Đối đồng điều của lược đồ affine

Phạm Khoa Bằng

Ngày 18 tháng 6 năm 2020

Tóm tắt nội dung

Một tài liệu ngắn gọn và self-contained để khảo sát đối đồng điều của lược đồ affine, cụ thể là tiêu chuẩn Serre và định lý Chevalley.

.

Mục lục

1 Nhắc lại một số kết quả về phạm trù abel

Định nghĩa 1.1 (Vật nội xạ và vật xạ ảnh)**.** Một vật P trong một phạm trù abel $\mathcal{A}$ được gọi là vật ***xạ ảnh*** nếu với mọi toàn cấu (tiếng Anh, *epimorphism*) $g : B \to C$ và với mọi $f : P \to C$ tồn tại $h : P \to B$ sao cho $f = g \circ h$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Một vật E trong pham trù abel $\mathcal{A}$ được gọi là *nội xạ* nếu nó là *xạ ảnh* trong $\mathcal{A}^{op}$.

Định nghĩa 1.2. Một phạm trù abel $\mathcal{A}$ được gọi là ***đủ vật xạ ảnh*** nếu với mọi vật A tồn tại một toàn cấu $P \to A$ trong đó P là vật xạ ảnh. Đối ngẫu lại thì $\mathcal{A}$ được gọi là ***đủ vật nội xạ*** nếu với mọi vật A tồn tại một đơn cấu $A \to E$ trong đó E là vật nội xạ.

Một lợi ích của vật nội xạ và phạm trù đủ vật nội xạ là nó giúp ta định nghĩa đối đồng điều. Rất may mắn là hầu hết các phạm trù chúng ta biết đều có đủ vật nội xạ hoặc xạ ảnh. Ta có thể củng cố niềm tin này bằng một số định lý. Nhắc lại rằng nếu $\mathcal{A}$ là phạm trù abel thì ta kí hiệu $\mathbf{pSh}(X, \mathcal{A}), \mathbf{Sh}(X, \mathcal{A})$ tương ứng là phạm trù tiền bó trên X và phạm trù bó trên X.

Định lý 1.3. *Nếu $\mathcal{A}$ là một phạm trù abel tồn tại tích (đối tích) vô hạn đồng thời có đủ vật nội xạ. Khi đó với mọi không gian topo X thì $\mathbf{Sh}(X, \mathcal{A})$ có đủ vật nội xạ.*

Chứng minh. Joseph J.Rotman, *Introduction to Homological Algebra*, p.315.

Nhưng do mối quan tâm chủ yếu của tài liệu là bó tựa nhất quán nên ở đây sẽ trình bày một chứng minh phạm trù $\mathcal{O}_X$-module là đủ vật nội xạ - chứng minh định lý 1.3 hoàn toàn tương tự chứng minh sau đây.

Mệnh đề 1.4. *Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ là một không gian định vành. Khi đó phạm trù $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X)$ của bó các $\mathcal{O}_X$ module trên X là một phạm trù có đủ vật nội xạ.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{F}$ là một bó các $\mathcal{O}_X$ module. Khi đó $\mathcal{F}_x$ là một $\mathcal{O}_{X,x}$ module với mọi $x \in X$, do đó tồn tại một $\mathcal{O}_{X,x}$ module nội xạ I_x và một đơn cấu $\mathcal{F}_x \to I_x$. Cùng một kí hiệu, ta viết I_x là **bó chọc trời** không gian $\{x\}$. Với mọi $x \in X$ kí hiệu $j_x : \{x\} \to X$ là đồng cấu nhúng tự nhiên. Ta xét bó

$$\mathfrak{F} := \prod_{x \in X} j_{x,*}(I_x)$$

trong đó j_* là hàm tử đẩy xuôi. Như vậy tồn tại một đơn cấu bó $\mathcal{F} \to \mathfrak{F}$ cảm sinh bởi các đơn cấu địa phương $\mathcal{F}_x \to I_x$. Với mọi bó $\mathcal{G}$ các $\mathcal{O}_X$ module ta có:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathfrak{F}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_{x,*}(I_x))$$

Ta biết rằng có một song ánh tự nhiên theo biến thứ nhất (thuận biến)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_{x,*}(I_x)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x) \tag{1}$$

Xét một một dãy khớp bó các $\mathcal{O}_X$ module

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{K} \to 0$$

ta muốn dãy sau khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathfrak{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}, \mathfrak{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{K}, \mathfrak{F}) \to 0$$

Muốn như vậy ta chỉ cần kiểm tra trên từng thành phần tích và sử dụng song ánh 1

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{H}_x, I_x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{K}_x, I_x) \to 0$$

Nhưng dãy này hiển nhiên khớp do I_x là nội xạ. Do đó ta có đpcm. ■

Định nghĩa 1.5 (Phức)**.** Một ***phức*** $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ trong một phạm trù abel $\mathcal{A}$ là một dãy

$$(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) = \to A_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} A_n \overset{d_n}{\to} A_{n-1} \to \cdots$$

trong đó $A_i \in \mathbf{Obj}(\mathcal{A})$ và $d_i \circ d_{i+1} = 0\ \forall i$.

Vật $H_n(\mathbf{C}) = Z_n(\mathbf{C})/B_n(\mathbf{C})$ được gọi là ***đồng điều*** của phức $(\mathbf{C}, \mathbf{d})$.

Định nghĩa 1.6 (Giải xạ ảnh, nội xạ)**.** Một *giải xạ ảnh* của một vật $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ trong một phạm trù abel $\mathcal{A}$ là một dãy khớp

$$\mathbf{P} = \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$$

trong đó P_n là vật xạ ảnh với mọi $n \geq 0$. Ta gọi phức

$$\mathbf{P}_A = \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$$

là giải xạ ảnh ***rút gọn*** của A. Tương tự, một ***giải nội xạ*** của A là một dãy khớp

$$\mathbf{E} = 0 \to A \xrightarrow{\eta} E_0 \xrightarrow{d^0} E_1 \xrightarrow{d^1} E_2 \to$$

trong đó E_n là vật nội xạ với mọi $n \geq 0$ và giải nội xạ rút gọn tương ứng là

$$\mathbf{E} = 0 \to E_0 \xrightarrow{d^0} E_1 \xrightarrow{d^1} E_2 \to$$

Cho $T : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ là một hàm tử thuận biến cộng tính giữa hai phạm trù abel trong đó A có đủ vật xạ ảnh, ta có thể xây dựng***hàm tử dẫn xuất trái*** của nó $L_nT : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ như sau. Chọn một vật $A \in \mathrm{Obj}(A)$ và một giải thức xạ ảnh $\mathbf{P}$ của A. Khi đó ta định nghĩa $(L_nT)A = H_n(T\mathbf{P}_A)$. Tương tự, nếu $\mathcal{A}$ có đủ vật nội xạ ta có thể định nghĩa ***hàm tử dẫn xuất trái*** $R^nT : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ bằng cách chọn một giải thức nội xạ $\mathbf{E}$ của A và định nghĩa $(R^nT)A = H^n(T\mathbf{E}^A)$.

