

Câu chuyện toán học dài 2.500 năm:
PYTHAGORAS - DIOFANTUS -
FERMAT - WILES

Báo cáo tổng quan của Trần Văn Nhung

(Bài viết này đã được hoàn thành vào những ngày đầu Đông đẹp hiếm có, năm 2019. Tài liệu tham khảo chủ yếu là cuốn sách [A], cộng thêm ba cuốn sách [N1-N3] và Google [G]. Vì “ngoại đạo” và ít am hiểu nhưng lại thích thú các vấn đề được đề cập đến ở đây, do đó tôi đã cố gắng, thử viết sơ lược lại câu chuyện dài kỳ này và mong được các chuyên gia, các bạn FB góp ý, chỉ cho những sai sót để chỉnh sửa. Xin cảm ơn!)

Tóm tắt Báo cáo

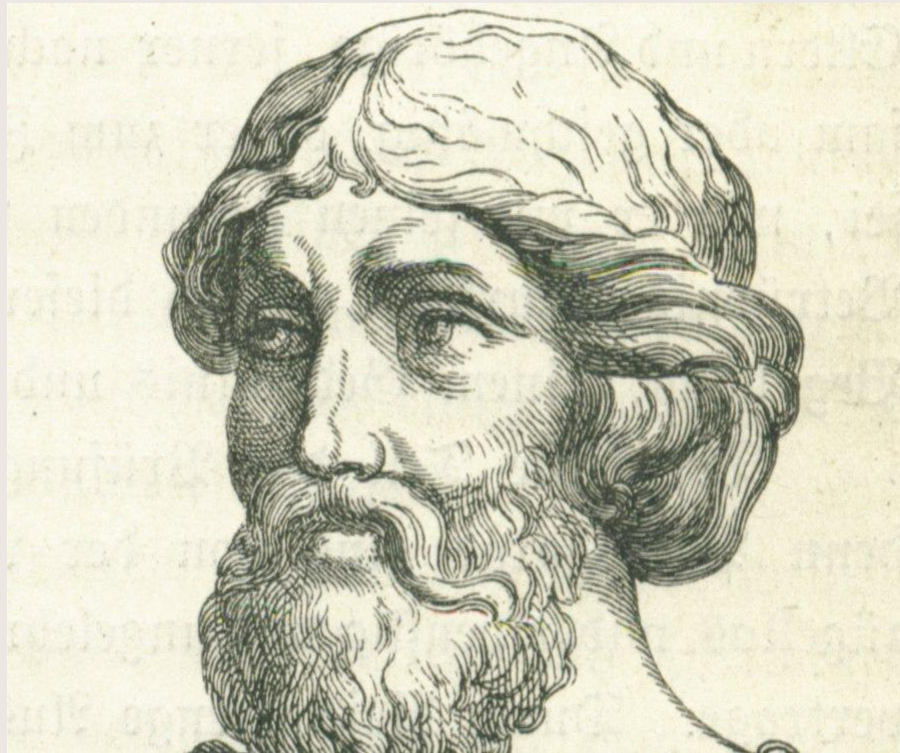
- Toàn bộ câu chuyện toán học dài 25 thế kỷ này chủ yếu xoay quanh các phương trình (PT) Diofantus $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, được đặt theo tên nhà toán học (TH) Hy Lạp **Diofantus** (200/214 – 284/298, 84 tuổi), tác giả của bộ sách *Arithmetica* (số học). P là đa thức hệ số nguyên, chỉ xét nghiệm nguyên.
- PT **Pythagoras** (580/572-500/490 TCN, nhà TH Hy Lạp) $x^2 + y^2 = z^2$ với x, y, z nguyên dương, có lẽ là một trong các PT Diofantus được biết đến sớm nhất.
- Khi đọc về PT Pythagoras trong *Arithmetica*, luật sư kiêm nhà TH nghiệp dư Pháp Pierre de **Fermat** (1601 - 1665) đã khẳng định PT Diofantus $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3$) không có nghiệm nguyên dương x, y, z (**Định lý lớn Fermat**). Sau 357 năm "chạy tiếp sức" của cả nhân loại, Andrew **Wiles** (SN 1953, người Anh) đã hoàn tất chứng minh Định lý lớn Fermat vào năm 1994.

Ý tưởng chứng minh ĐL lớn Fermat

- Giả thuyết Gerhard Frey (Đức, GT Epsilon, 1986):
Giả thuyết Shimura-Taniyama $\Rightarrow$ Định lý lớn Fermat.
Ken Ribet, CSU Berkeley (Mỹ), năm 1990 đã chứng minh GT Frey là đúng.
- Giả thuyết Shimura - Taniyama (Nhật Bản, 1965):
Mọi hàm (đường cong) elliptic đều là dạng modula.
Andrew Wiles (Anh, 1994) đã CM Giả thuyết Shimura - Taniyama là đúng và như vậy đã hoàn thành CM ĐLL F.
- B. Mazur (Harvard) ảnh hưởng lớn đến Wiles, Frey, Ribet, ... trong việc CM ĐLL Fermat.

Pitagoras

(570 – 495 BC, Nhà triết học cổ Hy Lạp)



Diofantus

(200/214 – 284/298, 84 tuổi, Alexandria, nhà toán học Hy Lạp)



Pierre de Fermat

(1601 - 1665, luật sư, nhà toán học nghiệp dư Pháp)



Andrew Wiles

(SN 1953, người Anh, 1993-94 CMX Định lý lớn Fermat)



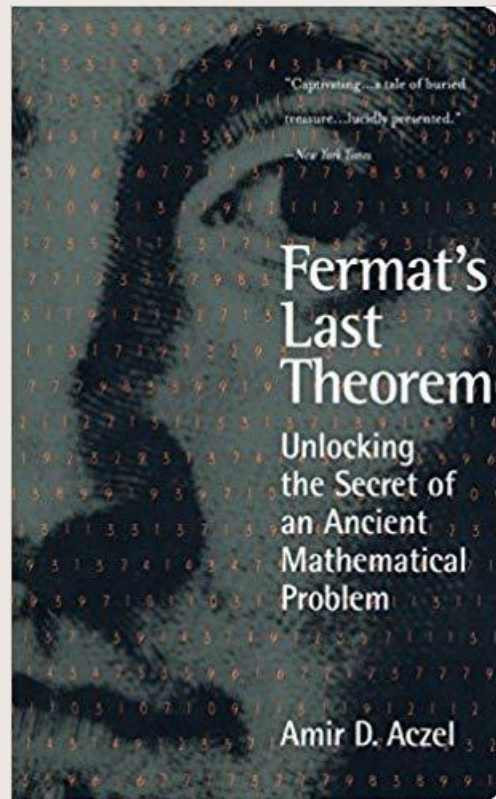
A. Wiles mô tả quá trình 7 năm lao động miệt mài để khám phá điều huyền bí vĩ đại của toán học (Xem [A])

"Có lẽ tốt nhất tôi sẽ trình bày kinh nghiệm làm toán của mình giống như việc đi vào một lâu đài tối om. Bạn bước vào phòng thứ nhất và trong đó tối đen như mực. Bạn bước đi loạng choạng, va đập vào đồ đạc trong phòng. Dần dần, bạn cũng biết được vị trí của từng thứ một. Và cuối cùng, sau khoảng sáu tháng bạn lần ra công tắc đèn rồi bật lên. Ngay lập tức mọi thứ được soi tỏ và bạn thấy rõ mình đang ở đâu. Thế rồi bạn bước vào phòng tiếp theo và ở đó lại chỉ là bóng tối..."

