Phạm trù Tannaka trung tính

Phạm Thanh Tâm

Trường ĐHSP Hà Nội 2

Hội thảo Phạm trù Tannaka

Kí hiệu

- k kí hiệu cho một trường bất kì.
- Vect_k kí hiệu cho phạm trù của các không gian véc tơ hữu hạn chiều trên k.
- Mod_A kí hiệu cho phạm trù của các modules hữu hạn sinh trên A.
- $\mathrm{Rep}_k(G)$ kí hiệu cho phạm trù các biểu diễn hữu hạn chiều của G trên k.

Lược đồ nhóm affine

Cho một lược đồ nhóm affine $G = \operatorname{Spec} A$ trên k. Phép *nhân* $G \times G \longrightarrow G$, đơn vị $k \longrightarrow G$ và phép nghịch đảo $G \longrightarrow G$ tương ứng được xác định bởi các ánh xạ

1. Đối nhân $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$;
2. Đối đơn vị $\epsilon : A \longrightarrow k$;
3. Đối nghịch đảo $s : A \longrightarrow A$

thỏa mãn các tiên đề về đối đại số sau:

Lược đồ nhóm affine

Cho một lược đồ nhóm affine $G = \operatorname{Spec} A$ trên k. Phép *nhân* $G \times G \longrightarrow G$, đơn vị $k \longrightarrow G$ và phép nghịch đảo $G \longrightarrow G$ tương ứng được xác định bởi các ánh xạ

1. Đối nhân $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$;
2. Đối đơn vị $\epsilon : A \longrightarrow k$;
3. Đối nghịch đảo $s : A \longrightarrow A$

thỏa mãn các tiên đề về đối đại số sau:

(i) Đối kết hợp

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "id \otimes \Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes id"'] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

Lược đồ nhóm affine

(ii) Đối đơn vị và đối nghịch đảo

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "id \otimes \epsilon"] \\
& A \otimes k
\end{tikzcd}
\;;\;
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "id \otimes \epsilon"] \\
& A \otimes k
\end{tikzcd}
$$

Lược đồ nhóm affine

(ii) Đối đơn vị và đối nghịch đảo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "id \otimes \epsilon"] \\ & A \otimes k \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "id \otimes \epsilon"] \\ & A \otimes k \end{tikzcd}$$

Song đại số

Một đại số trên k được gọi là $k-$song đại số nếu nó có các phép toán δ, ϵ và s thỏa mãn 3 tiên đề (i)–(iii) trên.

Lược đồ nhóm đại số affine

Mệnh đề 1

Hàm tử $A \mapsto \operatorname{Spec} A$ xác định một tương đương giữa phạm trù của các $k-$song modules và phạm trù của các lược đồ nhóm affine trên k.

Chúng ta nói rằng G là đại số (nhóm đại số) nếu A là $k-$đại số hữu hạn sinh.

Đối đại số và đối modules

- Một *đối đại số* trên k là một $k-$không gian véc tơ C cùng với các $k-$ánh xạ tuyến tính $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C; \quad \epsilon : C \longrightarrow k$ thỏa mãn các điều kiện về đối kết hợp và đối đơn vị ở trên.

Đối đại số và đối modules

- Một *đối đại số* trên k là một $k-$không gian véc tơ C cùng với các $k-$ánh xạ tuyến tính $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$; $\epsilon : C \longrightarrow k$ thỏa mãn các điều kiện về đối kết hợp và đối đơn vị ở trên.
- Một *đối module* trên C là một $k-$không gian véc tơ V cùng với $k-$ánh xạ tuyến tính $\rho : V \longrightarrow V \otimes C$ thỏa mãn cáctính chất sau:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V \otimes C \arrow[d, "id\otimes\rho"] \\
V \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes id"'] & V \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\quad ; \quad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & V \otimes C \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\
& V \otimes k
\end{tikzcd}
$$

Cấu trúc đối modules

Cho $G = \operatorname{Spec} A$ là một lược đồ nhóm affine trên k và cho V là một không gian véc tơ trên k.

Mệnh đề 2

Có một tương ứng 1-1 giữa các cấu trúc trên V:

$$\{\text{cấu trúc } A\text{–đối module}\} <-- > \{\text{biểu diễn } k\text{–tuyến tính của } G\}.$$

Cấu trúc đối modules

Cho $G = \operatorname{Spec} A$ là một lược đồ nhóm affine trên k và cho V là một không gian véc tơ trên k.

Mệnh đề 2

Có một tương ứng 1-1 giữa các cấu trúc trên V:

$$\{\text{cấu trúc } A\text{−đối module}\} <-- > \{\text{biểu diễn } k\text{−tuyến tính của } G\}.$$

Mệnh đề 3

1. Đối đại số A là giới hạn thuận $A = \varinjlim A_i$ của các đối đại số A_i.
2. Nói riêng, lược đồ nhóm affine G là giới hạn ngược $G = \varprojlim G_i$ của các lược đồ nhóm affine đại số cùng với tính chất $G_j \longrightarrow G_i; i \leq j$ là toàn cấu.