Chú ý.

- Các định nghĩa trên hoàn toàn không phụ thuộc vào cách chọn giải thức.
- Các hàm tử dẫn xuất (trái hoặc phải) đều là hàm tử cộng tính.
- Các hàm tử dẫn xuất đều là ∂-hàm tử.
- Khi T là khớp phải (tương ứng, trái) thì $L_0T \cong T$ (tương ứng, $R^0T \cong T$).

2 Lược đồ tách được và bó tựa nhất quán

2.1 Bó tựa nhất quán

Lược đồ tách được là một phiên bản *không gian Hausdorff* và bó tựa nhất quán là một phiên bản *phân thớ vector* xét trong phạm trù lược đồ.

Cố định một vành trong hoán có đơn vị A và xét một A-module M. Ta biết rằng M giống như cách xây dựng lược đồ affine thì ta có thể xây dựng một bó *liên kết* với M, kí hiệu $\widetilde{M}$, trên A với thớ tại một ideal nguyên tố $\mathfrak{p} \subset A$ là địa phương hóa $M_{\mathfrak{p}}$. Ta tổng kết một số tính chất của xây dựng này trong mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1. *Các khẳng định sau đúng:*

(a) $\widetilde{M}$ *là một* $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$*-module.*

(b) Với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p} \subset A$ *thì thớ tại* $\mathfrak{p}$ *của* $\widetilde{M}$ *chính là địa phương hóa tại* $\mathfrak{p}$ *của* M, $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$.

(c) Với mọi $f \in A$ *thì* $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$.

(d) $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$.

Tôi đưa ra một định nghĩa của bó tựa nhất mà tôi sẽ sử dụng trực tiếp trong toàn bộ tài liệu

Định nghĩa 2.2 (Bó (tựa) nhất quán)**.** Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ là một lược đồ. Một $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ được gọi là ***tựa nhất quán*** nếu A có một phủ mở affine $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i) \mid i \in I\}$ sao cho tồn tại các A_i-module M_i để $\mathcal{F}_{|U_i} \cong \widetilde{M}_i$. $\mathcal{F}$ được gọi là ***nhất quán*** nếu M_i có thể lấy là module hữu hạn sinh.

Chú ý. Tính chất *(tựa) nhất quán* là một tính chất affine địa phương. Nói cách khác nếu $\mathcal{F}$ là tựa nhất quán thì $\mathcal{F}_{|U} \cong \widetilde{M}$ trong đó U là affine và M là một $\mathrm{Spec}(\Gamma(U, \mathcal{F}))$-module nào đó. Điều này dẫn tới hệ quả:

Định lý 2.3. *Hàm tử* $M \mapsto \widetilde{M}$ *cho ta một tương đương giữa phạm trù* A*-module và phạm trù các bó tựa nhất quán các* $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$*-module. Nó có nghịch đảo là hàm tử lát cắt toàn cục* $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$*. Khi* A *là vành Noetherian thì đây là một tương đương giữa phạm trù các* A*-module hữu hạn sinh và phạm trù các bó nhất quán* $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$*-module.*

Ta cần một định lý để đảm bảo phạm trù các bó (tựa) nhất quán là đủ tốt.

Định lý 2.4. *Cho* X *là một lược đồ. Khi đó nhân, đối nhân, ảnh của một cấu xạ giữa các bó tựa nhất quán là bó tựa nhất quán. Hơn nữa, mở rộng (extension) của hai bó tựa nhất quán là nhất quán. Nếu* X *là lược đồ Noether thì các khẳng định trên đúng cho bó nhất quán.*

Chứng minh. Định lý này mang tính địa phương nên ta có thể giả sử X là affine. Phần định lý liên quan tới nhân, đối nhân, ảnh là tầm thường nên ta sẽ chỉ chứng minh định lý cho phần mở rộng các bó tựa nhất quán. Xét một dãy khớp

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

Trong đó $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ là hai bó tựa nhất quán, ta cần chứng minh $\mathcal{G}$ là bó tựa nhất quán. Theo định lý 5.11 và hệ quả 6.2 ta có một dãy khớp các lát cắt toàn cục

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(X,\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(X,\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& M & N & P &
\end{tikzcd}$$

Áp dụng hàm tử $\sim$ vào dãy khớp này và lưu ý hàm tử này là một tương đương phạm trù, nói riêng, nó là hàm tử khớp:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{M} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{N} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{P} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Theo 5-bổ đề thì do hai cấu xạ bên ngoài là đẳng cấu nên cấu xạ ở giữa cũng là đẳng cấu. Do đó $\mathcal{G}$ là tựa nhất quán.

Khi $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ là nhất quán thì M, P là hữu hạn sinh nên N cũng là hữu hạn sinh, do đó $\mathcal{G}$ cũng là nhất quán. ■

2.2 Bó Ideal

Định nghĩa 2.5. (Nhúng đóng, mở) Cho một cấu xạ của các không gian định vành địa phương (*locally ringed space*) $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$. Ta gọi nó là ***nhúng đóng*** (tương ứng, mở) (tiếng Anh, *closed immersion*) nếu nó là nhúng đóng (tương ứng, mở) theo nghĩa topo và $f^\#_x$ là toàn cấu (tương ứng, đẳng cấu) với mọi $x \in X$.

Cho $\mathcal{J}$ là một *bó ideal* các $\mathcal{O}_X$-module ($\mathcal{J}(U)$ là $\mathcal{O}_X(U)$-module với mọi tập mở U). Kí hiệu

$$V(\mathcal{J}) := \{x \in X \mid \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

Từ giờ ta chỉ gọi tắt là bó ideal.