Đó là cách mà Giáo sư Andrew Wiles đã miêu tả quá trình 7 năm trời ông miệt mài làm việc để khám phá ra điều huyền bí vĩ đại của toán học.

Bìa cuốn sách của Amir D. Aczel

về Định lý lớn Fermat, NXB FWEW, New York/London, 1996



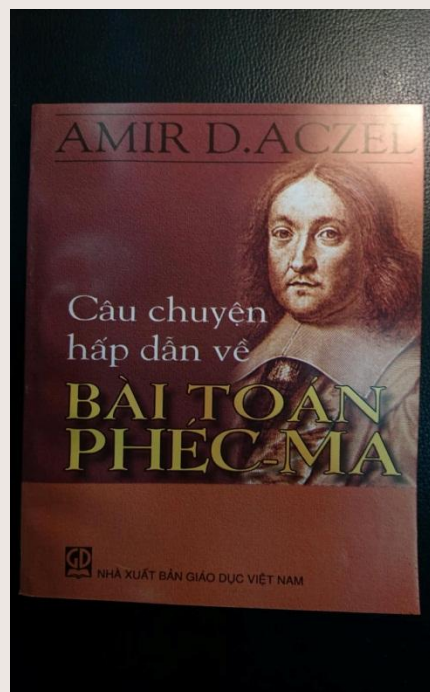
Amir. D. Aczel

(GS toán học Mỹ gốc Hung, Tác giả cuốn sách [A] về ĐLL Fermat)

“Điều thú vị của Định lý lớn Fermat chính là ở chỗ nó nói lịch sử toán học từ buổi đầu của nền văn minh tới thời đại của chúng ta. Và lời giải cuối cùng của Bài toán cũng nói liên hầu như toàn bộ các ngành trong phạm trù toán học, bao gồm cả các lĩnh vực nằm ngoài lý thuyết số như đại số, giải tích, hình học và topo.”

Bìa cuốn sách dịch [A]

bởi TV Nhung, ĐT Hậu, NK Chi, NXB GDVN, 2012, tái bản lần thứ 6
(Lời giới thiệu của GS HH Khoái; Nhận xét của GS PD Diệu)



Pythagoras

Nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>

- Người Hy Lạp, sinh khoảng năm 580 đến 572 TCN, mất khoảng năm 500 đến 490 TCN (ngang thời Khổng Tử ở Trung Quốc).
- Người sáng lập ra phong trào tín ngưỡng có tên học thuyết Pythagoras.
- Một nhà khoa học và toán học vĩ đại.

Pythagoras (2)

- Nổi tiếng nhờ Định lý Tam giác vuông: $a^2 + b^2 = c^2$. Diện tích của hình vuông cạnh c bằng tổng diện tích của hai hình vuông cạnh a và b .
- Định lý Pythagoras với kỷ lục hơn 370 cách chứng minh. (Theo PGS. TD. Phụng)
- “Diễn đàn Toán học Việt Nam” (5/5/2019) nêu đề thi văn “lạ”: “Hãy viết một đoạn văn trình bày suy nghĩ của anh/chị về câu nói: "Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông". (Cho toán làm văn!). Có rất nhiều cách làm, một ví dụ là em Trương Phan Minh Thảo, học sinh THPT ở TPHCM. Hoan nghênh sự sáng tạo khi ra đề và làm bài văn!
- Cho văn làm toán: Ví dụ Bài thơ tính tuổi (84) Diofantus ghi trên mộ chí của Ông, xem: <https://news.zing.vn/bai-tho-do-tuoi-tren-mo-nha-toan-hoc-noi-tieng-post605768.html>

Pythagoras (3)

- Pythagoras cũng là "cha đẻ của số học". PT Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$ cũng là một PT Diofantus đặc biệt: Có thể phân tích một số chính phương thành tổng của hai số chính phương khác.
- PT này có vô số nghiệm nguyên (x, y, z) không tầm thường $(x, y, z \neq 0)$, tức là có vô số bộ ba Pythagoras (x, y, z) không tầm thường. Pythagoras còn nêu cách tìm mọi nghiệm của PT. (GS TV Thiệu đã bổ sung vào chỗ này).
- Như vậy PT Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$ vừa có ý nghĩa hình học vừa số học.
- $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3$) là PT Fermat, liên quan đến các đường cong Elliptic.

Diofantus

(200/214 – 284/298, 84 tuổi, Alexandria, Hy Lạp)

- "Cha đẻ của ngành đại số", một trong những nhà toán học đầu tiên ký hiệu hóa đại số.
- Tác giả của bộ sách có tên gọi *Arithmetica* (số học), nêu cách giải các phương trình đại số, ngày nay một số quyển đã bị thất lạc.
- Diofantus là nhà toán học đầu tiên công nhận phân số là những con số; vì vậy ông đã chấp nhận số hữu tỷ dương làm hệ số và nghiệm.

Diofantus (2)

- PT Diofantus là các PT đại số có hệ số nguyên và chỉ tìm những nghiệm nguyên $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, trong đó P là đa thức với các hệ số nguyên và $x_1, x_2, \dots, x_n$ nguyên.
- Các ví dụ về PT Diofantus vô định: Bài toán 100 con gà (Trương Khâu Kiến, Trung Quốc, Thế kỉ V); bài toán 1.000 voi, dê, ngựa với 1.000 người chăn (Lương Thế Vinh, thế kỉ XV); bài toán “Trăm trâu, trăm cỏ...” (xem trong Đào Trọng Đủ, 1950);... (xem bài báo của Tạ Duy Phụng, Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ, 11/2019).
- Còn nhiều PT Diofantus dạng Fermat không biết có nghiệm hay không và còn có nhiều đường cong elliptic như đường cong Fermat.