Xác định lược đồ nhóm affine từ các biểu diễn

Cho $G = \operatorname{Spec} A$ là một lược đồ nhóm affine trên k. Xét hàm tử quên

$$\omega : \mathrm{Rep}_k(G) \longrightarrow \mathrm{Vect}_k.$$

Mỗi $k-$đại số R, định nghĩa $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)(R)$ gồm các họ các tự đẳng cấu $R-$tuyến tính

$$(\lambda_X : R \otimes X \longrightarrow R \otimes X) : X \in \mathrm{Rep}_k(G)$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

Xác định lược đồ nhóm affine từ các biểu diễn

Cho $G = \mathrm{Spec}\, A$ là một lược đồ nhóm affine trên k. Xét hàm tử quên

$$\omega : \mathrm{Rep}_k(G) \longrightarrow \mathrm{Vect}_k.$$

Mỗi $k-$đại số R, định nghĩa $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)(R)$ gồm các họ các tự đẳng cấu $R-$tuyến tính

$$(\lambda_X : R \otimes X \longrightarrow R \otimes X) : X \in \mathrm{Rep}_k(G)$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- $\lambda_{X\otimes Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y; \lambda_1 = id_R$
- Với mọi ánh xạ $G-$đẳng biến $\alpha : X \longrightarrow Y$, ta có

$$\lambda_Y(\alpha \otimes id) = (\alpha \otimes id)\lambda_X.$$

Xác định lược đồ nhóm affine từ các biểu diễn

Cho $G = \mathrm{Spec}\, A$ là một lược đồ nhóm affine trên k. Xét hàm tử quên

$$\omega : \mathrm{Rep}_k(G) \longrightarrow \mathrm{Vect}_k.$$

Mỗi $k-$đại số R, định nghĩa $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)(R)$ gồm các họ các tự đẳng cấu $R-$tuyến tính

$$(\lambda_X : R \otimes X \longrightarrow R \otimes X) : X \in \mathrm{Rep}_k(G)$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- $\lambda_{X \otimes Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y ; \lambda_1 = id_R$
- Với mọi ánh xạ $G-$đẳng biến $\alpha : X \longrightarrow Y$, ta có

$$\lambda_Y(\alpha \otimes id) = (\alpha \otimes id)\lambda_X .$$

Định lý 4

Ánh xạ tự nhiên $G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ là một đẳng cấu của các hàm tử trên các $k-$ đại số.

Xác định lược đồ nhóm từ các biểu diễn của nó

Chú ý rằng, việc chứng minh $G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ là đẳng cấu được thực hiện bởi lấy giới hạn ngược của các đẳng cấu địa phương

$$G_X \simeq \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\langle X \rangle}).$$

Định lý 5 cũng nói rằng các hàm tử tensor $F : \mathrm{Rep}_k(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(G)$ được xác định từ đồng cấu duy nhất $\varphi : A' \longrightarrow A$ của các đối đại số trên k

Xác định lược đồ nhóm từ các biểu diễn của nó

Chú ý rằng, việc chứng minh $G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ là đẳng cấu được thực hiện bởi lấy giới hạn ngược của các đẳng cấu địa phương

$$G_X \simeq \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\langle X\rangle}).$$

Mỗi cấu xạ $f : G \longrightarrow G'$ của các nhóm affine xác định một hàm tử tensor tự nhiên $\omega^f : \mathrm{Rep}_k(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(G)$. Khi đó

Định lý 5

Cho $F : \mathrm{Rep}_k(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(G)$ là hàm tử tensor giao hoán cùng các hàm tử quên tương ứng. Khi đó, tồn tại duy nhất một cấu xạ $f : G \longrightarrow G'$ sao cho $\omega^f = F$.

Định lý 5 cũng nói rằng các hàm tử tensor $F : \mathrm{Rep}_k(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(G)$ được xác định từ đồng cấu duy nhất $\varphi : A' \longrightarrow A$ của các đối đại số trên k

Phạm trù tensor rắn

Một phạm trù tensor $\mathcal{C}$ được gọi là rắn nếu

- $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ tồn tại và giao hoán cùng với tensor hữu hạn;
- Mọi vật trong $\mathcal{C}$ đều phản xạ.

Chứng minh Mệnh đề 6 có thể được tìm thấy trong Proposition 1.13 của *Tanakian categories* của Deligne, Milne (1982)

Phạm trù tensor rắn

Một phạm trù tensor $\mathcal{C}$ được gọi là rắn nếu

- $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ tồn tại và giao hoán cùng với tensor hữu hạn;
- Mọi vật trong $\mathcal{C}$ đều phản xạ.

Mệnh đề 6

Cho $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ là các phạm trù tensor rắn và $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ là hàm tử tensor. Khi đó mọi cấu xạ giữa F và G đều là một đẳng cấu.

.

Chứng minh Mệnh đề 6 có thể được tìm thấy trong Proposition 1.13 của *Tanakian categories* của Deligne, Milne (1982)

Định lý chính

Mục đích chính của báo cáo này là định lý sau:

Định lý 7

Cho $\mathcal{C}$ là phạm trù $k-$tuyến tính tensor abel rắn sao cho $k = End(1)$ và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử $k-$tuyến tính tensor, khớp và trung thành. Khi đó tồn tại một $k-$đối đại số B sao cho

1. Hàm tử $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ của các $k-$đại số được biểu diễn bởi lược đồ tự nhóm affine $G = \mathrm{Spec}\, B$.
2. Hàm tử ω xác định một tương đương giữa các phạm trù tensor $\mathcal{C}$ và $\mathrm{Rep}_k(G)$.

