không gian đối ngẫu topo của $A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$ là không gian các dòng bậc q, ký hiệu $K^q(\mathbb{R}^n)$

Ta định nghĩa tương tự dòng bậc $(p.q)$ trên một đa tạp phức và bó dòng $\mathcal{K}^{p,q}$. Lý thuyết dòng được khởi xướng bởi de Rham để hợp nhất việc xét các dạng trơn và các xích vào một lý thuyết. Ta chứng minh được đối đồng điều de Rham $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$ và Dolbeault $H^{p,*}_{\bar\partial}(M)$ đẳng cấu với đối đồng điều dòng.

Ví dụ về dòng

- Cho $\psi = \sum \psi_I(x)dx_I$ là q-dạng trơn với các hàm thành phần L^1 địa phương trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó ψ định nghĩa một dòng :

$$T_\psi(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge \phi, \quad \phi \in A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$$

.

Ví dụ về dòng

- Cho $\psi = \sum \psi_I(x)dx_I$ là q-dạng trơn với các hàm thành phần L^1 địa phương trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó ψ định nghĩa một dòng :
$$T_\psi(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge \phi, \quad \phi \in A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$$
.
- Cho Γ là một $n-q$ xích định hướng, trơn từng phần trên $\mathbb{R}^n$, khi đó Γ định nghĩa một dòng T_Γ :
$$T_\Gamma(\phi) = \int_\Gamma \phi, \quad \phi \in A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$$

Dãy khớp dòng

Từ bổ đề $\overline{\partial}$-Poincaré cho các $(p.q)$-dạng trơn ta có day khớp bó :

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{p,0} \stackrel{\bar{\partial}}{\to} \dots \mathcal{A}^{p,n} \to 0$$

Ta cũng có bổ đề $\overline{\partial}$-Poincaré cho bó dòng (chứng minh xem trong [GH78], ch. 3)

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{K}^{p,0} \stackrel{\bar{\partial}}{\to} \dots \mathcal{K}^{p,n} \to 0$$

Ý tưởng : xây dựng toán tử đồng luân :
$K : \mathcal{A}_c^{0.q}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}^{0.q-1}(\mathbb{C}^n)$, $\overline{\partial} K + K\overline{\partial} = 1$, ta cm được bổ đề $\overline{\partial}$-Poincaré cho dạng trơn.

Dãy khớp dòng

Từ bổ đề $\overline{\partial}$-Poincaré cho các $(p.q)$-dạng trơn ta có day khớp bó :

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \mathcal{A}^{p,n} \to 0$$

Ta cũng có bổ đề $\overline{\partial}$-Poincaré cho bó dòng (chứng minh xem trong [GH78], ch. 3)

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{K}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \mathcal{K}^{p,n} \to 0$$

Ý tưởng : xây dựng toán tử đồng luân :
$K : \mathcal{A}_c^{0.q}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}^{0.q-1}(\mathbb{C}^n)$, $\overline{\partial} K + K\overline{\partial} = 1$, ta cm được bổ đề $\overline{\partial}$-Poincaré cho dạng trơn. Định nghĩa
$KT(\phi) = T(K\phi), \phi \in \mathcal{A}^{0.q}$, ta cm tương tự bổ đề Poincaré cho dòng.

Đối ngẫu Serre tổng quát

Sơ lược chứng minh (theo [Serre55])

- Serre sử dụng phép giải $\Omega^p(E)$ bởi các dạng C^∞ $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ và các dạng hàm suy rộng $\mathcal{K}^{p,q}(E)$ với hệ số trong E. Cụ thể hơn, ta có hai dãy khớp bó

$$0 \to \Omega^p(E) \to \mathcal{A}^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \dots \mathcal{A}^{p,n}(E) \to 0$$

và

$$0 \to \Omega^p(E) \to \mathcal{K}^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \dots \mathcal{K}^{p,n}(E) \to 0$$

trong đó
$\Omega^p(E), \mathcal{A}^{p,q}(E), \mathcal{K}^{p,q}(E) = \mathcal{O}(E) \otimes_{\mathcal{O}} (\Omega^p, \mathcal{A}^{p,q}, \mathcal{K}^{p,q})$.