Diofantus (3)

- **Bài toán thứ 10 Hilbert** (Paris, 1900): *“Hãy chỉ ra một phương pháp mà nhờ nó, sau một số hữu hạn các phép toán có thể khẳng định rằng một PT Diophantus là có nghiệm nguyên hay không”*.
- Sau 70 năm “chạy tiếp sức” của nhiều nhà toán học tài năng để giải quyết BT 10 Hilbert, người hoàn tất chặng đường cuối cùng (1970) là nhà toán học/NCS 23 tuổi **Yuri Matiyasevich** (Saint Petersburg, CHLB Nga).
- Những người đóng góp chính vào việc giải BT10 Hilbert: Emil Leon Post (1940), Martin Davis (1949-69), Julia Robinson (1950-60), Hilary Putnam (1959-69) và kết thúc là Yuri Matiyasevich (1970).

Diofantus (4)

- Câu trả lời của Matiyasevich cho BT 10 Hilbert là phủ định: *Không tồn tại phương pháp chung để với mọi phương trình Diophantus cho trước, có thể khẳng định được rằng nó có nghiệm (nguyên) hay không.*
- Yuri Matiyasevich: SN 2/3/1947, HCV IMO 1964 (Moscow); khi đang là NCS năm thứ hai (của GS S. Maslov) đã có báo cáo ngắn tại ICM 1966 (Moscow) và được mời báo cáo ở Tiểu ban Logic toán tại ICM 1970 (Nice, Pháp) vì đã giải xong BT 10 Hilbert; trở thành GS. năm 1995, Viện sĩ Thông tấn năm 1997, VS. năm 2008.

(Nguồn: 1. MathSciNet, MR0414341 (54 # 2444)

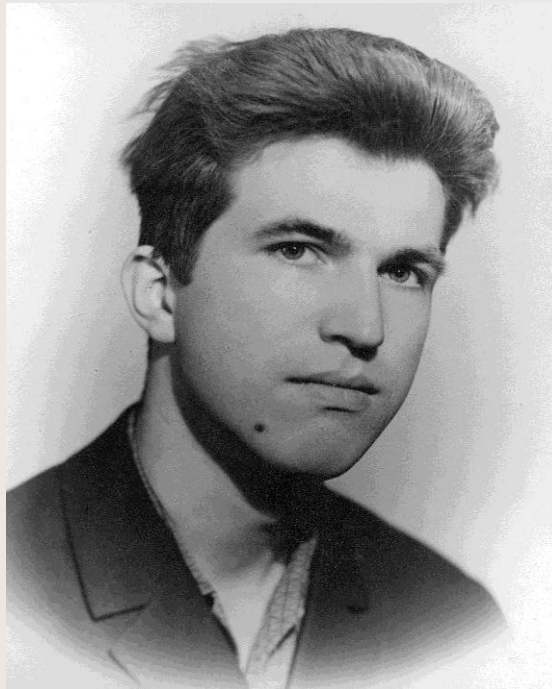
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Yuri_Matiyasevich

3. Hilbert-Turing-Matiyasevich the 10th Problem and Turing Machines <https://www.cse.iitk.ac.in/users/nitin/talks/Oct2012-Turing.pdf>

- Xem bài giới thiệu về BT 10 Hilbert và Y. Matiyasevich của GS. TSKH. Phan Đình Diệu, Toán học và Tuổi trẻ, số 56, 10-11/1970.

Yuri Matiyasevich

(SN 2/3/1947, Saint Petersburg, CHLB Nga)



Pierre de Fermat (1601 – 1665)

- Luật sư và nhà toán học nghiệp dư người Pháp, từ 1648 là ủy viên Hội đồng tư vấn của Nghị viện Toulouse, suốt 17 năm. Theo E.T. Bell (đầu thế kỷ XX): Fermat là "*Hoàng tử của những người nghiệp dư*"; vĩ đại không kém các nhà toán học "chuyên nghiệp" kiệt xuất trên thế giới, ở mọi thời đại!
- Năm 2000, khi đến Toulouse (Pháp) tôi tìm thăm nhà riêng hoặc viện bảo tàng Fermat, nhưng không có, nên đã thăm Lycée Pierre-de-Fermat và ngắm bức tượng của Ông trong Tòa Thị chính TP.
- Một trong những thành tựu đáng kinh ngạc của Fermat là Ông đã đưa ra các tư tưởng cơ bản của giải tích toán học trước cả I. Newton và G.W. Leibniz. Có lần Ông nói: "*Tôi đã tìm được rất nhiều định lý đẹp vô cùng*", và thường ghi vội các định lý đó trên lề các cuốn sách cổ.

Fermat (2)

- **Fermat phỏng đoán** $F(n) = 2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố với mọi n nguyên không âm, dựa vào một “điều kiện cần” đơn giản: Nếu $2^k + 1$ là số nguyên tố thì k phải là lũy thừa của 2. Fermat tin đây cũng là điều kiện đủ và mới kiểm tra với $n = 0, 1, 2, 3, 4$ thì đều thấy đúng. Năm 1732, Euler đã cho phản thí dụ với $n = 5$ và chỉ ra rằng $F(5) = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$.
- Cho đến nay thì “tạm thời” chỉ có 5 giá trị $n = 0, 1, 2, 3, 4$ làm cho Phỏng đoán Fermat đúng và 5 số nguyên tố Fermat tương ứng là $F = 3, 5, 17, 257$ và 65.537 . Chưa biết thêm được số nguyên tố Fermat nào mới!
- Các số Fermat mà nguyên tố được gọi là **số nguyên tố Fermat**.
- **Định lý Gauss-Wantzel:** *Điều kiện cần và đủ để có thể vẽ được một đa giác đều N cạnh nội tiếp trong vòng tròn, bằng thước kẻ và compa, là N có dạng $N = 2^k \cdot F$, trong đó F là tích của m số nguyên tố Fermat nào đó, k và m là các số nguyên không âm.*

Và Gauss đã dựng được đa giác đều $N = 17$ cạnh ($17 = 2^0 \cdot F(3) = 1 \cdot 17 = 17$). Theo di chúc của Ông, trên mộ Ông có hình vẽ đa giác đều 17 cạnh.

<https://docvui-suyngghi.net/nguyen-cuu/kqnc13/>

Fermat (3)

- Fermat thường đưa ra rất nhiều giả thuyết, phỏng đoán, và đa số là ... sai. Nhưng chỉ cần một ít mệnh đề đúng trong số đó cũng đủ làm ông ... nổi tiếng. Sai cũng vẫn làm ông nổi tiếng! Một số khẳng định đúng của Fermat:

Định lý nhỏ Fermat: Nếu p là số nguyên tố, a là số nguyên thì $a^p - a$ chia hết cho p .