Lược đồ chứng minh

Dựa vào quan sát sau giữa $k-$đại số hữu hạn chiều A và $k-$đối đại số đối ngẫu của nó

$$Hom_{k-lin}(A \otimes V, V) \simeq Hom_{k-lin}(V, A^{v} \otimes V),$$

khi đó chứng minh định lý gồm các bước sau:

Lược đồ chứng minh

Dựa vào quan sát sau giữa $k-$đại số hữu hạn chiều A và $k-$đối đại số đối ngẫu của nó

$$Hom_{k-lin}(A \otimes V, V) \simeq Hom_{k-lin}(V, A^{v} \otimes V),$$

khi đó chứng minh định lý gồm các bước sau:

1. Xây dựng $k-$đại số hữu hạn chiều A_X đối với mỗi vật X in $\mathcal{C}$ cùng với tính chất
$$A_X = End(\omega|_{\langle X \rangle}).$$
2. Xây dựng $k-$đối đại số B. Sự tồn tại của đối nghịch đảo của B được cho bởi tính rắn của phạm trù $\mathcal{C}$.

Xây dựng k−đại số A_X

Mỗi cặp $X \in Ob(\mathcal{C})$ và $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$, định nghĩa

$$V \otimes X = \{((X^n)_\alpha, \phi_{\beta,\alpha})\},$$

trong đó $\alpha : k^n \longrightarrow V$ và $\phi_{\beta,\alpha} : (X^n)_\alpha \longrightarrow (X^n)_\beta$ xác định bởi $\alpha.\beta^{-1} \in GL_n(k)$. Mỗi $T \in Ob(\mathcal{C})$, cấu xạ $V \otimes X \longrightarrow T$ hoặc $T \longrightarrow V \otimes X$ là họ các cấu xạ (φ_α) tương thích với các $\phi_{\beta,\alpha}$.

Xây dựng $k-$đại số A_X

Mỗi cặp $X \in Ob(\mathcal{C})$ và $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$, định nghĩa

$$V \otimes X = \{((X^n)_\alpha, \phi_{\beta,\alpha})\},$$

trong đó $\alpha : k^n \longrightarrow V$ và $\phi_{\beta,\alpha} : (X^n)_\alpha \longrightarrow (X^n)_\beta$ xác định bởi $\alpha.\beta^{-1} \in GL_n(k)$. Mỗi $T \in Ob(\mathcal{C})$, cấu xạ $V \otimes X \longrightarrow T$ hoặc $T \longrightarrow V \otimes X$ là họ các cấu xạ (φ_α) tương thích với các $\phi_{\beta,\alpha}$.
Cấu xạ đồng nhất $id_{V\otimes X}$ xác định một ánh xạ $k-$tuyến tính chính tắc

$$V \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, V \otimes X)$$

mà gửi $v \in V$ thành đồng cấu được xác định bởi $\alpha^{-1}(v)$.

Xây dựng $k-$đại số A_X

Mỗi cặp $X \in Ob(\mathcal{C})$ và $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$, định nghĩa

$$V \otimes X = \{((X^n)_\alpha, \phi_{\beta,\alpha})\},$$

trong đó $\alpha : k^n \longrightarrow V$ và $\phi_{\beta,\alpha} : (X^n)_\alpha \longrightarrow (X^n)_\beta$ xác định bởi $\alpha.\beta^{-1} \in GL_n(k)$. Mỗi $T \in Ob(\mathcal{C})$, cấu xạ $V \otimes X \longrightarrow T$ hoặc $T \longrightarrow V \otimes X$ là họ các cấu xạ (φ_α) tương thích với các $\phi_{\beta,\alpha}$.
Cấu xạ đồng nhất $id_{V\otimes X}$ xác định một ánh xạ $k-$tuyến tính chính tắc

$$V \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, V \otimes X)$$

mà gửi $v \in V$ thành đồng cấu được xác định bởi $\alpha^{-1}(v)$.
Cấu xạ này cảm sinh một đẳng cấu hàm tử theo T như sau:

$$Hom_{\mathcal{C}}(V \otimes X, T) \longrightarrow Hom_{k-lin}(V, Hom_{\mathcal{C}}(X, T)).$$

Xây dựng $k-$đại số A_X

Trước tiên, chúng ta có nhận xét rằng mọi hàm tử $k-$tuyến tính $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ đều có

$$F(V \otimes X) = V \otimes F(X).$$

Xây dựng $k-$đại số A_X

Trước tiên, chúng ta có nhận xét rằng mọi hàm tử $k-$tuyến tính $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ đều có

$$F(V \otimes X) = V \otimes F(X).$$

Với mỗi cặp $X \in Ob(\mathcal{C})$ và $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$, định

$$\underline{\mathrm{Hom}}(V, X) := V^{\vee} \otimes X.$$

Cho $W \subset V$ và $Y \subset X$, cái **dịch chuyển** W vào trong Y là

$$(Y : W) := Ker\left(\underline{\mathrm{Hom}}(V, X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(W, X/Y)\right).$$

Xây dựng k−đại số A_X

Trước tiên, chúng ta có nhận xét rằng mọi hàm tử k−tuyến tính $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ đều có

$$F(V \otimes X) = V \otimes F(X).$$

Với mỗi cặp $X \in Ob(\mathcal{C})$ và $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$, định

$$\underline{\mathrm{Hom}}(V, X) := V^v \otimes X.$$

Cho $W \subset V$ và $Y \subset X$, cái **dịch chuyển** W vào trong Y là

$$(Y : W) := Ker\left(\underline{\mathrm{Hom}}(V, X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(W, X/Y)\right).$$