Đối ngẫu Serre tổng quát

Sơ lược chứng minh (theo [Serre55])

- Serre tổng quát hóa định lý Dolbeault cho $\mathcal{K}$: $H^q_c(X, \Omega^p(E)) \cong H^{p,q}(\mathcal{K}_c(E))$, bằng cách chứng minh các bó $\mathcal{K}^{p,q}_c(E)$ là bó mềm (i.e nhận phân hoạch đơn vị)

Đối ngẫu Serre tổng quát

Sơ lược chứng minh (theo [Serre55])

- Serre tổng quát hóa định lý Dolbeault cho $\mathcal{K}$: $H_c^q(X, \Omega^p(E)) \cong H^{p,q}(\mathcal{K}_c(E))$, bằng cách chứng minh các bó $\mathcal{K}_c^{p,q}(E)$ là bó mềm (i.e nhận phân hoạch đơn vị)
- Xây dựng topo (bằng các nửa chuẩn) trên $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ sao cho $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ là không gian Fréchet, ký hiệu : $A^{p.q}(E)$.

Đối ngẫu Serre tổng quát

Sơ lược chứng minh (theo [Serre55])

- Serre tổng quát hóa định lý Dolbeault cho $\mathcal{K}$: $H_c^q(X, \Omega^p(E)) \cong H^{p,q}(\mathcal{K}_c(E))$, bằng cách chứng minh các bó $\mathcal{K}_c^{p,q}(E)$ là bó mềm (i.e nhận phân hoạch đơn vị)
- Xây dựng topo (bằng các nửa chuẩn) trên $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ sao cho $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ là không gian Fréchet, ký hiệu : $A^{p.q}(E)$.
- Chứng minh đẳng cấu giữa $K_c^{n-p,n-q}(E^*)$ và đối ngẫu topo của $A^{p,q}(E)$: $T \to (L_T : \omega \to \langle \omega, T \rangle\ )$

Đối ngẫu Serre tổng quát

Sơ lược chứng minh (theo [Serre55])

- Serre tổng quát hóa định lý Dolbeault cho $\mathcal{K}$: $H_c^q(X, \Omega^p(E)) \cong H^{p,q}(\mathcal{K}_c(E))$, bằng cách chứng minh các bó $\mathcal{K}_c^{p,q}(E)$ là bó mềm (i.e nhận phân hoạch đơn vị)
- Xây dựng topo (bằng các nửa chuẩn) trên $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ sao cho $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ là không gian Fréchet, ký hiệu : $A^{p.q}(E)$.
- Chứng minh đẳng cấu giữa $K_c^{n-p,n-q}(E^*)$ và đối ngẫu topo của $A^{p,q}(E)$: $T \to (L_T : \omega \to \langle \omega, T \rangle\ )$
- Chứng minh ánh xạ $\overline{\partial} : A^{p,q}(E) \to A^{p,q+1}(E)$ là liên tục với $\overline{\partial}^t = (-1)^{p+q+1}\overline{\partial} : K_c^{n-p,n-q-1}(E^*) \to K_c^{n-p,n-q}(E^*)$

Xây dựng topo trên $\mathcal{A}^{p.q}(E)$

Cho K, ϕ, ψ lần lượt là tập compact của X, bản đồ trên lân cận U của K và tầm thường hóa của E ứng với U.

Xây dựng topo trên $\mathcal{A}^{p.q}(E)$

Cho K, ϕ, ψ lần lượt là tập compact của X, bản đồ trên lân cận U của K và tầm thường hóa của E ứng với U.
$k = r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n$ bộ $2n$ số tự nhiên.

Xây dựng topo trên $\mathcal{A}^{p.q}(E)$

Cho K, ϕ, ψ lần lượt là tập compact của X, bản đồ trên lân cận U của K và tầm thường hóa của E ứng với U.
$k = r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n$ bộ $2n$ số tự nhiên.
$D^k = \frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n+s_1+\cdots+s_N}}{\partial z_1^{r_1} \ldots \partial z_n^{r_n} \partial z_1^{s_1} \ldots \partial z_n^{s_n}}$ là toán tử vi phân ứng với k.