Định lý Giáng sinh Fermat Euler: Nếu p là số nguyên tố dạng $4k+1$ thì tồn tại các số nguyên a, b sao cho $p = a^2 + b^2$.

Fermat (4)

Bổ đề Fermat: Nếu f liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và đạt cực trị tại c thuộc (a, b) thì $f'(c) = 0$.

Nguyên lý Fermat: Ánh sáng luôn đi theo đường đi ngắn nhất về mặt thời gian.

Định lý lớn Fermat: Với $n \geq 3$ thì phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên (x, y, z) với $xyz \neq 0$.

(Chú ý thêm điều kiện $xyz \neq 0$, vì ta có các nghiệm tầm thường $(x, 0, x)$ và $(0, y, y)$).

TS. Trần Nam Dũng đã góp cho nhiều ý kiến hay ở đây.

Fermat (5)

- **Câu hỏi:** Có hay không đa thức/công thức $P = P(n)$ mà $P(n)$ là nguyên tố với mọi $n = 1, 2, \dots, n, \dots$? Không!

Tìm đa thức (bậc $n > 1$) nhận vô số giá trị nguyên tố, hình như cũng vẫn chưa có câu trả lời? (PGS. TD. Phuong).

Hai “đa thức hiếm”: $n^2 + n + 41$ nguyên tố với $n = 1, 2, 3, \dots, 39$ và $n^2 - 79n + 1601$ nguyên tố với $n = 0, 1, \dots, 79$; khi n lớn hơn và khi $n \rightarrow \infty$? Chưa biết!

- Khi nghiên cứu *Arithmetica*, Fermat đã kết luận PT Diofantus $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3$) không có nghiệm nguyên (không tầm thường) và đã ghi chú rằng ông đã tìm thấy "một cách chứng minh tuyệt diệu nhưng không viết ra được vì lề sách hẹp quá", nay có tên là Định lý lớn Fermat.

Fermat (6)

Năm 1637 Fermat đã viết (*nguyên văn*) trên lề cuốn sách của Diofantus, đoạn nói về việc phân tích một số chính phương thành tổng của hai số chính phương khác: “*Không thể phân tích một lập phương thành tổng của hai lập phương, hoặc một trùng phương thành tổng của hai trùng phương, hay, một cách tổng quát, bất kỳ một lũy thừa nào khác 2 thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã tìm được một chứng minh thật tuyệt diệu cho nhận xét này, nhưng đáng tiếc, lề sách không đủ rộng để ghi ra đây*”.

Có vô số bộ ba Pythagoras nguyên

- Sau này quá trình đi tìm chứng minh cho Định lý lớn Fermat đã tạo ra những tiến bộ to lớn cho Lý thuyết số, cho việc nghiên cứu các PT Diofantus, hình học Diofantus và xấp xỉ Diofantus, những ngành quan trọng của toán học cho đến hiện nay.
- Như chúng ta biết PT Pythagoras $x^2+y^2=z^2$ có vô số nghiệm nguyên (x, y, z) , tức là x, y, z là các số nguyên khác 0. Như vậy có vô số bộ ba Pythagoras (x, y, z) nguyên. Một bộ ba nổi tiếng nhất là 3, 4, 5.
- Chia cả hai vế cho $z \neq 0$, ta có $(x/z)^2+(y/z)^2=1$, hay $a^2+b^2=1$ có vô số nghiệm (điểm) hữu tỷ (a,b) , a và b là các số hữu tỷ. Như vậy trên vòng tròn đơn vị có vô số điểm hữu tỷ (a,b) .

Chứng minh ĐLL Fermat (1)

- **$n=3$ và $n=4$:** Được CM bởi **Fermat**; với $n=4$ bằng phương pháp rất hay là “xuống thang” (giảm vô hạn, infinite descent). Chính Fermat lưu ý rằng: Nếu $x^n + y^n = z^n$ đúng với một n nào đó (x, y, z nguyên), thì nó cũng đúng với mọi bội số của n . Do đó chỉ cần xét với n nguyên tố > 2 .

L. Euler cũng chứng minh cho $n=3, n=4$, độc lập với Fermat, (với $n=3$, Euler mắc lỗi và sau này được C. F. Gauss đính chính);

- **$n=5$:** Được CM bởi **P. G. L. Dirichlet** (1828).

- **$n=3, 4, 5$:** Cũng được chứng minh bởi **A. M. Legendre** (1830);

- **$n=7$:** Được CM bởi **G. Lamé**, sau đó được H. Lebesgue hiệu đính (1840).

⇒ **Sau 2 thế kỷ** (từ thời Fermat), Định lý lớn Fermat mới chỉ được chứng minh cho **$n=3, 4, 5, 6$ và 7** , mới “nhích được 5 bước chân đầu tiên”!

Chứng minh ĐLL Fermat (2)

- Đến những năm **1990**, nhờ máy tính điện tử hiện đại, người ta đã chứng minh được rằng Fermat đúng với mọi $n < 4$ triệu. Thế còn với $n \geq 4$ triệu?
- Tại sao thiên tài toán học Đức vĩ đại nhất thế giới lúc đó, **C. F. Gauss** (1777-1855), lại không bao giờ thử chứng minh Định lý lớn Fermat? Ngày 7/3/1816, H. W. M. Olbers, từ Bremen (Đức), bạn của Gauss, thông báo cho Gauss: Viện HLKH Paris treo giải thưởng rất lớn cho ai chứng minh hoặc bác bỏ được Định lý lớn Fermat.

Nhưng Gauss (nhà lý thuyết số thiên tài) đã không bị cám dỗ, vì theo Ông, Định lý lớn Fermat rất dễ làm người ta ngộ nhận và Ông là nhà toán học duy nhất ở Châu Âu lúc đó nhận thức rõ rằng việc chứng minh Định lý lớn Fermat khó khăn đến mức nào. Điều này lý giải vì sao trong số 23 Bài toán Hilbert năm 1900, không có Bài toán lớn Fermat. Chỉ vì nó là siêu bài toán!