Tương tự như trên, mọi hàm tử k−tuyến tính $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ đều có

$$F(\underline{\mathrm{Hom}}(V, X)) = \underline{\mathrm{Hom}}(V, F(X)).$$

Hơn nữa, nếu F là khớp thì không khó để thấy

$$F(Y : W) = (F(Y) : W).$$

Xây dựng k−đại số A_X

Xét bổ đề sau:

Bổ đề 8

Cho $\mathcal{C}$ là phạm trù k−tuyến tính abel và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử k−tuyến tính, khớp và trung thành. Khi đó các vật sau bằng nhau

1. Vật con lớn nhất P của $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X)$ mà ảnh trong $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X)^n, X^n)$, bởi phép nhúng đường chéo, chứa trong $(Y : \omega(Y))$ với mọi vật con Y của X^n.
2. Vật con nhỏ nhất P' của $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X)$ sao cho không gian con $\omega(P')$ của $Hom(\omega(X), \omega(X))$ chứa đồng nhất của $\omega(X)$.

Xây dựng k−đại số A_X

Xét bổ đề sau:

Bổ đề 8

Cho $\mathcal{C}$ là phạm trù k−tuyến tính abel và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử k−tuyến tính, khớp và trung thành. Khi đó các vật sau bằng nhau

1. Vật con lớn nhất P của $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X)$ mà ảnh trong $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X)^n, X^n)$, bởi phép nhúng đường chéo, chứa trong $(Y : \omega(Y))$ với mọi vật con Y của X^n.
2. Vật con nhỏ nhất P' của $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X)$ sao cho không gian con $\omega(P')$ của $Hom(\omega(X), \omega(X))$ chứa đồng nhất của $\omega(X)$.

Bởi tính faithful của ω, ta có rằng nếu $\omega(X) = 0$ thì $X = 0$. Do đó, kết hợp với tính khớp của ω, ta thấy rằng nếu $Y \subset X$ và $\omega(Y) = \omega(X)$ thì $Y = X$. Điều này kéo theo rằng các vật của phạm trù $\mathcal{C}$ đều là artin và neother. Vì vậy, các vật P và P' trong Bổ đề 8 đều tồn tại.

Chứng minh Bổ đề 8

Bởi định nghĩa của P, ta có

$$P = \bigcap_{Y \subset X^n} \left(\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) \cap (Y : \omega(Y))\right).$$

Chứng minh Bổ đề 8

Bởi định nghĩa của P, ta có

$$P = \bigcap_{Y \subset X^n} \left(\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) \cap (Y : \omega(Y)) \right).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \omega(P) &= \bigcap_{Y \subset X^n} \left(\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), \omega(X)) \cap (\omega(Y) : \omega(Y)) \right) \\ &= \bigcap_{Y \subset X^n} \left(End(\omega(X)) \cap (\omega(Y) : \omega(Y)) \right). \end{aligned}$$

Chứng minh Bổ đề 8

Bởi định nghĩa của P, ta có

$$P = \bigcap_{Y \subset X^n} \left(\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) \cap (Y : \omega(Y)) \right).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \omega(P) &= \bigcap_{Y \subset X^n} \left(\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), \omega(X)) \cap (\omega(Y) : \omega(Y)) \right) \\ &= \bigcap_{Y \subset X^n} \left(End(\omega(X)) \cap (\omega(Y) : \omega(Y)) \right). \end{aligned}$$

Như vậy $\omega(P)$ là vành con lớn nhất của $End(\omega(X))$ mà ảnh trong $End(\omega(X)^n)$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$. Điều này chứng tỏ $id_{\omega(X)} \in \omega(P)$. Vì vậy $P' \subset P$ từ tính chất nhỏ nhất của P'.

Chứng minh Bổ đề 8

Cho $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$. Bởi phép nhúng đường chéo cho ánh xạ tự nhiên

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(V \otimes \omega(X), V \otimes X).$$

Lấy ảnh của ω, ánh xạ này cảm sinh

$$End(\omega(X)) \longrightarrow End(V \otimes \omega(X)); f \mapsto id \otimes f.$$

Tương tự, chúng ta cũng thu được $\omega(P)$ là vành con của $End(\omega(X))$ mà ảnh trong $End(V \otimes \omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset V \otimes X$.

Chứng minh Bổ đề 8

Cho $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$. Bởi phép nhúng đường chéo cho ánh xạ tự nhiên

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(V \otimes \omega(X), V \otimes X).$$

Lấy ảnh của ω, ánh xạ này cảm sinh

$$End(\omega(X)) \longrightarrow End(V \otimes \omega(X)); f \mapsto id \otimes f.$$

Tương tự, chúng ta cũng thu được $\omega(P)$ là vành con của $End(\omega(X))$ mà ảnh trong $End(V \otimes \omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset V \otimes X$.
Áp dụng nhận xét này đối với một vật $Q \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) = \omega(X)^{v} \otimes X$ cùng với chú ý $\omega(Q) \subset End(\omega(X))$. Phép nhân trái của $\omega(P) \subset End(\omega(X))$ lên $End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Q)$.