Định lý 2.6. *Cho X là một không gian định vành địa phương và $\mathcal{J}$ là một bó ideal. Kí hiệu $j : V(\mathcal{J}) \to X$ là nhúng chính tắc (tiếng Anh, inclusion) khi đó $V(\mathcal{J})$ là một tập đóng của X và $(V(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ cũng là một không gian định vành địa phương. Hơn nữa ta có một nhúng đóng $(j, j^\#)$ trong đó $j^\#$ là toàn cấu chính tắc:*

$$\mathcal{O}_X \to j_*(j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$$

Chứng minh. Kiểm tra trực tiếp.

Hệ quả 2.7. *Nếu* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *là một lược đồ affine. Khi đó có một tương ứng* $1-1$ *giữa các ideal của* A *và các lược đồ con đóng của* X. *Nói riêng, mọi lược đồ con đóng của* X *có dạng* $\mathrm{Spec}(A/I)$ *với* $I \subset A$ *là một ideal của* A.

2.3 Lược đồ tách được

Lược đồ tách được là một phiên bản không gian Hausdorff trong hình học đại số. Lí do định nghĩa lược đồ tách được là do các lược đồ hầu hết không bao giờ Hausdorff.

Cho S là một lược đồ và X là một S-lược đồ, $f : X \to S$. Khi đó tồn tại cấu xạ đường chéo

$$\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$$

Định nghĩa 2.8. (Lược đồ (tựa) tách được)

(a) f được gọi là ***tách được*** nếu $\Delta_{X/S}$ là một nhúng đóng.

(b) X được gọi là ***tách được*** nếu $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ là tách được.

Mệnh đề 2.9. *Cấu xạ đường chéo giữa hai lược đồ affine là tách được.*

Chứng minh. Cấu xạ giữa hai lược đồ affine $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ tương ứng với đồng cấu vành $\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X), a \otimes b \mapsto ab$ và đồng cấu này hiển nhiên toàn cấu do đó dễ thấy đây là nhúng đóng. ■

Để kết thúc phần này, ta sẽ nêu ra một tính chất quan trọng nhất của lược đồ tách được.

Bổ đề 2.10. *Cho* X *là một lược đồ tách được, khi đó nếu* (U, V) *là một cặp hai tập mở affine của* X *thì ta có*

(a) $U \cap V$ *là affine.*

(b) Đồng cấu vành $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V)$ *là toàn cấu.*

Nói riêng nếu X *là tách được thì giao một số hữu hạn tập mở affine trong* X *là affine.*

Chứng minh. Giả sử $U = \mathrm{Spec}(A), V = \mathrm{Spec}(B)$ với hai $\mathbb{Z}$-đại số A, B. Theo tính chất phổ dụng của tích thớ thì $U \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} V = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ là một tập mở affine của $X \times_S X$ và do đó nếu $\Delta = \Delta_{X/\mathbb{Z}}$ là nhúng đóng thì $\Delta_{|U \cap V} : U \cap V = \Delta^{-1}(U \times_{\mathbb{Z}} V) \to U \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} V$ cũng là nhúng đóng do $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V)$ là toàn cấu. Lại thấy $U \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} V$ là affine nên mọi nhúng đóng của nó cũng là affine theo hệ quả 2.7. ■

3 Đối đồng điều bó

Trong phần này nếu không nói gì thêm ta luôn hiểu là đang làm việc với bó các nhóm abel. Với mỗi không gian topo X khi đó ta có một hàm tử các lát cắt toàn cục:

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbf{Sh}(X) &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ \mathcal{F} &\longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Mệnh đề 3.1. *Hàm tử Γ là hàm tử khớp trái.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh tính khớp bên trái, phần còn lại là tương tự. Xét một dãy khớp các bó

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

Xét một phần tử $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ sao cho $\Gamma(j)(s) = 0$. Do tính khớp của các bó là tính khớp tại các thớ (*stalk*) nên ta có dãy khớp

$$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0 \ \forall x \in X$$

Do đó $\Gamma(j)(s)_x = 0$ nên tồn tại lân cận U_x của x sao cho $s_{|U_x} = 0$. Theo tiên đề dán thứ hai ta có $s = 0$.

Nhưng dễ thấy hàm tử này khớp trái nhưng không khớp. Xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.2. Lấy $X = \mathbb{C} - \{0\}$. Kí hiệu $\mathbb{Z}, \mathcal{O}, \mathcal{O}^\times$ tương ứng là bó hằng tại $\mathbb{Z}$, bó các hàm chỉnh hình và bó các hàm chỉnh hình khác không trên X. Ta có một dãy khớp

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{f \mapsto e^{2\pi i f}} \mathcal{O}^\times \to 0$$

Giả sử $\Gamma(X, \mathcal{O}) \to \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ là toàn cấu khi đó tồn tại một hàm chỉnh hình $f(z)$ sao cho $1/z = e^{2\pi i f(z)}$. Lấy đạo hàm hai vế ta có $-1/z^2 = 2\pi i f'(z)(1/z) \Rightarrow -(1/z) = 2\pi i f'(z)$. Từ đó ta tích phân hai vế trên đường tròn đơn vị suy ra $-1 = 0$, đây là điều vô lý.

Do đó chúng ta nghĩ tới việc ***đo*** độ khớp của hàm tử này. Nói cách khác ta quan tâm tới hàm tử dẫn xuất của Γ.

Định nghĩa 3.3 (Đối đồng điều bó)**.** Cho X là một không gian topo và $\mathcal{F}$ là một bó trên X. Khi đó ***đối đồng điều bó*** của X với hệ số trong $\mathcal{F}$ được định nghĩa là hàm tử dẫn xuất của Γ

$$H^q(X, \mathcal{F}) := (R^q\Gamma)(\mathcal{F})$$

Nói ngắn gọn, lấy $\mathbf{E}$ là một giải thức nội xạ của $\mathcal{F}$, xóa $\mathcal{F}$ để được phức $\mathbf{E}^{\mathcal{F}}$ và áp dụng Γ sau đó lấy đối đồng điều:

$$H^q(X, \mathcal{F}) := H^q(\Gamma\mathbf{E}^{\mathcal{F}})$$

Hệ quả 3.4. *Với các giả thiết trong định nghĩa 3.3 ta có một đẳng cấu tự nhiên*

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$$

Ta có thể làm nhẹ định nghĩa đối đồng điều bó bằng cách tính đối đồng điều thông qua giải thức *flasque*.

Định nghĩa 3.5 (Bó flasque)**.** Một bó $\mathcal{F}$ trên không gian topo X được gọi là *flasque* nếu với mọi tập mở $U \subset V$ thì ánh xạ hạm chế $\Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ là toàn cấu.