Xây dựng topo trên $\mathcal{A}^{p.q}(E)$

Cho K, ϕ, ψ lần lượt là tập compact của X, bản đồ trên lân cận U của K và tầm thường hóa của E ứng với U.
$k = r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n$ bộ $2n$ số tự nhiên.
$D^k = \frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n+s_1+\cdots+s_N}}{\partial z_1^{r_1} \ldots \partial z_n^{r_n} \partial z_1^{s_1} \ldots \partial z_n^{s_n}}$ là toán tử vi phân ứng với k.
Cho $\omega \in \mathcal{A}^{p.q}(E)$. Qua tầm thường hóa ψ và bản đồ ϕ, ω ứng với bộ N hàm trơn trên $\phi(U)$.

Xây dựng topo trên $\mathcal{A}^{p.q}(E)$

Cho K, ϕ, ψ lần lượt là tập compact của X, bản đồ trên lân cận U của K và tầm thường hóa của E ứng với U.
$k = r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n$ bộ $2n$ số tự nhiên.
$D^k = \frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n+s_1+\cdots+s_N}}{\partial z_1^{r_1}...\partial z_n^{r_n}\partial z_1^{s_1}...\partial z_n^{s_n}}$ là toán tử vi phân ứng với k.
Cho $\omega \in \mathcal{A}^{p.q}(E)$. Qua tầm thường hóa ψ và bản đồ ϕ, ω ứng với bộ N hàm trơn trên $\phi(U)$. Ta ứng các bộ (K, ϕ, ψ, k) với nửa chuẩn :

$$p_{K,\phi,\psi,k}(\omega) = \sup_{z\in\phi(K)} \sup_{1\leq i\leq N} \left|D^k\omega_{i,\phi,\psi}(z)\right|$$

Xây dựng topo trên $\mathcal{A}^{p.q}(E)$

Cho K, ϕ, ψ lần lượt là tập compact của X, bản đồ trên lân cận U của K và tầm thường hóa của E ứng với U.
$k = r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n$ bộ $2n$ số tự nhiên.
$D^k = \frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n+s_1+\cdots+s_N}}{\partial z_1^{r_1} \ldots \partial z_n^{r_n} \partial z_1^{s_1} \ldots \partial z_n^{s_n}}$ là toán tử vi phân ứng với k.
Cho $\omega \in \mathcal{A}^{p.q}(E)$. Qua tầm thường hóa ψ và bản đồ ϕ, ω ứng với bộ N hàm trơn trên $\phi(U)$. Ta ứng các bộ (K, ϕ, ψ, k) với nửa chuẩn :

$$p_{K,\phi,\psi,k}(\omega) = \sup_{z \in \phi(K)} \sup_{1 \le i \le N} \left| D^k \omega_{i,\phi,\psi}(z) \right|$$

Ta có thể sử dụng một số đếm được các nửa chuẩn để định nghĩa topo trên $\mathcal{A}^{p.q}(E)$

Đối ngẫu topo của $A^{p,q}(E)$

Phủ X bằng các tập mở hữu hạn địa phương$\{U_\alpha\}$ compact tương đối và tầm thường hóa E. Gọi $\{\theta_\alpha\}$ là phân hoạch đơn vị trơn tương ứng.

Đối ngẫu topo của $A^{p,q}(E)$

Phủ X bằng các tập mở hữu hạn địa phương$\{U_\alpha\}$ compact tương đối và tầm thường hóa E. Gọi $\{\theta_\alpha\}$ là phân hoạch đơn vị trơn tương ứng.
Sử dụng phân hoạch đơn vị, ta chứng minh được L_T liên tục : cho dãy $\omega^n \to 0$, ta có $\langle \theta_\alpha \omega^n, T\rangle \to 0$, và do U_α hữu hạn địa phương nên $\langle \omega^n, T\rangle \to 0$.

Đối ngẫu topo của $A^{p,q}(E)$

Phủ X bằng các tập mở hữu hạn địa phương$\{U_\alpha\}$ compact tương đối và tầm thường hóa E. Gọi $\{\theta_\alpha\}$ là phân hoạch đơn vị trơn tương ứng.
Sử dụng phân hoạch đơn vị, ta chứng minh được L_T liên tục : cho dãy $\omega^n \to 0$, ta có $\langle \theta_\alpha \omega^n, T\rangle \to 0$, và do U_α hữu hạn địa phương nên $\langle \omega^n, T\rangle \to 0$.
Cho L là dạng tuyến tính trên $A^{p,q}(E)$. Ta chứng minh được trên mỗi U_α tồn tại một lát cắt T_α của $K^{n-p,n-q}(E^*)$, có giá trong U_α, sao cho $L(\omega) = \langle \omega, T_\alpha\rangle$. Do $T_\alpha = T_\beta$ trên $U_\alpha \cap U_\beta$ nên các T_α dán được thành dòng $T \in K^{n-p,n-q}(E^*)(X)$ sao cho $L = L_T$. Do đó L_T toàn ánh.