Chứng minh Bổ đề 8

Cho $V \in Ob(\mathrm{Vect}_k)$. Bởi phép nhúng đường chéo cho ánh xạ tự nhiên

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(V \otimes \omega(X), V \otimes X).$$

Lấy ảnh của ω, ánh xạ này cảm sinh

$$End(\omega(X)) \longrightarrow End(V \otimes \omega(X)); f \mapsto id \otimes f.$$

Tương tự, chúng ta cũng thu được $\omega(P)$ là vành con của $End(\omega(X))$ mà ảnh trong $End(V \otimes \omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset V \otimes X$.

Áp dụng nhận xét này đối với một vật $Q \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X) = \omega(X)^{v} \otimes X$ cùng với chú ý $\omega(Q) \subset End(\omega(X))$. Phép nhân trái của $\omega(P) \subset End(\omega(X))$ lên $End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Q)$.

Vì vậy, nếu $id_{\omega(X)} \in \omega(Q)$ thì mọi $\phi \in \omega(P)$ ta có $\phi = \phi(id) \in \omega(Q)$.

Điều này kéo theo $\omega(P) \subset \omega(Q)$, và do đó $P \subset Q$. Nói riêng,

$$P \subset P'.$$

Xây dựng $k-$đại số A_X

Đặt $A_X = \omega(P_X)$, ở đây P_X kí hiệu cho vật tồn tại trong Bổ đề 8. Kí hiệu $\langle X \rangle$ phạm trù con đầy của $\mathcal{C}$ gồm các subqoutient của $X^n, n \in \mathbb{N}$. Từ A_X là vành con lớn nhất của $End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$. Hiển nhiên, mỗi $k-$ tuyến tính $\omega(X_1) \longrightarrow \omega(X_2)$ cảm sinh một $A_X$tuyến tính trên nó. Vì vậy, hàm tử $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ phân tích qua Mod_{A_X}. Ta có bổ đề:

Xây dựng k−đại số A_X

Đặt $A_X = \omega(P_X)$, ở đây P_X kí hiệu cho vật tồn tại trong Bổ đề 8. Kí hiệu $\langle X\rangle$ phạm trù con đầy của $\mathcal{C}$ gồm các subqoutient của $X^n, n \in \mathbb{N}$. Từ A_X là vành con lớn nhất của $End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$. Hiển nhiên, mỗi $k-$ tuyến tính $\omega(X_1) \longrightarrow \omega(X_2)$ cảm sinh một $A_X$tuyến tính trên nó. Vì vậy, hàm tử $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ phân tích qua Mod_{A_X}. Ta có bổ đề:

Bổ đề 9

Hàm tử $\omega|_{\langle X\rangle} : \langle X\rangle \longrightarrow \mathrm{Mod}_{A_X}$ là một tương đương phạm trù cùng tính chất gửi hàm tử $\omega|_{\langle X\rangle}$ thành hàm tử quên lên Vect_k. Hơn nữa, $A_X = End(\omega|_{\langle X\rangle})$.

Xây dựng $k-$đại số A_X

Đặt $A_X = \omega(P_X)$, ở đây P_X kí hiệu cho vật tồn tại trong Bổ đề 8. Kí hiệu $\langle X \rangle$ phạm trù con đầy của $\mathcal{C}$ gồm các subqoutient của $X^n, n \in \mathbb{N}$. Từ A_X là vành con lớn nhất của $End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$. Hiển nhiên, mỗi $k-$ tuyến tính $\omega(X_1) \longrightarrow \omega(X_2)$ cảm sinh một $A_X$tuyến tính trên nó. Vì vậy, hàm tử $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ phân tích qua Mod_{A_X}. Ta có bổ đề:

Bổ đề 9

Hàm tử $\omega|_{\langle X \rangle} : \langle X \rangle \longrightarrow \mathrm{Mod}_{A_X}$ là một tương đương phạm trù cùng tính chất gửi hàm tử $\omega|_{\langle X \rangle}$ thành hàm tử quên lên Vect_k. Hơn nữa, $A_X = End(\omega|_{\langle X \rangle})$.

-) Tính *faithful* của $\omega|_{\langle X \rangle}$ đến từ hàm tử ω.

Xây dựng $k-$đại số A_X

Đặt $A_X = \omega(P_X)$, ở đây P_X kí hiệu cho vật tồn tại trong Bổ đề 8. Kí hiệu $\langle X \rangle$ phạm trù con đầy của $\mathcal{C}$ gồm các subqoutient của $X^n, n \in \mathbb{N}$. Từ A_X là vành con lớn nhất của $End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$. Hiển nhiên, mỗi $k-$ tuyến tính $\omega(X_1) \longrightarrow \omega(X_2)$ cảm sinh một $A_X$tuyến tính trên nó. Vì vậy, hàm tử $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ phân tích qua Mod_{A_X}. Ta có bổ đề:

Bổ đề 9

Hàm tử $\omega|_{\langle X \rangle} : \langle X \rangle \longrightarrow \mathrm{Mod}_{A_X}$ là một tương đương phạm trù cùng tính chất gửi hàm tử $\omega|_{\langle X \rangle}$ thành hàm tử quên lên Vect_k. Hơn nữa, $A_X = End(\omega|_{\langle X \rangle})$.