Bổ đề 3.6. *Các khẳng định sau đúng*

(a) Mọi bó nội xạ là flasque.

(b) Mọi $\mathcal{O}_X$ module nội xạ là flasque.

(c) Tích các bó flasque là flasque.

(d) Đẩy xuôi của bó flasque là flasque.

(e) Đối đồng điều bó có thể tích bằng giải thức flasque.

Chứng minh. Kiểm tra trực tiếp.

Định lý 3.7 (Đối đồng điều bó với hệ số flasque)**.** *Giả sử $\mathcal{F}$ là một bó flasque trên không gian topo X. Khi đó*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ \forall i > 0$$

Chứng minh. Nhúng $\mathcal{F}$ vào một vật nội xạ $\mathcal{G}$ trong $\mathbf{Sh}(X)$. Khi đó ta có một dãy khớp:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F} \to 0$$

Theo mệnh đề **ref** thì $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$ cũng là flasque. Lại thấy cũng do **ref** thì ta có một dãy khớp

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{H}) \to 0$$

Theo định nghĩa của H^1 ta có $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Lại thấy do $\mathcal{G}$ là nội xạ nên $H^i(X, \mathcal{G}) = 0 \ \forall i > 0$. Nhìn vào dãy khớp dài của đối đồng điều ta có:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{i-1}(X, \mathcal{H}) \ \forall i \geq 2$$

Từ đó chú ý rằng $\mathcal{H}$ là flasque nên $H^1(X, \mathcal{H}) = 0$ ta suy ra đpcm. ■

4 Dãy phổ Grothendieck

Dãy phổ Grothendieck cho một mối liên hệ giữa hàm tử dẫn xuất của hai hàm tử và hàm tử dẫn xuất của hợp thành của chúng.

Định nghĩa 4.1. Cho $\mathcal{B}$ là một phạm trù có đủ vật nội xạ (hoặc xạ ảnh) và $F : \mathcal{B} \to \mathbf{Ab}$ là một hàm tử cộng tính (F có thể thuận biến hoặc phản biến). Một vật $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ được gọi là ***F-acyclic phải*** nếu $(R^q F)B = 0\ \forall q \geq 1$. Tương tự, B được gọi là ***F-acyclic trái*** nếu $(L^p F)B = 0\ \forall p \geq 1$.

Ví dụ 4.2.

(a) Khi $\mathcal{B} = \mathrm{Mod}_R$ và $F = \mathrm{Hom}_R(A, \square)$ khi đó mọi R - module nội xạ E đều là F-acyclic phải do $\mathrm{Ext}^p_R(A, E) = 0\ \forall p \geq 1$.

(b) Khi $\mathcal{B} = \mathbf{Sh}(X)$ và $F = \Gamma(X, \square)$ khi đó mọi bó flasque $\mathcal{F}$ là F-acyclic phải theo định lý 3.7.

Tôi phát biểu phiên bản phổ biến của dãy phổ Grothendieck mà không chứng minh.

Định lý 4.3. *Cho $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ là một dãy các phạm trù abel với đủ vật nội xạ cùng với các hàm tử thuận biến cộng tính. Giả sử F là khớp trái và GE là F-acylic phải với mọi vật nội xạ E trong $\mathcal{A}$. Khi đó với mọi vật $A \in \mathrm{Obj}(A)$ tồn tại một dãy phổ trong góc phần tư thứ ba*

$$E_2^{p,q} = (R^p F)(R^q G)A \underset{p}{\Rightarrow} R^{p+q=n}(F \circ G)A$$

Xét một ánh xạ liên tục giữa hai không gian topo $f : X \to Y$ và $\mathcal{F}$ là một bó các nhóm abel. Xét dãy

$$\mathbf{Sh}(X) \xrightarrow{f_*} \mathbf{Sh}(Y) \xrightarrow{\Gamma_Y} \mathbf{Ab}$$

Khi đó do $\Gamma_Y \circ f_* = \Gamma_X$ nên

$$\begin{cases} (R^p\Gamma_Y)(R^q f_*)\mathcal{F} & = H^p(Y, R^q f_*(\mathcal{F})) \\ R^n(\Gamma_Y \circ f_*)\mathcal{F} & = H^n(X, \mathcal{F}) \end{cases}$$

Hơn nữa theo mệnh đề 3.1 thì Γ khớp trái f

Định lý 4.4 (Leray)**.** *Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục giữa các không gian topo và $\mathcal{F}$ là một bó các nhóm abel trên X. Khi đó tồn tại một dãy phổ trong góc phần tư thứ ba*

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(\mathcal{F})) \underset{p}{\Rightarrow} H^{p+q=n}(X, \mathcal{F})$$

Hoàn toàn tương tự xét dãy

$$\mathbf{Sh}(X) \xrightarrow{\text{forgetful}} \mathbf{pSh}(X) \xrightarrow{\check{H}^0} \mathbf{Ab}$$

Trong đó $\check{H}^0$ phụ thuộc vào một phủ mở $\mathcal{U}$, lưu ý rằng ta đang làm việc trong pham trù bó nên nói chung $\check{H}^0(\mathcal{U}) \neq \Gamma$. Hàm tử dẫn xuất của $\check{H}^0$ trong trường hợp này là $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ - tuy nhiên đây là một kết quả khó.

Dễ thấy hàm tử quên là liên hợp với hàm tử bó hóa (tiếng Anh, *sheafification*) nên hàm tử lãng quên là khớp trái. Xét tiền bó

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^p(\mathcal{F}) : \mathrm{Open}(X) &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ U &\longmapsto H^p(U, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Trong đó $\mathrm{Open}(X)$ là họ các tập mở của X được sắp xếp thứ tự bộ phận theo quan hệ bao hàm và do đó là một phạm trù. Kí hiệu $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ là đối đồng điều Čech của phủ mở $\mathcal{U}$ lấy hệ số trong ***tiền bó*** $\mathcal{G}$. Kết hợp cùng mệnh đề 5.8 ta có:

Định lý 4.5. *Với các giả thiết trên, tồn tại một dãy phổ*

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) \underset{p}{\Rightarrow} H^{p+q=n}(X, \mathcal{F})$$

Nếu $\mathcal{F}$ triệt tiêu trên tất cả các giao hữu hạn của một phủ mở (ta thường gọi đây là ***phủ Leray***

$$H^n(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, \mathcal{F}_{|U_{i_0 i_1 \ldots i_p}}) = 0$$

khi đó dãy phổ Čech-đối đồng điều suy biến và ta có định lý Leray:

Định lý 4.6 (Leray)**.** *Giả sử $\mathcal{U}$ là một phủ Leray đối với $\mathcal{F}$ khi đó tồn tại một đẳng cấu*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$$

Chú ý. Với những ai muốn tránh một chứng minh sử dụng dãy phổ thì có thể tham khảo Macdonald, Ian G. *Algebraic geometry. Introduction to schemes*, p.77 hoặc Taylor, *Joseph L. Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups*, p.177 hoặc tại đây hoặc đây.