Đối ngẫu topo của $A^{p,q}(E)$

Phủ X bằng các tập mở hữu hạn địa phương$\{U_\alpha\}$ compact tương đối và tầm thường hóa E. Gọi $\{\theta_\alpha\}$ là phân hoạch đơn vị trơn tương ứng.
Sử dụng phân hoạch đơn vị, ta chứng minh được L_T liên tục : cho dãy $\omega^n \to 0$, ta có $\langle \theta_\alpha \omega^n, T \rangle \to 0$, và do U_α hữu hạn địa phương nên $\langle \omega^n, T \rangle \to 0$.
Cho L là dạng tuyến tính trên $A^{p,q}(E)$. Ta chứng minh được trên mỗi U_α tồn tại một lát cắt T_α của $K^{n-p,n-q}(E^*)$, có giá trong U_α, sao cho $L(\omega) = \langle \omega, T_\alpha \rangle$. Do $T_\alpha = T_\beta$ trên $U_\alpha \cap U_\beta$ nên các T_α dán được thành dòng $T \in K^{n-p,n-q}(E^*)(X)$ sao cho $L = L_T$. Do đó L_T toàn ánh.
Hiển nhiên L_T đơn ánh. $\square$

Kết luận định lý đối ngẫu tổng quát

Ta có đẳng cấu giữa đối ngẫu topo của phức $A(E)$ với phức $K_c(E^*)$. Ta sử dụng bổ đề sau để kết luận :

Bổ đề

Cho L, M, N là các không gian Fréchet, sao cho $u : L \to M$ và $v : M \to N$ tuyến tính, với ảnh đóng và $v \circ u = 0$. Đối ngẫu topo của $H = \ker(v)/\mathrm{im}(u)$ đẳng cấu với $H' = \ker(u^t)/\mathrm{im}(v^t)$

Kết luận định lý đối ngẫu tổng quát

Ta có đẳng cấu giữa đối ngẫu topo của phức $A(E)$ với phức $K_c(E^*)$. Ta sử dụng bổ đề sau để kết luận :

Bổ đề

Cho L, M, N là các không gian Fréchet, sao cho $u : L \to M$ và $v : M \to N$ tuyến tính, với ảnh đóng và $v \circ u = 0$. Đối ngẫu topo của $H = \ker(v)/\operatorname{im}(u)$ đẳng cấu với $H' = \ker(u^t)/\operatorname{im}(v^t)$

- Áp dụng với $L, M, N = A^{p,q-1}(E), A^{p,q}(E), A^{p,q+1}(E)$, $u = v = \bar{\partial}$, và đối ngẫu topo tương ứng, ta có $H^{p,q}(A(E))^* \cong H^{n-p,n-q}(K_c(E^*))$

Kết luận định lý đối ngẫu tổng quát

Ta có đẳng cấu giữa đối ngẫu topo của phức $A(E)$ với phức $K_c(E^*)$. Ta sử dụng bổ đề sau để kết luận :

Bổ đề

Cho L, M, N là các không gian Fréchet, sao cho $u : L \to M$ và $v : M \to N$ tuyến tính, với ảnh đóng và $v \circ u = 0$. Đối ngẫu topo của $H = \ker(v)/\mathrm{im}(u)$ đẳng cấu với $H' = \ker(u^t)/\mathrm{im}(v^t)$

- Áp dụng với $L, M, N = A^{p,q-1}(E), A^{p,q}(E), A^{p,q+1}(E)$, $u = v = \overline{\partial}$, và đối ngẫu topo tương ứng, ta có $H^{p,q}(A(E))^* \cong H^{n-p,n-q}(K_c(E^*))$
- Sử dụng *định lý Dolbeault*, ta kết luận $H^q(X, \Omega^p(E))^* \cong H^{p,q}(A(E))^* \cong H^{n-q,n-p}(K_c(E^*)) \cong H_c^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(E^*))$

$\square$

Nhận xét - Đối ngẫu cho đa tạp compact

- Cho X là một đa tạp compact. Ta công nhận định lý Hodge : $\dim \mathcal{H}^{p,q}(X) < \infty$ và $\mathcal{H}^{p,q}(X,E) \cong H^{p.q}(X,E)$. Khi đó từ $\dim H^{p,q}(X,E) < \infty$ ta chứng minh được $\overline{\partial}$ có ảnh đóng, và do X compact, $H = H_c$ nên các giả thiết của Serre được thỏa mãn $\Rightarrow$ đối ngẫu cho đa tạp compact.