-) Tính *faithful* của $\omega|_{\langle X \rangle}$ đến từ hàm tử ω.

-) Tính *essential surjective*. Trước tiên, từ $A_X \subset End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$ nên tác động phải của A_X trên $\underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X)$ ổn định P_X.

Xây dựng $k-$đại số A_X

Khi đó, mỗi $M \in \mathrm{Mod}_{A_X}$, định nghĩa

$$P_X \otimes_{A_X} M = Coker(P_X \otimes A_X \otimes M \rightrightarrows P_X \otimes M).$$

Xây dựng $k-$đại số A_X

Khi đó, mỗi $M \in \mathrm{Mod}_{A_X}$, định nghĩa

$$P_X \otimes_{A_X} M = Coker(P_X \otimes A_X \otimes M \rightrightarrows P_X \otimes M).$$

Bởi $P_X \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X)$ nên $P_X \otimes_{A_X} M$ là các họ (Y_α) các vậy của $\langle X \rangle$ tương thích với các đẳng cấu $Y_\alpha \longrightarrow Y_\beta$. Khi đó

$$\omega(P_X \otimes_{A_X} M) = \omega(P_X) \otimes_{A_X} M = M.$$

Xây dựng $k-$đại số A_X

Khi đó, mỗi $M \in \mathrm{Mod}_{A_X}$, định nghĩa

$$P_X \otimes_{A_X} M = Coker(P_X \otimes A_X \otimes M \rightrightarrows P_X \otimes M).$$

Bởi $P_X \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\omega(X), X)$ nên $P_X \otimes_{A_X} M$ là các họ (Y_α) các vậy của $\langle X \rangle$ tương thích với các đẳng cấu $Y_\alpha \longrightarrow Y_\beta$. Khi đó

$$\omega(P_X \otimes_{A_X} M) = \omega(P_X) \otimes_{A_X} M = M.$$

-) Tính *full* của $\omega|_{\langle X \rangle}$. Cho $X_i \in \langle X \rangle$ sao cho $\omega(X_i) = M_i$. Giả sử $f : M_1 \longrightarrow M_2$ là một cấu xạ trong Comod_{A_X}. Ta có

$$\omega\left(id_{P_X} \otimes_{A_X} f : P_X \otimes_{A_X} M_1 \longrightarrow P_X \otimes_{A_X} M_2\right) = id_{A_X} \otimes_{A_X} f = f.$$

Xây dựng $k-$đại số A_X

-) Cuối cùng, chúng ta chứng minh $A_X = End(\omega|_{\langle X \rangle})$.

Xây dựng $k-$đại số A_X

-) Cuối cùng, chúng ta chứng minh $A_X = End(\omega|_{\langle X \rangle})$.

- Hiển nhiên, từ $A_X \subset End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$ nên A_X ổn định $\omega|_{\langle X \rangle}(X_i)$ với mọi $X_i \in \langle X \rangle$. Do đó mỗi phần tử của A_X là một tự biến đổi tự nhiên của $\omega|_{\langle X \rangle}$.

Xây dựng $k-$đại số A_X

-) Cuối cùng, chúng ta chứng minh $A_X = End(\omega|_{\langle X\rangle})$.

- Hiển nhiên, từ $A_X \subset End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$ nên A_X ổn định $\omega|_{\langle X\rangle}(X_i)$ với mọi $X_i \in \langle X\rangle$. Do đó mỗi phần tử của A_X là một tự biến đổi tự nhiên của $\omega|_{\langle X\rangle}$.
- Nếu $\lambda \in End(\omega|_{\langle X\rangle})$, từ tính chất khớp của ω, đồng cấu λ xác định bởi
$$\lambda_X : \omega|_{\langle X\rangle}(X) \longrightarrow \omega|_{\langle X\rangle}(X).$$

Xây dựng $k-$đại số A_X

-) Cuối cùng, chúng ta chứng minh $A_X = End(\omega|_{\langle X\rangle})$.

- Hiển nhiên, từ $A_X \subset End(\omega(X))$ ổn định $\omega(Y)$ với mọi $Y \subset X^n$ nên A_X ổn định $\omega|_{\langle X\rangle}(X_i)$ với mọi $X_i \in \langle X\rangle$. Do đó mỗi phần tử của A_X là một tự biến đổi tự nhiên của $\omega|_{\langle X\rangle}$.
- Nếu $\lambda \in End(\omega|_{\langle X\rangle})$, từ tính chất khớp của ω, đồng cấu λ xác định bởi

$$\lambda_X : \omega|_{\langle X\rangle}(X) \longrightarrow \omega|_{\langle X\rangle}(X).$$

  Vì vậy,

$$End(\omega|_{\langle X\rangle}(X)) \supseteq End(\omega|_{\langle X\rangle}) \supseteq A_X.$$

  Từ tính chất tự nhiên của λ, đồng cấu λ_X ổn định $\omega(Y)$ với mọi Y là con của X^n. Điều này chứng tỏ $End(\omega|_{\langle X\rangle}(X)) \subset A_X$.