Chứng minh ĐLL Fermat (3)

- Ngoài lý thuyết số, giải tích toán học và xác suất, Gauss còn đóng góp to lớn cho giải tích phức, một ngành toán học gắn liền với số ảo i do Euler đề xướng. Số ảo đóng vai trò quyết định nhận thức của thế kỷ XX về Định lý cuối cùng của Fermat.
- Nhà nữ toán học **Sophie Germain** (1776-1831, giả nam với tên "Ngài Leblanc", hay trao đổi với Gauss) là một trong số các nhà toán học cổ điển đóng vai trò quan trọng nhất vào quá trình giải Bài toán lớn Fermat:

Định lý Germain: *Nếu phương trình Fermat: $x^n + y^n = z^n$ có nghiệm với $n=5$ thì cả x, y, z đều chia hết cho 5.*

⇒ Tách Định lý lớn Fermat thành hai trường hợp I và II: n không chia hoặc chia hết cho 5; sau đó Bà tổng quát hóa cho cả $n \neq 5$ và chứng minh rằng Định lý lớn Fermat đúng trong trường hợp I với mọi n nguyên tố nhỏ hơn 100.

Chứng minh ĐLL Fermat (4)

- 1850: Viện HLKH Paris lại tuyên bố tặng HCV và 3.000 FF cho ai giải được Bài toán lớn Fermat;
- 1856: Rút lại, vì cho rằng Bài toán lớn Fermat dường như không thể giải được;
- 1908: Đức treo giải thưởng Wolfskehl 100.000 Mark. Ngay năm đầu đã có 621 "lời giải", đều sai hết! Các năm sau đó hàng ngàn "lời giải" sai tiếp tục đổ về...
- VN chúng ta có lẽ cũng là nước có không ít “lời giải” cho Bài toán lớn Fermat, Chia một góc thành 3 phần đều nhau bằng thước kẻ và compa, Bài toán 4 màu (xong 1976, theo GS TV Thiệu), Cầu phương hình tròn của Trí Uẩn, ...!

Chứng minh ĐLL Fermat của G. Lamé (1795-1870):

- 1/3/1845, tại Viện HLKH Paris, G. Lamé thông báo đã CMX Định lý lớn Fermat, nhưng J. Liouville (1809 - 1882) đã chỉ ra chứng minh đó sai.
- Sau đó, E. E. Kummer (1810-1893) tiếp tục ý tưởng của Lamé về việc phân tích vế trái $x^n + y^n$ thành các thừa số và phát minh ra một lý thuyết toán học mới, lý thuyết về các "số lý tưởng", và đến thập niên 50 của thế kỷ XIX, nhờ Kummer, Định lý lớn Fermat đã được chứng minh với mọi $n < 100$.

Đường cong Elliptic

- Các PT do Diophantus đưa ra từ TK III được nghiên cứu nhiều hơn trong Thế kỷ XX bằng công cụ mới là “*các đường cong elliptic*”, không liên quan gì đến các hình ellip, nhưng có liên quan đến các hàm elliptic $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx$.
- Việc sử dụng các đường cong elliptic trong mã hóa (ECC) được đề xuất độc lập bởi N. Koblitz và S. Miller vào năm 1985. Mã khóa RSA dựa trên các số nguyên tố, được Rivest, Shamir, Adleman đưa ra lần đầu năm 1977 tại MIT. Một khóa ECC 256-bit có thể bảo mật tốt bằng một khóa RSA 3072-bit.

Giả thuyết Mordell (1922)

Số N các điểm hữu tỉ (các tọa độ đều hữu tỉ) trên mọi đường cong đại số có giống ≥ 2 là hữu hạn ($N < \infty$). (Ví dụ: Đối với đường cong Fermat $a^n + b^n = 1$, $n \geq 3$, trên mặt phẳng (a,b) , theo Mordell $N < \infty$, nhưng theo Fermat $N = 0$.)

- Năm 1983, nhà toán học 27 tuổi người đức G. Faltings đã CMR Giả thuyết **Mordell** là đúng; chứng minh rất độc đáo bằng công cụ mạnh của hình học đại số thế kỷ XX.
- **G. Faltings:** Thần đồng toán học của đức, GS thực thụ khi mới 27 tuổi, giải thưởng Fields (năm 1986), sau đó sang làm GS mời tại đại học Princeton (Hoa Kỳ).
- Dùng kết quả của Faltings, Granville và Heath-Brown đã chỉ ra rằng, số nghiệm của phương trình Fermat (nếu có) sẽ giảm khi $n \uparrow$.

Cho đến 1983: Fermat đúng với mọi $n \leq 1$ triệu và đến 1992 nâng lên tới 4 triệu, tức là $N(n) = 0$ với mọi $n \leq 4$ triệu.

Gerd Faltings

(SN 28/7/1954 tại CHLB Đức, ĐH Wuppertal)