Nhận xét - Đối ngẫu cho đa tạp compact

- Cho X là một đa tạp compact. Ta công nhận định lý Hodge : $\dim \mathcal{H}^{p,q}(X) < \infty$ và $\mathcal{H}^{p,q}(X,E) \cong H^{p.q}(X,E)$. Khi đó từ $\dim H^{p,q}(X,E) < \infty$ ta chứng minh được $\overline{\partial}$ có ảnh đóng, và do X compact, $H = H_c$ nên các giả thiết của Serre được thỏa mãn $\Rightarrow$ đối ngẫu cho đa tạp compact.
- Có thể suy ra trực tiếp đối ngẫu Serre cho đa tạp compact từ định lý Hodge, Dolbeault và metric Hermit trên X và E.

Nhận xét - Đối ngẫu cho đa tạp compact

- Cho X là một đa tạp compact. Ta công nhận định lý Hodge : $\dim \mathcal{H}^{p,q}(X) < \infty$ và $\mathcal{H}^{p,q}(X, E) \cong H^{p.q}(X, E)$. Khi đó từ $\dim H^{p,q}(X, E) < \infty$ ta chứng minh được $\overline{\partial}$ có ảnh đóng, và do X compact, $H = H_c$ nên các giả thiết của Serre được thỏa mãn $\Rightarrow$ đối ngẫu cho đa tạp compact.
- Có thể suy ra trực tiếp đối ngẫu Serre cho đa tạp compact từ định lý Hodge, Dolbeault và metric Hermit trên X và E.
- Từ metric Hermit, ta định nghĩa được ánh xạ $*$ và đẳng cấu $* : \mathcal{H}^{p,q}(X, E) \to \mathcal{H}^{n-p,n-q}(X, E^*)$, từ định lý Hodge : $H^{p,q}(X, E) \cong H^{n-p,n-q}(X, E^*)$, và từ định lý Dolbeault , $H^q(X, \Omega^p(E))^* \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(E^*))$ $\square$

Diễn giải đối ngẫu

X là đa tạp phức compact với phân thớ vector chỉnh hình E.

- Đối ngẫu Serre tương đương với phép ghép cặp không suy biến :

$$H^{p.q}(X,E) \times H^{n-q,n-q}(X,E^*) \to \mathbb{C}$$

Diễn giải đối ngẫu

X là đa tạp phức compact với phân thớ vector chỉnh hình E.

- Đối ngẫu Serre tương đương với phép ghép cặp không suy biến :

$$H^{p.q}(X, E) \times H^{n-q,n-q}(X, E^*) \to \mathbb{C}$$

- Trong chứng minh định lý đối ngẫu, ta đã xây dựng một ánh xạ song tuyến tính $(\omega, T) \to \langle \omega, T \rangle$ từ $H^{p.q}(X, E) \times H^{n-q,n-q}(X, E^*)$ vào $\mathbb{C}$.

Diễn giải đối ngẫu

X là đa tạp phức compact với phân thớ vector chỉnh hình E.

- Đối ngẫu Serre tương đương với phép ghép cặp không suy biến :

$$H^{p.q}(X,E) \times H^{n-q,n-q}(X,E^*) \to \mathbb{C}$$

- Trong chứng minh định lý đối ngẫu, ta đã xây dựng một ánh xạ song tuyến tính $(\omega, T) \to \langle \omega, T \rangle$ từ $H^{p.q}(X,E) \times H^{n-q,n-q}(X,E^*)$ vào $\mathbb{C}$.
- Mặt khác tích ngoài $\Omega^p \otimes \Omega^{n-p} \to \Omega^n$ cảm ứng tích cup (cup-product), ở đây là ánh xạ song tuyến tính $H^{p.q}(X,E) \times H^{n-q,n-q}(X,E^*) \to H^n(X,\Omega^n)$, và $H^n(X,\Omega^n) \cong \mathcal{H}^{n,n}(\Omega^n) \cong \mathbb{C}$ (Hodge). Tích cup này trùng với ánh xạ ban đầu.