Hệ quả 4.7. *Nếu X là một lược đồ tách được và $\mathcal{F}$ là một bó tựa nhất quán trên X. Gọi $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ là một phủ mở affine của X. Khi đó*

$$\check{H}^p(C(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = H^p(X, \mathcal{F}) \ \forall p \geq 0$$

5 Đối đồng điều Čech

Cố định một không gian topo X và một phủ mở $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ của X. Kí hiệu $U_{i_0 i_1 \ldots i_p} = \bigcap_{j=0}^{p} U_{i_j}$. Với mọi bó $\mathcal{F}$ xét *tập* các p - đối xích

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_p})$$

Ta sẽ định nghĩa các vi phân

$$\begin{aligned} d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ f &\longmapsto \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (f_{i_0 \ldots \hat{i_k} \ldots i_{p+1}})_{|U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} \end{aligned}$$

Dễ thấy $(C(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d)$ là một phức và ta kí hiệu đối đông điều của phức này là $\check{H}(C(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$.

Ví dụ 5.1. Dễ kiểm tra

$$\begin{cases} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \\ C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_{ij}) \\ d^0(\prod_{i \in I} f_i) = \prod_{i,j \in I} ((f_i)_{|U_{ij}} - (f_j)_{U_{ij}}) \end{cases}$$

Hệ quả ta có $\check{H}^0(C(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Định nghĩa 5.2. Nếu I là một tập chỉ số sắp thứ tự toàn phần thì ta định nghĩa p - đối xích thứ tự là

$$C^p_{ord}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \ldots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_p})$$

Với các vi phân d^p định nghĩa như trước thì $(C'(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d)$ vẫn là một phức.

Xét *cấu xạ*:

$$c : C_{ord}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

xác định bởi

$$c(s)_{i_0 i_1 \ldots i_p} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i_n = i_m \text{với } m, n \text{ nào đó} \\ sgn(\sigma) s_{i_{\sigma(0)} \cdots i_{\sigma(p)}} & \text{nếu } i_{\sigma(0)} < \ldots i_{\sigma(p)} \end{cases}$$

Khi I là một tập sắp thứ tự toàn phần thì ảnh của c được gọi là các đối xích thay phiên

$$\mathrm{Im} c := C_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Bổ đề 5.3. *Cấu xạ nhúng $i : Im(c) \to C(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ cảm sinh một đẳng cấu*

$$H^\bullet(C_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \cong \check{H}^\bullet(C(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

Chứng minh. Tham khảo tại Stack Project.

Hệ quả 5.4. *Khi I là một tập sắp thứ tự toàn phần thì ta có:*

$$H^\bullet(C_{ord}(\mathcal{U},\mathcal{F})) \cong \check{H}^\bullet(C(\mathcal{U},\mathcal{F}))$$

Hệ quả 5.5. *Khi I là một tập sắp thứ tự toàn phần và $|I| < \infty$ thì*

$$\check{H}^p(C(\mathcal{U},\mathcal{F})) = 0 \ \forall p \geq n$$

Ví dụ 5.6. Cho A là một vành giao hoán có đơn vị và $X = \mathrm{Proj}A[x,y] = \mathrm{P}^1_A$. Khi đó X có một phủ mở

$$\mathcal{U} = \{D_+(x), D_+(y)\} = \{U_0, U_1\}$$

Ta có:

$$\begin{cases} C^0_{ord}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(U_0) \times \mathcal{O}_X(U_1) \\ C^1_{ord}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(U_0 \cap U_1) \\ d^0(f_0, f_1) = ((f_1)_{U_{01}} - (f_2)_{U_{01}}) \end{cases}$$

Cụ thể hơn ta có

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(U_0) = A[y/x] \\ \mathcal{O}_X(U_1) = A[x/y] \\ \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_1) = A[x/y, y/x] \end{cases}$$

Và vi phân

$$\begin{aligned} A[y/x] \times A[x/y] &\longrightarrow A[y/x, x/y] \\ (f(y/x), g(x/y)) &\longmapsto g(x/y) - f(y/x) \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases} \check{H}^0(C(\mathcal{U},\mathcal{F})) = A[y/x] \cap A[x/y] = A \\ \check{H}^i(C(\mathcal{U},\mathcal{F})) = 0 \ \forall i \geq 1 \end{cases}$$

Ta có tiếp cận đối đồng điều Čech ở phiên bản dạng bó, ở cách tiếp cận này ta sẽ có thứ gọi là *giải thức Čech*. Trong một số trường hợp, giải thức này có thể dùng làm giải thức để tính đối đồng điều.

Với mỗi $p \geq 0$ và một phủ mở $\mathcal{U}$ xét:

$$\mathscr{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_n} i_*(\mathcal{F}_{|U_{i_0 \ldots i_n}})$$

trong đó i là nhúng chính tắc (*inclusion*) và i_* là đẩy xuôi (*pushforward*). Ta định nghĩa các vi phân $d^p : \mathscr{C}^p \to \mathscr{C}^{p+1}$ như ở công thức trước.

Từ định nghĩa ta có $\Gamma(X, \mathscr{C}^p(U,\mathcal{F})) = C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Quan trọng hơn là định lý sau:

Định lý 5.7. *Tồn tại một cấu xạ* $\epsilon : \mathcal{F} \to \mathscr{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ *sao cho ta có một dãy khớp:*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathscr{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to ...$$

Hơn nữa khi $\mathcal{F}$ là bó flasque thì $\mathscr{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ cũng là bó flasque vì nó là tích các bó flasque (đẩy xuôi của bó flasque là flasque theo 6.1). Do đó kết hợp với định lý 3.7 ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 5.8. *Nếu* $\mathcal{F}$ *là một bó flasque thì* $\check{H}^p(C(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = 0\ \forall p \geq 1$. *Nói riêng khi* $\mathcal{F}$ *là một bó nội xạ thì* $\check{H}^p(C(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = 0\ \forall p \geq 1$.