Đường cong Fermat

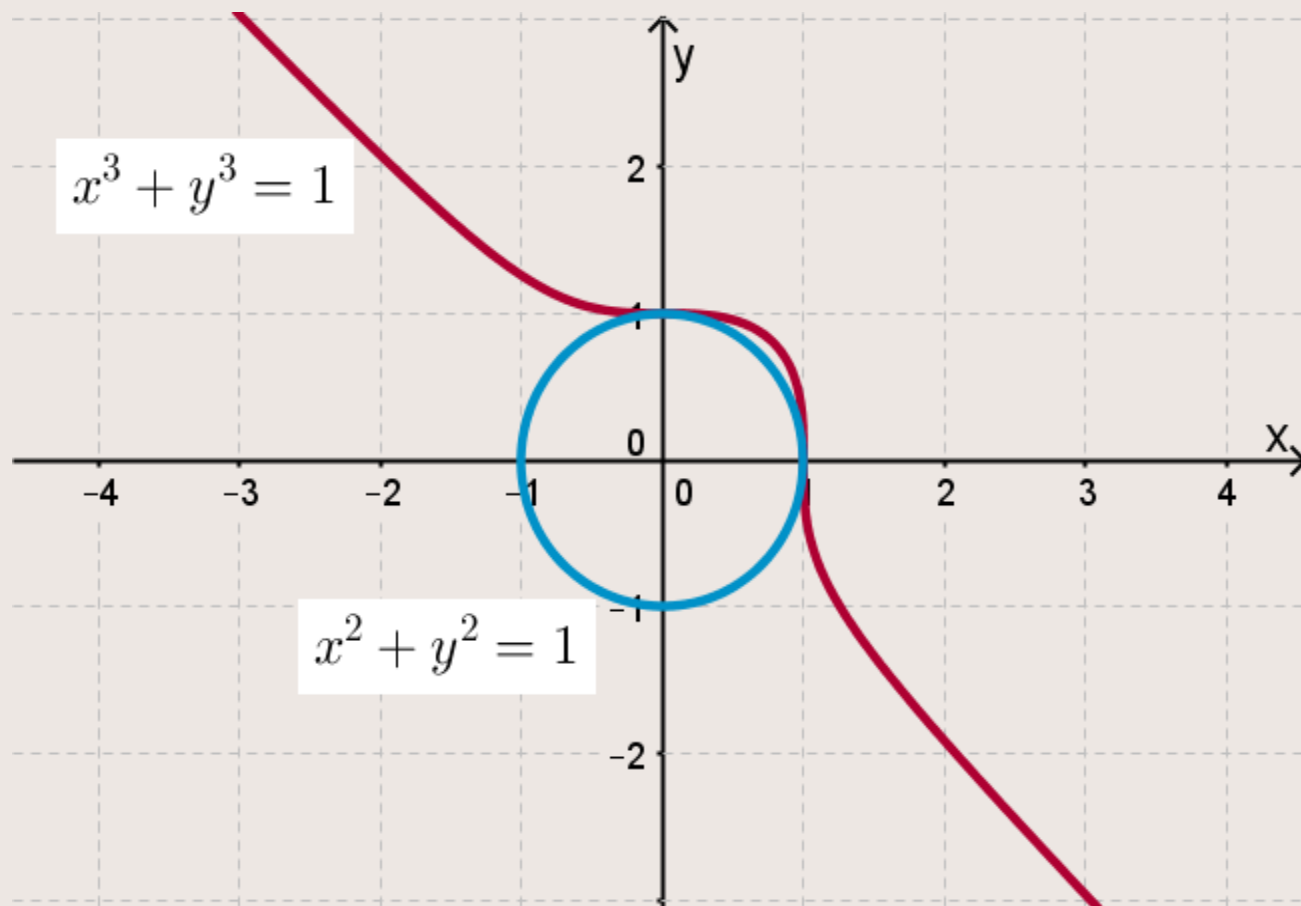
$$X^n + Y^n = Z^n \quad (n \geq 3)$$

hay $(X/Z)^n + (Y/Z)^n = 1$, đặt $X/Z = x$, $Y/Z = y \rightarrow$
 $x^n + y^n = 1$.

Định lý lớn Fermat

có thể được phát biểu như sau: *Với mọi số tự nhiên n lớn hơn 2, trên đường cong Fermat $x^n + y^n = 1$ trong mặt phẳng (x,y) , ngoài bốn điểm tầm thường $(0; \pm 1)$ và $(\pm 1; 0)$ ra, không có một điểm nào khác, với các tọa độ hữu tỷ.*

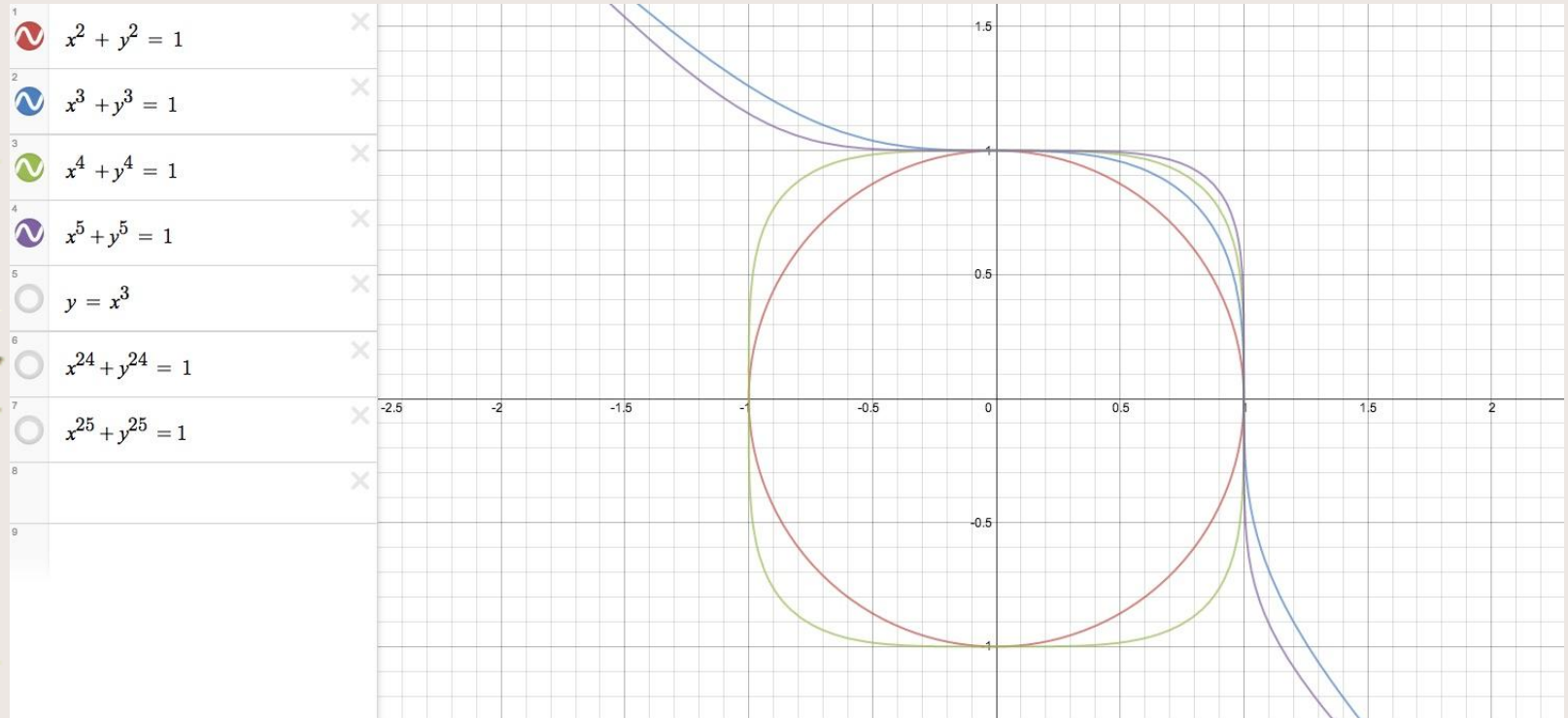
Đồ thị của $x^2 + y^2 = 1$ (vòng tròn đơn vị, đường cong Pythagoras) và $x^3 + y^3 = 1$ (đường cong Fermat, elliptic). Nguồn: Internet [G].