Định lý Riemann-Roch

- Một trong những hệ quả quan trọng của đối ngẫu Serre cho diện Riemann là định lý Riemann-Roch.

Định lý Riemann-Roch

- Một trong những hệ quả quan trọng của đối ngẫu Serre cho diện Riemann là định lý Riemann-Roch.
- Chứng minh "cổ điển" của Riemann-Roch đòi hỏi sự tồn tại của một số hàm phân hình trên diện Riemann.

Định lý Riemann-Roch

- Một trong những hệ quả quan trọng của đối ngẫu Serre cho diện Riemann là định lý Riemann-Roch.
- Chứng minh "cổ điển" của Riemann-Roch đòi hỏi sự tồn tại của một số hàm phân hình trên diện Riemann.
- Đối ngẫu Serre cho ta một chứng minh chỉ phụ thuộc vào cấu trúc bó $\Longrightarrow$ tổng quát cho đa tạp đại số (xem [Hart77, Chương IV])

Cho X là một diện Riemann compact.
Với $i = 0, 1$, ta định nghĩa
$h^i(X, .) := h^i(.) = dim\ H^i(X, .) := \dim\ H^i(.)$

Cho X là một diện Riemann compact.
Với $i = 0, 1$, ta định nghĩa
$h^i(X, .) := h^i(.) = dim\ H^i(X, .) := \dim\ H^i(.)$

Định lý Riemann-Roch

Đặt $g = h^1(\mathcal{O})$. Gọi $\chi(\mathcal{O}_D) = h^0(\mathcal{O}_D) - h^1(\mathcal{O}_D)$ là "đặc số Euler". Ta có :

$$\chi(\mathcal{O}_D) = \deg(D) + 1 - g$$

$\mathcal{O}_D$ là bó các hàm phân hình với ước $\geq -D$

Cho X là một diện Riemann compact.
Với $i = 0, 1$, ta định nghĩa
$h^i(X, .) := h^i(.) = dim\ H^i(X, .) := \dim\ H^i(.)$

Định lý Riemann-Roch

Đặt $g = h^1(\mathcal{O})$. Gọi $\chi(\mathcal{O}_D) = h^0(\mathcal{O}_D) - h^1(\mathcal{O}_D)$ là "đặc số Euler". Ta có :

$$\chi(\mathcal{O}_D) = \deg(D) + 1 - g$$

$\mathcal{O}_D$ là bó các hàm phân hình với ước $\geq -D$

Tổng quát hơn : cho X là một đa tạp phức compact và E là phân thớ chỉnh hình trên X. Khi đó đặc số Euler của E chỉ phụ thuộc vào các lớp Chern của E và TX. (xem [GH78])

Dạng quen thuộc của Riemann-Roch (với $K = (\omega)$ với ω : 1-dạng vi phân phân hình khác 0)

Định lý

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

trong đó $\ell(D)$ và $\ell(K - D)$ là chiều của
$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D \geq 0\}$ và
$\mathcal{L}(K - D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D - K \geq 0\}$

Dạng quen thuộc của Riemann-Roch (với $K = (\omega)$ với ω : 1-dạng vi phân phân hình khác 0)

Định lý

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

trong đó $\ell(D)$ và $\ell(K - D)$ là chiều của $\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D \geq 0\}$ và $\mathcal{L}(K - D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D - K \geq 0\}$

- $h^0(\mathcal{O}_D) = \ell(D)$ (vì $H^0(\mathcal{O}_D) = \mathcal{L}(D)$)

Dạng quen thuộc của Riemann-Roch (với $K = (\omega)$ với ω : 1-dạng vi phân phân hình khác 0)

Định lý

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

trong đó $\ell(D)$ và $\ell(K - D)$ là chiều của
$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D \geq 0\}$ và
$\mathcal{L}(K - D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D - K \geq 0\}$

- $h^0(\mathcal{O}_D) = \ell(D)$ (vì $H^0(\mathcal{O}_D) = \mathcal{L}(D)$)
- Từ đối ngẫu Serre $h^1(\mathcal{O}_D) = h^0(\Omega_{-D})$