Một ví dụ

Cho A là $k-$đại số hữu hạn chiều và $\omega : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử quên. Với mọi $k-$đại số R, định nghĩa

$$\phi_R : \mathrm{Vect}_k \longrightarrow \mathrm{Mod}_R; \quad V \mapsto R \otimes V.$$

Một ví dụ

Cho A là $k-$đại số hữu hạn chiều và $\omega : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử quên. Với mọi $k-$đại số R, định nghĩa

$$\phi_R : \mathrm{Vect}_k \longrightarrow \mathrm{Mod}_R; \quad V \mapsto R \otimes V.$$

Do đó có hàm tử

$$\phi_R.\omega : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_R; M \mapsto R \otimes M.$$

Mỗi phần tử của $R \otimes A$ xác định một tự đồng cấu của $\phi_R.\omega$.

Một ví dụ

Cho A là $k-$đại số hữu hạn chiều và $\omega : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử quên. Với mọi $k-$đại số R, định nghĩa

$$\phi_R : \mathrm{Vect}_k \longrightarrow \mathrm{Mod}_R; \quad V \mapsto R \otimes V.$$

Do đó có hàm tử

$$\phi_R.\omega : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_R; M \mapsto R \otimes M.$$

Mỗi phần tử của $R \otimes A$ xác định một tự đồng cấu của $\phi_R.\omega$.Hơn nữa,

Nhận xét 10

Ánh xạ chính tắc

$$\alpha : R \otimes A \longrightarrow End(\phi_R.\omega)$$

là đẳng cấu cùng với ánh xạ ngược $\beta : End(\phi_R.\omega) \longrightarrow R \otimes A; \lambda \mapsto \lambda_A(1)$.

Một nhận xét trên các đối modules

Bây giờ xét B là một $k-$đối đại số và $\omega : \mathrm{Comod}_B \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử quên. Một hệ quả của Định lý 5 nói rằng đồng cấu của các $k-$đối đại số $u : B \otimes B \longrightarrow B$ xác định hàm tử

$$\phi^u : \mathrm{Comod}_B \times \mathrm{Comod}_B \longrightarrow \mathrm{Comod}_B; (X, Y) \mapsto X \otimes_k Y$$

cùng với cấu trúc $B-$đối module

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[r, "\rho_X \otimes \rho_Y"] \arrow[dr, "\rho_{X \otimes Y}"'] & X \otimes B \otimes Y \otimes B \arrow[d, "id_X \otimes id_Y \otimes u"] \\ & X \otimes Y \otimes B \end{tikzcd} .$$

Một nhận xét trên các đối modules

Định lý 11

Có tương ứng 1-1 giữa các đồng cấu đối đại số trên k

$$u : B \otimes B \longrightarrow B$$

và các hàm tử

$$\phi : \mathrm{Comod}_B \times \mathrm{Comod}_B \longrightarrow \mathrm{Comod}_B; \phi(X, Y) = X \otimes_k Y$$

thỏa mãn

- Các ràng buộc kết hợp, giao hoán trên Vect_k cảm sinh các ràng buộc tương ứng trên Comod_B nếu và chỉ nếu u có các tính chất tương ứng.
- Tồn tại vật đồng nhất của phạm trù Comod_B cùng với không gian nền k khi và chỉ khi B có phần tử đơn vị.

Xây dựng $k-$đối đại số B

Bây giờ quay trở lại việc chứng minh Định lý chính. Đặt

$$B_X = A_X^v = End(\omega|_{\langle X \rangle})^v.$$

Xây dựng $k-$đối đại số B

Bây giờ quay trở lại việc chứng minh Định lý chính. Đặt

$$B_X = A_X^v = End(\omega|_{\langle X\rangle})^v.$$

Khi đó B_X là một $k-$đối đại số. Dùng Mệnh đề 2 và Bổ đề 9, ta có

Nhận xét 12

Hàm tử cảm sinh $\langle X\rangle \longrightarrow \mathrm{Comod}_{B_X}$ là một tương đương phạm trù.

Xây dựng $k-$đối đại số B

Bây giờ quay trở lại việc chứng minh Định lý chính. Đặt

$$B_X = A_X^v = End(\omega|_{\langle X\rangle})^v.$$

Khi đó B_X là một $k-$đối đại số. Dùng Mệnh đề 2 và Bổ đề 9, ta có

Nhận xét 12

Hàm tử cảm sinh $\langle X\rangle \longrightarrow \mathrm{Comod}_{B_X}$ là một tương đương phạm trù.

Đặt $B = \varinjlim B_X$ và $(\mathcal{C}, \omega)$ như đã cho ở trước ngoài việc giả sử thêm rằng $\mathcal{C}$ là tensor. Khi đó

Mệnh đề 13

Hàm tử ω cảm sinh một tương đương phạm trù $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Comod}_B$ chuyển hàm tử ω thành hàm tử quên trên Comod_B.

Xây dựng $k-$đối đại số B

Chúng ta nhận thấy rằng, cấu trúc tensor trên $\mathcal{C}$ cảm sinh cấu trúc tương tự trên Comod_B.

Xây dựng $k-$đối đại số B

Chúng ta nhận thấy rằng, cấu trúc tensor trên $\mathcal{C}$ cảm sinh cấu trúc tương tự trên Comod_B.

Bây giờ chúng ta áp dụng Định lý 11.

Từ $\mathcal{C}$ là phạm trù $k-$tuyến tính tensor abel, B có các cấu trúc của một $k-$đại số kết hợp, giao hoán. Hơn nữa, từ $k = \underline{\mathrm{End}}(1)$, đối đại số B có một phần tử đơn vị. Khi đó, $G = \mathrm{Spec}\, B$ là một lược đồ vị nhóm affine.