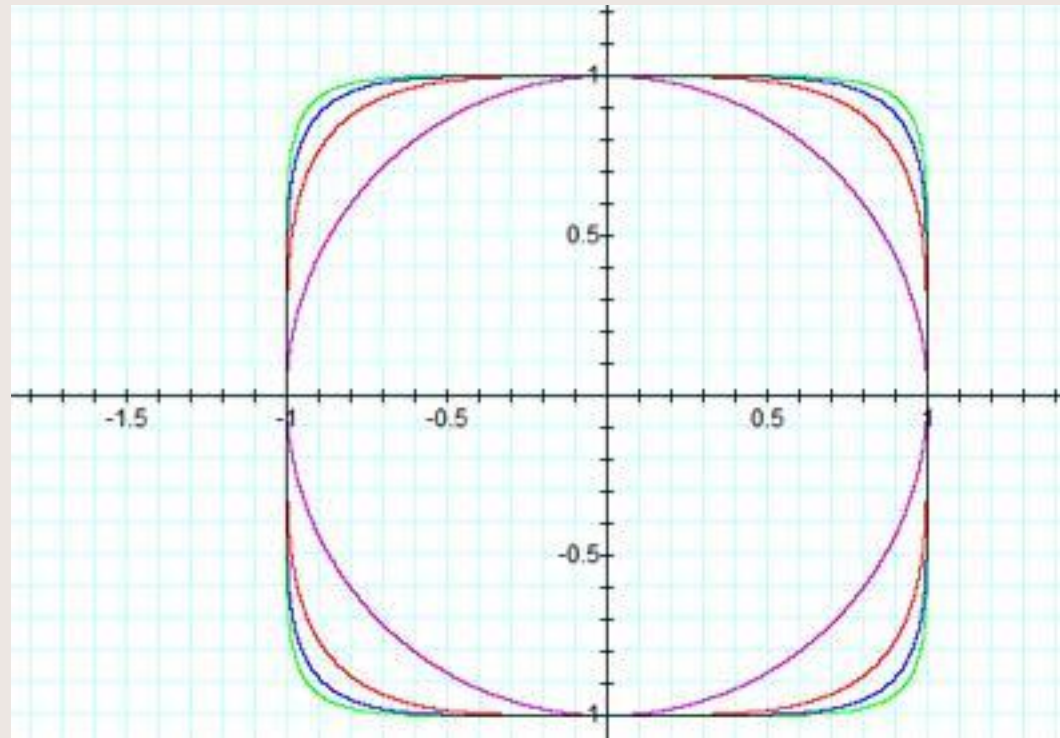
Đồ thị của $x^n + y^n = 1$,

với $n = (1), 2, 3, 4, \dots$ Với $n=1$: đường thẳng qua $(1,0)$ và $(0,1)$; với $n=2$: đường tròn đơn vị, đường cong Pythagoras; với $n=3, 4, \dots$: đường cong Fermat.

Nguồn: Internet [G]



Đồ thị của $x^n + y^n = 1$,
với $n = 2, 4, 6, 8$ (chẵn). *Nguồn: Internet*



Andrew Wiles

- Sinh năm 1953 tại Cambridge (Anh), năm 10 tuổi, vào thư viện thành phố, A. Wiles biết đến Định lý lớn Fermat trong một cuốn sách toán và nói: “*Tôi muốn chứng minh định lý này!*”
- Những năm 1970, A. Wiles vào đại học và sau đó làm NCS tại đại học nổi tiếng thế giới Cambridge, với GS **John Coates** về các đường cong elliptic và Lý thuyết Iwasawa. Vì thời gian làm NCS hạn chế, anh chưa dám “lao vào” Bài toán lớn Fermat.

Andrew Wiles (2)

- Sau khi thành TS, Wiles chuyển sang làm GS tại khoa Toán, ĐH Princeton (Hoa Kỳ).

- Tình cờ, nhờ một người bạn, một đồng nghiệp làm toán, Wiles được biết đến **Giả thuyết Epsilon** và như một hệ quả:

Giả thuyết Shimura -Taniyama $\Rightarrow$ Định lý lớn Fermat.

Theo P. Serre, đó chính là **Giả thuyết của Gerhard Frey**, ĐH Tübingen, TS tại ĐH Heidelberg (Đức).

Và thế là “ngọn lửa cũ lại bùng cháy” trong Wiles ...

- **Ken Ribet**, GS ĐH Berkeley (Mỹ), đã chứng minh rằng **Giả thuyết Epsilon của Frey là đúng.**

B. Mazur (ĐH Harvard) đã động viên và góp ý thêm cho Ribet.

NB. Châu-LT. Hoa-J. Coates-TV. Nhung

(Hà Nội, 25/7/2013; TVN đang giới thiệu cuốn sách dịch về ĐLL Fermat bằng tiếng Việt, trong đó có nói nhiều về A. Wiles và J. Coates; NXBGDVN, 2000-12, tái bản lần thứ 6)



Andrew Wiles (3)

Xuất phát từ các hàm tuần hoàn của Fourier, H. Poincaré đã mở rộng các dạng tự đẳng cấu thành các “dạng modula”.

Giả thuyết Shimura -Taniyama (Nhật Bản, 1965):

Mọi hàm (đường cong) elliptic đều là dạng modula.

P. Serre và A. Weil đã đón nhận Giả thuyết của Shimura – Taniyama như thế nào? S. Lang và hầu hết các nhà toán học trên thế giới đều công nhận bản quyền của hai nhà toán học Nhật. (xem [A])

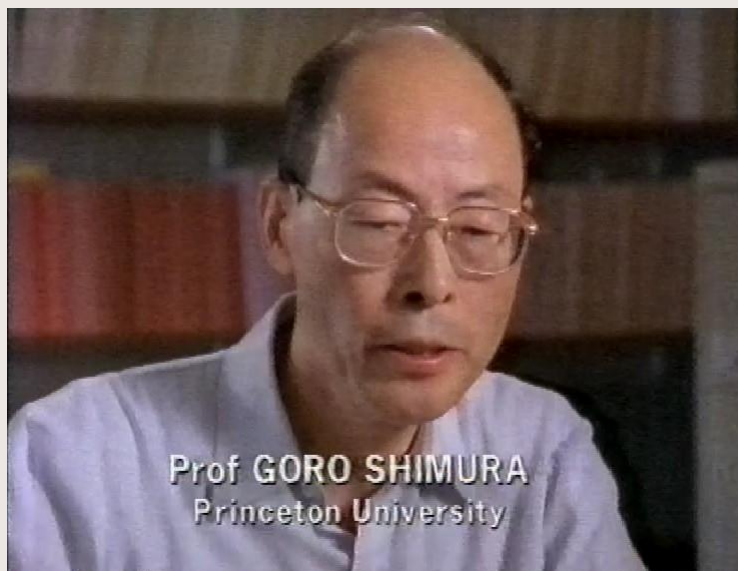
Yutaka Taniyama: Sinh 12/11/1927, sinh viên và TS tại ĐH Tokyo năm 1953, ở trong căn hộ chỉ có 7,29 m². Goro Shimura: Bạn học trước một năm của Taniyama ở Tokyo.