Dạng quen thuộc của Riemann-Roch (với $K = (\omega)$ với ω : 1-dạng vi phân phân hình khác 0)

Định lý

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

trong đó $\ell(D)$ và $\ell(K - D)$ là chiều của
$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D \geq 0\}$ và
$\mathcal{L}(K - D) = \{f \in \mathcal{M}^*, (f) + D - K \geq 0\}$

- $h^0(\mathcal{O}_D) = \ell(D)$ (vì $H^0(\mathcal{O}_D) = \mathcal{L}(D)$)
- Từ đối ngẫu Serre $h^1(\mathcal{O}_D) = h^0(\Omega_{-D})$
- Mặt khác do $\mathcal{O}_{K-D} \cong \Omega_{-D}$ (theo đẳng cấu $f \mapsto f\omega$) nên ta có $h^1(\mathcal{O}_D) = h^0(\mathcal{O}_{K-D}) = \ell(K - D)$

Các hệ quả khác của ĐN Serre cho diện Riemann

- Từ $h^1(\mathcal{O}_D) = h^0(\Omega_{-D})$, với $D = 0$ và định nghĩa giống giải tích $g = h^1(\mathcal{O})$, ta có định nghĩa khác của giống : $g = h^0(\Omega)$ (số tối đa các 1-dạng chỉnh hình độc lập tuyến tính trên X).

Các hệ quả khác của ĐN Serre cho diện Riemann

- Từ $h^1(\mathcal{O}_D) = h^0(\Omega_{-D})$, với $D = 0$ và định nghĩa giống giải tích $g = h^1(\mathcal{O})$, ta có định nghĩa khác của giống : $g = h^0(\Omega)$ (số tối đa các 1-dạng chỉnh hình độc lập tuyến tính trên X).
- Cho D là một ước trên diện Riemann compact X. Khi đó $H^0(\mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(\Omega_D)^*$. Nói riêng, $h^1(\Omega) = 1$, nên ánh xạ Res định nghĩa ở trên là đẳng cấu giữa $H^1(\Omega)$ và $\mathbb{C}$.

Các hệ quả khác của ĐN Serre cho diện Riemann

- Từ $h^1(\mathcal{O}_D) = h^0(\Omega_{-D})$, với $D = 0$ và định nghĩa giống giải tích $g = h^1(\mathcal{O})$, ta có định nghĩa khác của giống : $g = h^0(\Omega)$ (số tối đa các 1-dạng chỉnh hình độc lập tuyến tính trên X).
- Cho D là một ước trên diện Riemann compact X. Khi đó $H^0(\mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(\Omega_D)^*$. Nói riêng, $h^1(\Omega) = 1$, nên ánh xạ Res định nghĩa ở trên là đẳng cấu giữa $H^1(\Omega)$ và $\mathbb{C}$.
- Ước K của 1-dạng phân hình ω không đồng nhất 0 trên diện Riemann với giống g thỏa mãn $\deg(K) = 2g - 2$ (C/m : từ $g = h^0(\Omega)$ và $h^1(\Omega) = 1$, ta có : $g - 1 = h^0(\Omega) - h^1(\Omega) = \deg(K) - g + 1$ (R-R + ĐN Serre), nên $\deg(K) = 2g - 2$ $\square$)

Phát biểu định lý

Định lý Riemann - Hurwitz

Cho $f : X \longrightarrow Y$ cấu xạ khác hằng giữa hai diện Riemann compact, g_X, g_Y là giống của X và Y, n là bậc rẽ nhánh của f. Khi đó :

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} (e_x(f) - 1)$$

Phát biểu định lý

Định lý Riemann - Hurwitz

Cho $f : X \longrightarrow Y$ cấu xạ khác hằng giữa hai diện Riemann compact, g_X, g_Y là giống của X và Y, n là bậc rẽ nhánh của f. Khi đó :

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} (e_x(f) - 1)$$

Mục đích : sử dụng định lý R-H để chứng minh định nghĩa giống topo trùng với định nghĩa giống giải tích.

Chứng minh với định nghĩa giống topo

- Cho (S_Y, A_Y, F_Y) là tam giác hóa của Y sao cho các đỉnh trùng với các điểm rẽ nhánh.