Ta mới chỉ định nghĩa đối đồng điều Čech cho một phủ mở và đối đồng điều này phụ thuộc vào cách chọn phủ mở. Để định nghĩa đối đồng điều Čech cho không gian ban đầu ta phải lấy giới hạn theo một cách hợp lí. Nhưng trước tiên ta đưa ra một phản ví dụ cho đối đồng điều Čech phụ thuộc phủ mở:

Ví dụ 5.9. Xét đường tròn $X = S^1$, ta chọn hai điểm A, B đối nhau qua tâm của X và xét phủ mở $\mathcal{U} = \{S^1 - A, S^1 - B\}$. Kí hiệu $\mathbb{Z}$ là bó hằng. Ta thấy $(S^1 - A) \cap (S^1 - B)$ là hợp của hai *đường thẳng*. Ta có:

$$\begin{cases} C^0 = \Gamma(U, \mathbb{Z}) \times \Gamma(V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ C^1 = \Gamma(U \cap V, \mathcal{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{cases}$$

Như vậy $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Nhưng xét phủ $\mathcal{V} = \{X\}$ thì ta thấy $\check{H}^1(\mathcal{V}, \mathbb{Z}) = 0$.

Định nghĩa 5.10. Cho hai phủ mở $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ của X. Ta nói $\mathcal{V}$ là *mịn hơn* $\mathcal{U}$, kí hiệu $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ nếu với mọi $U \in \mathcal{U}$ tồn tại $V \in \mathcal{V}$ sao cho $V \subset U$. Từ đó ta có thể định nghĩa một quan hệ *thứ tự* $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ nếu $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ và *đối đồng điều Čech*

$$H^p(X, \mathcal{F}) := \varinjlim H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

trong đó giới hạn lấy theo tất cả các phủ mở và quan hệ mịn.

Dễ thấy $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$, nói cách khác đối đồng điều Čech và đối đồng điều bó là đẳng cấu tại bậc 0; thậm chí hai đối đồng điều này vẫn đẳng cấu ở bậc 1 (Tennison, *Sheaf theory*, p.147). Tuy nhiên, chúng có thể không đẳng cấu ở các bậc cao hơn.

Định lý 5.11 (Serre)**.** *Nếu* $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ *là một dãy khớp các bó trên* X *thì tồn tại một dãy khớp với sáu hạng tử*

$$\begin{aligned} 0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(X, \mathcal{G}) \to \check{H}^0(X, \mathcal{H}) \\ \to \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{G}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Chứng minh. Serre, FAC, p.217.

Chú ý. Khi X là không gian paracompact thì dãy khớp trên có thể mở rộng thành dãy khớp dài với bậc tùy ý nhưng đây là kết quả không tầm thường nên ta bỏ qua chứng minh. Tuy nhiên nó có một hệ quả quan trọng:

Định lý 5.12 (Serre)**.** *Nếu X là không gian paracompact thì đối đồng điều Čech đẳng cấu với đối đồng điều bó*

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F}) \ \forall p \geq 0$$

Chứng minh. Serre, FAC, p.218.

Tiếp theo ta tới một số kết quả kết nối đối đồng điều bó, đối đồng điều kì dị và đối đồng điều de Rham:

Định lý 5.13. *Cho X là một không gian topo và A là một nhóm abel. Kí hiệu A_X là bó hằng với các thớ đẳng cấu với A. Khi đó:*

$$H^p(X, A_X) \cong H^p(X, A) \ \forall p \geq 0$$

trong đó bên phải là đối đồng điều kì dị.

Chứng minh. Xem chứng minh tại đây.

Từ định lý trên và định lý de Rham ta có:

Định lý 5.14. *Cho X là một đa tạp trơn, khi đó tồn tại một đẳng cấu:*

$$H^p_{dR}(X) \cong H^p(X, \mathbb{R}_X) \cong H^p(X, \mathbb{R})$$

6 Đối đồng điều của lược đồ

Bổ đề 6.1. *Cho $X = \operatorname{Spec}(A)$ là một lược đồ affine và $\mathcal{F}$ là một bó tựa nhất quán các $\mathcal{O}_X$-module. Khi đó với mọi họ hữu hạn các tập mở chính phủ X*

$$\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I, U_i = D(g_i), g_i \in A\}$$

thì ta có

$$\check{H}^p(U, \mathcal{F}) = 0 \ \forall p \geq 1$$

Chứng minh. Do $\mathcal{F}$ là bó tựa nhất quán các $\mathcal{O}_X$-module trên lược đồ affine nên nếu kí hiệu $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ thì $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Xét $f \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cap \ker d$, để chứng minh khẳng định ta cần chỉ ra $f' \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sao cho $df' = f$. Lưu ý do tập chỉ số I là hữu hạn và $\bigcap_{i=0}^k D(g_i) = D(\prod_{i=0}^k g_i)$ nên với mọi $i_0, i_1, \cdots i_p \in I$ tồn tại $x_{i_0 i_1 \ldots i_p} \in M$ và $r \in \mathbb{N}$ sao cho

$$f_{i_0 i_1 \ldots i_p} = \frac{x_{i_0 i_1 \ldots i_p}}{(g_{i_0} g_{i_1} \ldots g_{i_p})^r}$$

Lấy $i \in I$ thì theo giả thiết $f_{ii_0i_1\ldots i_p} = 0$ nên

$$\left(\frac{x_{i_0i_1\ldots i_p}}{(g_{i_0}g_{i_1}\cdots g_{i_p})^r} + \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\frac{g_{i_k}^r x_{ii_0\ldots\hat{i_k}\ldots i_p}}{g_i^r(g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r}\right)\Bigg|_{U_{ii_0i_1\ldots i_p}} = 0$$

Do đó tồn tại $l \geq 1$ sao cho

$$\frac{g_i^{r+l}x_{i_0i_1\ldots i_p}}{(g_{i_0}g_{i_1}\cdots g_{i_p})^r} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{g_i^l g_{i_k}^r x_{ii_0\ldots\hat{i_k}\ldots i_p}}{g_i^r(g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r}$$