7 năm + 1 năm (sửa sai) = 8 năm: **Năm 1994 A. Wiles đã chứng minh Giả thuyết Shimura-Taniyama là đúng => Định lý cuối cùng của Fermat được chứng minh xong hoàn toàn!** Chứng minh này được công bố tháng 5 năm 1995 trên *Annals of Mathematics* (Đại học Princeton).

Sau 6 năm làm việc một mình, A. Wiles có thêm ng-ời bạn, ng-ời đồng nghiệp hỗ trợ, là GS N. Katz ở ĐH Princeton. Và vào tháng 7-8/1993 chính N. Katz đã chỉ ra sai lầm cơ bản của Wiles. **Richard Taylor**, một học trò cũ của Wiles, đã hỗ trợ thêm Wiles khi sửa chữa sai lầm.

Goro Shimura (23/2/1930-3/5/2019)

TS Toán tại ĐH Tokyo 1958, GS Princeton (Mỹ) 1964-1999.



Yutaka Taniyama

(1927-1958, sinh viên và TS tại ĐH Tokyo năm 1953)



Andrew Wiles (4)

- ĐH Cambridge (Anh), 6/1993: Báo cáo 3 giờ trong 3 ngày của A. Wiles (NCS cũ của GS J. Coates) tại Viện Toán học Newton: “Dạng modula, đ- ồng cong elliptic và biểu diễn Galois”

⇒ Bài toán Fermat đ- ợc giải quyết.

- Thời báo New York, 24/6/1993: “Eureka” sau hơn 350 năm!
- B- u điện Washington: A. Wiles, “Ng- ời chinh phục toán học”.

A.Wiles lại không đ- ợc nhận giải th- ưởng Fields tại ICM 1994 ở Zurich (lúc đó vừa tròn 40 tuổi nhưng đang sửa chữa và hoàn thiện chứng minh) và ICM 1998 ở Berlin (vì đã quá 40 tuổi).

23 Bài toán của Hilbert

Nguồn: <https://www.mathvn.com/2009/03/david-hilbert-va-23-bai-toan-cua-ki-xx.html>

- David Hilbert nêu ra 23 bài toán ở Đại hội Toán học thế giới tại Paris năm 1900.

- Hai câu nói nổi tiếng của D. Hilbert:

1. Mở đầu 23 Bài toán:

"Ai trong chúng ta mà không cảm thấy vui sướng khi vén lên bức màn mà tương lai ẩn đằng sau đó; nhìn thẳng vào những phát triển sắp tới của khoa học và những bí ẩn của sự phát triển trong những thế kỷ kế tiếp? Mục đích cuối cùng mà các nhà toán học tương lai hướng tới sẽ là gì? Những phương pháp mới nào, những sự kiện mới nào sẽ ra đời trong thế kỷ tới nhờ các ý tưởng toán học kỳ diệu?"

- ## 2. Sau 100 năm, trong số 23 Bài toán, chỉ còn lại 3 Bài chưa được giải quyết. Đó là Bài số 6, 8 và 16. Bài số 8 là Giả thuyết Riemann: "Tất cả các không điểm ảo của hàm dzeta có một phần ảo là $\frac{1}{2}$."

Hilbert nói: *"Nếu tôi sống lại sau một nghìn năm nữa, câu hỏi đầu tiên của tôi sẽ là: Giả thuyết Riemann đã được giải quyết chưa?"*

7 Bài toán thiên niên kỷ

(Viện TH Clay nêu ra năm 2000, phần thưởng 1 triệu USD/bài)

1. P so với NP (KH máy tính)

2. Giả thuyết Hodge (Hodge conjecture)

3. Giả thuyết Poincaré – đã được Grigori Perelman giải.

Cao và Zhu với công trình của Perelman (và R. Hamilton)? (xem [A])

4. Giả thiết Riemann (The Riemann hypothesis) Chính là Bài toán số 8 của Hilbert năm 1900, bài duy nhất trong số 23 bài toán Hilbert có mặt tại đây.

5. Yang-Mills existence and mass gap (Sự tồn tại Yang-Mills và khoảng trống khối lượng)

6. Navier-Stokes existence and smoothness (Sự tồn tại Navier-Stokes và tính trơn?)
Terence Tao ...

7. Giả thuyết Birch và Swinnerton-Dyer (The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture).

Các nhà toán học tham gia chọn lựa và trình bày 7 bài toán:

Atiyah, Bombieri, Connes, Deligne, Fefferman, Milnor, Mumford, Wiles, và Witten
(GT Fields)

(Xem [G]).

Grigori Perelman

*(SN 13/6/1966 ở Saint Petersburg, Nga, HS chuyên Toán, gia đình Do Thái;
HCV IMO 1982 với điểm tuyệt đối (Budapest); Fields 2006, Clay 2010 (đều từ chối):
CM Giả thuyết Poincaré' 1904)*



Tài liệu tham khảo

- [A] Amir D. Aczel: Câu chuyện hấp dẫn về Bài toán Phéc-ma, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội - 2000, do Trần Văn Nhung, Đỗ Trung Hậu và Nguyễn Kim Chi dịch từ tiếng Anh (tái bản lần thứ sáu năm 2012, 178 trang).
- [G] Một số tài liệu được lấy từ Internet.
- [N1] Trần Văn Nhung: Về Giáo dục và Đào tạo - Đôi điều ghi lại, NXBGDVN, Hà Nội, 12/2011 (578 trang, khổ 14,5 x 20,5 cm).
- [N2] Trần Văn Nhung: Sộp thành Nhà giáo, NXBGDVN, Hà Nội, tháng 2/2016 (796 trang, khổ 14,5 x 20,5 cm, ISBN: 978-604-0-08499-6); tái bản lần thứ nhất có chỉnh lí và bổ sung, tháng 10/2018 (836 trang, khổ 16 x 24 cm, ISBN: 978-604-0-14587-1).
- [N3] Nhung Trần Văn: Facebook.

Xin cảm ơn!

(Tác giả cũng xin cảm ơn GS. TSKH. Phùng Hồ Hải, PGS. TS. Tạ Duy Phương, GS. TS. Trần Vũ Thiệu, Viện Toán học, VHLKH&CNVN, và TS. Trần Nam Dũng, Trường ĐHKHTN, ĐHQG TP HCM, về những nhận xét và góp ý có giá trị khi chuẩn bị Báo cáo này!)