Chứng minh với định nghĩa giống topo

- Cho (S_Y, A_Y, F_Y) là tam giác hóa của Y sao cho các đỉnh trùng với các điểm rẽ nhánh.
- Ta nâng tam giác hóa của Y lên một tam giác hóa của X với $A_X = nA_Y$, $F_X = nF_Y$. Từ

$$\sum_{f(x)=y} 1 = n + \sum_{f(x)=y} (1 - e_x(f))$$

ta có $S_X = nS_Y + \sum_{x=\text{đỉnh}}(1 - e_x(f))$.

Chứng minh với định nghĩa giống topo

- Cho (S_Y, A_Y, F_Y) là tam giác hóa của Y sao cho các đỉnh trùng với các điểm rẽ nhánh.
- Ta nâng tam giác hóa của Y lên một tam giác hóa của X với $A_X = nA_Y$, $F_X = nF_Y$. Từ

$$\sum_{f(x)=y} 1 = n + \sum_{f(x)=y} (1 - e_x(f))$$

ta có $S_X = nS_Y + \sum_{x=\text{đỉnh}}(1 - e_x(f))$.

- Từ định nghĩa giống topo $2 - 2g_X = S_X - A_X + F_X$ ta suy ra định lý $\square$

Chứng minh với Riemann-Roch

- Ta có định lý $\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.

Chứng minh với Riemann-Roch

- Ta có định lý $\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.
- Đặt $g_{X,O} = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ ("giống giải tích"). Cho ω là dạng vi phân trên Y. Từ hệ quả đối ngẫu Serre ở trên, $\deg(\omega) = 2g_{Y,O} - 2$

Chứng minh với Riemann-Roch

- Ta có định lý $\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.
- Đặt $g_{X,O} = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ ("giống giải tích"). Cho ω là dạng vi phân trên Y. Từ hệ quả đối ngẫu Serre ở trên, $\deg(\omega) = 2g_{Y,O} - 2$
- Ta kéo ω về X, thu được $\eta = f^*\omega$. Từ $\omega = g(z)dz$ trên bản đồ z của Y ta có $\eta = g(t^e)et^{e-1}dt$ trên bản đồ t của X $(z \circ f = t^e)$.

Chứng minh với Riemann-Roch

- Ta có định lý $\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.
- Đặt $g_{X,O} = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ ("giống giải tích"). Cho ω là dạng vi phân trên Y. Từ hệ quả đối ngẫu Serre ở trên, $\deg(\omega) = 2g_{Y,O} - 2$
- Ta kéo ω về X, thu được $\eta = f^*\omega$. Từ $\omega = g(z)dz$ trên bản đồ z của Y ta có $\eta = g(t^e)et^{e-1}dt$ trên bản đồ t của X $(z \circ f = t^e)$.
- Mặt khác $\deg(\eta) = 2g_{X,O} - 2$ và $\mathrm{ord}_x(\eta) = e - 1 + e\,\mathrm{ord}_{f(x)}\omega$. Ta suy ra công thức R-H $\square$

Chứng minh với Riemann-Roch

- Ta có định lý $\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.
- Đặt $g_{X,O} = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ ("giống giải tích"). Cho ω là dạng vi phân trên Y. Từ hệ quả đối ngẫu Serre ở trên, $\deg(\omega) = 2g_{Y,O} - 2$
- Ta kéo ω về X, thu được $\eta = f^*\omega$. Từ $\omega = g(z)dz$ trên bản đồ z của Y ta có $\eta = g(t^e)et^{e-1}dt$ trên bản đồ t của X ($z \circ f = t^e$).
- Mặt khác $\deg(\eta) = 2g_{X,O} - 2$ và $\mathrm{ord}_x(\eta) = e - 1 + e\,\mathrm{ord}_{f(x)}\omega$. Ta suy ra công thức R-H $\square$

Hệ quả : $g_X = g_{X,O}$ ("giống topo tương đương với giống giải tích") (áp dụng công thức R-H cho $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$)

Tham khảo chính

O.Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springerm 1981.

P.Griffiths, J.Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.

R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977. (cho góc nhìn và chứng minh thuần túy đại số của đối ngẫu Serre)

E.Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhäuser,1984.

J.-P.Serre, *Un théorème de dualité*, Comm.Math.Helv, 1955.