Để ý rằng

$$X = \bigcup_{i\in I} D(g_i) = \bigcup_{i\in I} D(g_i^{n_i})\ \forall n_i \in \mathbb{N}^*$$

nên tồn tại $\{h_i \mid i \in I\} \subset A$ sao cho $1 = \sum_i h_i g_i^{r+l}$. Xét $f' \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ xác định như sau

$$(f')_{i_0\ldots i_{p-1}} = \sum_{i\in I} h_i g_i^l \frac{x_{ii_0\ldots i_{p-1}}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_{p-1}})^r} \in \mathcal{F}(U_{i_0\ldots i_{p-1}})$$

Với mọi $0 \leq k \leq p$ ta có:

$$(f')_{i_0\ldots\hat{i_k}\ldots i_{p-1}}\ |_{U_{i_0i_1\ldots i_p}} = \sum_{i\in I} h_i \frac{g_i^l g_{i_k}^r x_{ii_0\ldots i_{p-1}}}{(g_{i_0}g_{i_1}\cdots g_{i_p})^r}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}(df')_{i_0i_1\ldots i_p} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k(f'_{i_0\ldots\hat{i_k}\ldots i_p}) \mid U_{i_0i_1\ldots i_p} \\ &= \sum_{i\in I} h_i g_i^{r+l} f_{i_0i_1\ldots i_p} \\ &= f_{i_0i_1\ldots i_p}\end{aligned}$$

Do đó f' là phần tử cần tìm và ta có đpcm. ■

Kết hợp bổ đề 5.8 và định lý 4.7 ta có một hệ quả rất đẹp

Hệ quả 6.2. *Cho X là một lược đồ affine. Khi đó nếu $\mathcal{F}$ là một bó tựa nhất quán trên X thì*

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0\ \forall p \geq 1$$

Định lý đảo của hệ quả 6.2 cũng đúng, và nó gọi là tiêu chuẩn Serre về tính affine của lược đồ; đây cũng là mục đích chính khi tôi viết tài liệu này. Nhưng trước tiên chúng ta cần hai bổ đề kĩ thuật

Bổ đề 6.3. *Nếu X là một lược đồ quasi-compact thì X có ít nhất một điểm đóng.*

Chứng minh. Do X là quasi-compact nên X được phủ bởi một số hữu hạn mảnh affine $X = \cup_{i=1}^n U_i$. Lấy $x_0 \in X$ bất kì, giả sử $x_0 \in U_1$. Khi đó $\overline{\{x_0\}} \cap U_1$ chứa ít nhất một điểm đóng của U_1, gọi một điểm như vậy là x_1. Nếu x_1 không là điểm đóng trong X thì nó không đóng trong ít nhất một $U_i, i \neq 1$. Không giảm tổng quát giả sử $i = 2$ và $x_2 \in \overline{\{x_1\}} \cap U_2$ là một điểm đóng trong U_2. Lưu ý rằng $x_2 \notin U_1$ vì trái lại $x_2 \in \overline{\{x_1\}} \cap U_1 \cap U_2 = \{x_1\} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_2$ đóng trong U_2 (vô lý). Lặp lại lập luận này ta tìm được một điểm $x_{n+1} \notin U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n = X$ (vô lý). Do đó ta có đpcm. ■

Định lý 6.4 (Tiêu chuẩn Serre)**.** *Cho X là một lược đồ quasi-compact. Khi đó các khẳng định sau tương đương*

(i) X là affine.

(ii) Với mọi bó tựa nhất quán $\mathcal{F}$ trên X thì $H^p(X, \mathcal{F}) = 0\ \forall p \geq 1$.

(iii) Với mọi ideal tựa nhất quán $\mathcal{I}$ trên X thì $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$.

Chứng minh. Dễ thấy $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow$ là hiển nhiên. Do vậy ta chỉ cần chứng minh $(iii) \Rightarrow (i)$.

Đặt $A = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Ta cần chứng minh cấu xạ lược đồ chính tắc $X \to \operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ (xác định bởi ánh xạ đồng nhất $\mathrm{id} : \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ là đẳng cấu.

Do X là quasi-compact nên X chứa ít nhất một điểm đóng. Gọi điểm đóng này là $\{x\}$ và gọi $\mathcal{M}$ là bó ideal các $\mathcal{O}_X$-module là bó cấu trúc duy nhất trên $\{x\}$ làm cho tập đóng này là một lược đồ con đóng rút gọn của $(X, \mathcal{O}_X)$. Gọi U là một lân cận mở affine của x và xét bó ideal $\mathcal{J}$ thỏa mãn

$$V(\mathcal{J}) := X - U$$

Khi đó ta có dãy khớp

$$0 \to \mathcal{M}\mathcal{J} \to \mathcal{J} \to \mathcal{J}/\mathcal{M}\mathcal{J} \to 0$$

Dễ thấy

$$(\mathcal{J}/\mathcal{M}\mathcal{J})_y = \begin{cases} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x) & \text{nếu } y = x \\ 0 & \text{nếu } y \neq x \end{cases}$$

Do đó $\mathcal{J}/\mathcal{M}\mathcal{J}$ là bó chọc trời (tiếng Anh, *skyscraper*) tại x. Theo giả thiết $H^1(X, \mathcal{M}\mathcal{J}) = 0$ nên sử dụng dãy khớp dài ta thấy $\mathcal{J}(X) \to k(x) = (\mathcal{J}/\mathcal{M}\mathcal{J})(X) \to 0$. Do đó tồn tại $f \in \mathcal{J}(X)$ sao cho $f_x \notin \mathfrak{m}_x$. Nói cách khác $x \in X_f \subset U$. Ta thấy $X_f = D(f_{|U})$, nói riêng X_f là affine.

Ta thấy $W = \cup X_f$ mà X_f là affine là tập mở do X_f là mở. Hơn nữa W chứa mọi điểm đóng của X nên nếu $X \neq W$ thì $X \neq W \subset X$ là tập đóng nên quasi-compact và do đó chứa một điểm đóng bên ngoài W của X, điều này là vô lí nên $X = \cup X_f$. Nhưng X là quasi-compact nên phủ này có thể lấy hữu hạn $X = \cup_{i=1}^n X_{f_i}$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $(f_1, f_2, ..., f_n) = A$. Xét một dãy khớp

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_X^{\oplus n} \xrightarrow{f_1, f_2, ..., f_n} \mathcal{O}_X \to 0$$

Trong đó đồng cấu xác định bởi $f_1, f_2, ..., f_n$ là toàn cấu do X_{f_i} phủ X.