Xây dựng $k-$đối đại số B

Chúng ta nhận thấy rằng, cấu trúc tensor trên $\mathcal{C}$ cảm sinh cấu trúc tương tự trên Comod_B.

Bây giờ chúng ta áp dụng Định lý 11.

Từ $\mathcal{C}$ là phạm trù $k-$tuyến tính tensor abel, B có các cấu trúc của một $k-$đại số kết hợp, giao hoán. Hơn nữa, từ $k = \underline{\mathrm{End}}(1)$, đối đại số B có một phần tử đơn vị. Khi đó, $G = \mathrm{Spec}\, B$ là một lược đồ vị nhóm affine. Mỗi $k-$đại số R, định nghĩa $\underline{\mathrm{End}}(\omega)(R) := End(\phi_R.\omega)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{End}}(\omega)(R) &= \varprojlim End(\phi_R.\omega|_{\langle X\rangle}), \quad \omega|_{\langle X\rangle} \text{ được gửi thành hàm tử quên} \\
&= \varprojlim (R \otimes A_X), \quad A_X \text{ đồng nhất với } A_X^{\vee\vee} \\
&= \varprojlim Hom_{k-lin}(A_X^{\vee}, R) \\
&= \varprojlim Hom_{k-lin}(B_X, R) \\
&= Hom_{k-lin}(B, R).
\end{aligned}$$

Xây dựng $k-$đối đại số B

Một phần tử $\lambda \in Hom_{k-lin}(B, R)$ tương ứng với một phân tử của $\underline{\mathrm{End}}(\omega)(R)$ giao hoán cùng cấu trúc tensor khi và chỉ khi λ là đồng cấu của các $k-$đại số. Do đó

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(\omega)(R) = Hom_{k-al}(B, R) = G(R).$$

Xây dựng $k-$đối đại số B

Một phần tử $\lambda \in Hom_{k-lin}(B, R)$ tương ứng với một phân tử của $\underline{\mathrm{End}}(\omega)(R)$ giao hoán cùng cấu trúc tensor khi và chỉ khi λ là đồng cấu của các $k-$đại số. Do đó

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(\omega)(R) = Hom_{k-al}(B, R) = G(R).$$

Vì vậy,

Định lý 14

Cho $\mathcal{C}$ là phạm trù $k-$**tuyến tính tensor abel sao cho** $k = End(1)$ và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử $k-$tuyến tính tensor, khớp và trung thành. Khi đó tồn tại một $k-$đối đại số B sao cho

1. Hàm tử $\underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(\omega)$ của các $k-$đại số biểu diễn bởi lược đồ vị nhóm affine $G = \mathrm{Spec}\, B$.
2. Hàm tử ω xác định một tương đương giữa $\mathcal{C}$ và $\mathrm{Rep}_k(G)$.

Sự cần thiết của tính rắn cho lược đồ nhóm

Giả sử $\mathcal{C}$ là phạm trù $k-$tuyến tính tensor abel rắn và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử $k-$tuyến tính tensor, khớp và trung thành. Bởi Mệnh đề 6, ta có

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(\omega) = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega).$$

Sự cần thiết của tính rắn cho lược đồ nhóm

Giả sử $\mathcal{C}$ là phạm trù $k-$tuyến tính tensor abel rắn và $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ là hàm tử $k-$tuyến tính tensor, khớp và trung thành. Bởi Mệnh đề 6, ta có

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(\omega) = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega).$$

Do đó, đối đại số B có một ánh xạ đối nghịch đảo mà làm cho G trở thành lược đồ nhóm affine. $\square$

Phạm trù Tannaka trung tính

Định nghĩa

Một phạm trù **Tannaka trung tính** trên k là một phạm trù $k-$tuyến tính, tensor, abel và rắn $\mathcal{C}$ sao cho

- $k = End(1)$ và;
- $\mathcal{C}$ được trang bị

$$\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$$

  là một hàm tử $k-$tuyến tính tensor, khớp và trung thành.

Phạm trù Tannaka trung tính

Định nghĩa

Một phạm trù **Tannaka trung tính** trên k là một phạm trù $k-$tuyến tính, tensor, abel và rắn $\mathcal{C}$ sao cho

- $k = End(1)$ và;
- $\mathcal{C}$ được trang bị

$$\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$$

là một hàm tử $k-$tuyến tính tensor, khớp và trung thành.

1. Một hàm tử ω như vậy được gọi là **hàm tử thớ** đối với phạm trù $\mathcal{C}$.

Phạm trù Tannaka trung tính

Định nghĩa

Một phạm trù **Tannaka trung tính** trên k là một phạm trù $k-$tuyến tính, tensor, abel và rắn $\mathcal{C}$ sao cho

- $k = End(1)$ và;
- $\mathcal{C}$ được trang bị

$$\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$$

là một hàm tử $k-$tuyến tính tensor, khớp và trung thành.

1. Một hàm tử ω như vậy được gọi là **hàm tử thớ** đối với phạm trù $\mathcal{C}$.
2. Bởi định lý chính, mọi phạm trù Tannaka trung tính là tương đương với phạm trù các $k-$biểu diễn hữu hạn chiều của một lược đồ nhóm affine.

TRÂN TRỌNG CẢM ƠN!