Xét một lọc của $\mathcal{F}$:

$$0 \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X \subset ... \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^n = \mathcal{F}$$

Đặt $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^i$ khi đó $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ là một ideal tựa nhất quán nên $H^1(X, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}) = 0$ và ta có một dãy khớp

$$0 \to \mathcal{F}_{i-1} \to \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \to 0$$

Nên có sinh ra một dãy khớp

$$H^1(X, \mathcal{F}_{i-1}) \to H^1(X, \mathcal{F}_i) \to H^1(X, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1})(= 0)$$

Do đó bằng quy nạp ta thấy $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ hay $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^{\oplus n}) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ là toàn cấu, đây là đpcm. ■

Ví dụ 6.5 (Mặt phẳng bỏ đi điểm gốc)**.** Xét $X = \mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ trong đó k là một trường. Bằng phép dán thông thường ta thấy $X - \{(0, 0)\} = U$ không là affine do $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = k$. Nhưng bằng tiêu chuẩn Serre ta có thể kiểm tra điều này bằng cách tính nhóm đối đồng điều của nó. Xét một phủ mở affine

$$U = D(x) \cup D(y)$$

Trong đó

$$\begin{cases} D(x) = \mathrm{Spec}(k[x, y, 1/x]) \\ D(y) = \mathrm{Spec}(k[x, y, 1/y]) \end{cases}$$

Do đó phức Cech là

$$k[x, y, 1/x] \oplus k[x, y, 1/y] \overset{(f,g) \mapsto f-g}{\longrightarrow} k[x, y, 1/x, 1/y] \to 0$$

Do đó

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = k[x, y, 1/x, 1/y]/\mathrm{Im}(d)$$

Nhưng $\mathrm{Im}(d) = k[x, y]$ nên

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Span}(x^i y^j \mid i, j < 0)$$

Do đó theo tiêu chuẩn Serre thì U không là affine.

7 Định lý Chevalley

Định lý 7.1. *Cho X là một lược đồ và $\mathcal{J}$ là một ideal tựa nhất quán và lũy linh, tức là $\exists n \geq 1 : \mathcal{J}^n = 0$. Gọi X_0 là lược đồ con đóng xác định bởi $\mathcal{J}$ sao cho $|X| = |X_0|$. Khi đó X là affine khi và chỉ khi X_0 là affine.*

Chứng minh. Nếu X là affine thì mọi lược đồ con đóng của nó là affine (hệ quả 2.7) do đó ta chỉ cần chứng minh nếu X_0 là affine thì X là affine.

Đặt $V_k = V(\mathcal{J}^{k+1})$ khi đó ta có $X_{n-1} = X$ và X_{k-1} là lược đồ con đóng của X_k xác định bởi một lược đồ con đóng có bình phương triệt tiêu. Do đó không giảm tổng quát ở giả thiết của định lý ta giả sử $n = 2$. Gọi $i : X_0 \to X$ là nhúng đóng. Do X_0 là affine nên X_0 là quasi-compact và tách được nên X cũng là quasi-compact và tách được (hai tính chất này chỉ phụ thuộc vào không gian topo nền). Gọi $\mathcal{F}$ là một bó tựa nhất quán các $\mathcal{O}_X$-module ta sẽ chứng minh $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ và kết luận điều cần chứng minh bằng tiêu chuẩn Serre. Xét dãy khớp

$$0 \to \mathcal{J}\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F} \to 0$$

nó cảm sinh một dãy khớp

$$H^1(X, \mathcal{J}\mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F})$$

Ta lại thấy $\mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}$ là một bó tựa nhất quán các $\mathcal{O}_{X_0}$-module ($\mathcal{O}_{X_0} = \mathcal{O}_X/\mathcal{F}$). Hơn nữa $i^*(\mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}) = \mathcal{J}\mathcal{F}/\mathcal{J}^2\mathcal{F} = \mathcal{J}\mathcal{F}$ nên ta có thể coi $\mathcal{J}\mathcal{F}$ là một bó tựa nhất quán các $\mathcal{O}_{X_0}$-module. Như vậy

$$H^1(X, \mathcal{J}\mathcal{F}) = H^1(X, \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}) = H^1(X_0, \mathcal{J}\mathcal{F}) = H^1(X_0, \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}) = 0$$

Điều này suy ra $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ và ta có đpcm. ■

Khi $\mathcal{J}$ là căn nguyên tố (tiếng Anh, *nilradical*), $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ và X là Noether thì ta có hệ quả sau

Hệ quả 7.2. *Cho X là một lược đồ Noether, khi đó X là affine khi và chỉ khi X_{red} là affine.*

Định lý 7.3. *(Chevalley) Cho Y là một lược đồ Noether và $f : X \to Y$ là một toàn cấu hữu hạn (tiếng Anh, finite surjective morphism) của các lược đồ. Khi đó Y là affine khi và chỉ khi X là affine.*

Chứng minh. Omitted. ■

8 Định lý tái dựng Gabriel-Rosenberg

Trong khi tìm hiểu về chứng minh tiêu chuẩn Serre mình vô tình tìm thấy một bài viết liên quan trên blog của tác giả Amathew. Mình chưa có thời gian kiểm chứng việc này tuy nhiên có một comment về định lý Gabriel-Rosenberg về bài báo của hai tác giả cùng tên:

Định lý 8.1 (Gabriel-Rosenberg)**.** *Cho X, Y là hai lược đồ tựa compact và tựa tách được. Nếu hai phạm trù $\mathrm{QSh}(X), \mathrm{QSh}(Y)$ của các bó tựa nhất quán trên X, Y là đẳng cấu thì X và Y là đẳng cấu.*

Ý tưởng của hai tác giả này là xây dựng phổ của một phạm trù abel mà trong trường hợp đủ tốt suy biến về phổ của vành (tức lược đồ affine). Định lý này đóng vai trò là điểm xuất phát của hình học đại số không giao giao (*noncommutative algebraic geometry*).

Tài liệu

[1] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[2] Q.Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, R.Erné trans., Oxford Grad. Texts in Math. **6**, Oxford U.P., Oxford, 2002.

[3] U. Gortz and T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.

[4] Rotman, J.J., *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.

[5] N.B.Châu, *Giáo trình hình học đại số*, bản tháng 8 năm 2013, free available.

[6] R.Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, version of Nov. 18, 2017.

[7] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, https://stacks.math.columbia.edu/.

[8] The nLab Authors, *ncatlab*, https://ncatlab.org/nlab/show/Gabriel-Rosenberg+theorem.